MATEMATIČKA ANALIZA 2

`2. natjecanje`, 15. 6. 2007.

Ime i prezime: ______________________

Šifra: ______________________

1	2	3	4	5	Σ

Napomene: - Od pet ponuđenih zadataka odaberite **četiri** koja ćete rješavati.
- Obavezno **prekrižite** kuću kod zadatka kojeg ne želite rješavati.
- U svakom rješavanom zadatku **detaljno** obrazložite vaše tvrdnje.

(25) 1. Odredite sve neprekidne funkcije $f : [0,1] \to [0,+\infty\rangle$ takve da je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 2, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 4.$$

(25) 2. Odredite sve $a > 0$ takve da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{H_n}$$

konvergira, gdje je $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n-ti harmonijski broj ($n \in \mathbb{N}$).

(25) 3. Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je vrijednost integrala

$$\int_0^\pi \left[\sin x - \alpha x(\pi - x)\right]^2 dx$$

minimalna.

(25) 4. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana je formulom

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je f dobro definirana funkcija, te da nije Riemann-integrabilna ni na kojem segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.

(25) 5. Izračunajte sumu reda

$$\frac{0!}{4!} + \frac{4!}{8!} + \frac{8!}{12!} + \frac{12!}{16!} + \cdots$$

Zavod za analizu

MATEMATIČKA ANALIZA 2

`Rješenja 2. natjecanja`, 15. 6. 2007.

(25) 1. Odredite sve neprekidne funkcije $f : [0,1] \to [0,+\infty\rangle$ takve da je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 2, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 4.$$

Rj: Već iz prva dva uvjeta slijedi da takva neprekidna funkcija $f : [0,1] \to [0,+\infty\rangle$ ne postoji. Naime, ako oduzmemo drugu jednakost od prve dobijemo

$$\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx = -1,$$

što je nemoguće jer je $x \mapsto (1-x)f(x)$ neprekidna i nenegativna funckija na $[0,1]$, pa njen integral na $[0,1]$ ne može biti negativan.

(25) 2. Odredite sve $a > 0$ takve da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{H_n}$$

konvergira, gdje je $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n-ti harmonijski broj ($n \in \mathbb{N}$).

Rj: Najprije primijetimo da za $a \geq 1$ vrijedi $a^{H_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa za $a \geq 1$ gornji red ne konvergira, jer nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda. Dakle, da bi red eventualno konvergirao, mora biti $0 < a < 1$. Također primijetimo da iz dokaza Cauchyjevog integralnog kriterija (skripta prof. Guljaša, Tm. 6.10., str. 160) primijenjenog na funkciju $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ slijedi da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\ln n < \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n,$$

što za $0 < a < 1$ povlači

$$n^{\ln a} = a^{\ln n} > a^{H_n} \geq a \cdot a^{\ln n} = a \cdot n^{\ln a}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Stoga, red $\sum_{n=1}^{\infty} a^{H_n}$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$ konvergira. Iz Cauchyjevog integralnog kriterija primijenjenog na funkciju $x \mapsto x^{\ln a}$ slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$ konvergira ako i samo ako je $\ln a < -1$, tj. ako i samo ako je $a < e^{-1}$. Zato i red $\sum_{n=1}^{\infty} a^{H_n}$ konvergira ako i samo ako je $0 < a < e^{-1}$.

(25) 3. Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je vrijednost integrala

$$\int_0^\pi [\sin x - \alpha x(\pi - x)]^2 \, dx$$

minimalna.

Rj: Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f(\alpha) := \int_0^\pi [\sin x - \alpha x(\pi - x)]^2 \, dx$. Trebamo odrediti točke globalnog minimuma funkcije f. Nakon kvadriranja i integriranja dobijemo da je

$$f(\alpha) = \alpha^2 \int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 \, dx - 2\alpha \int_0^\pi x(\pi - x)\sin x \, dx + \int_0^\pi \sin^2 x \, dx =$$

$$\frac{\pi^5}{30}\alpha^2 - 8\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^5}{30}\Big(\alpha - \frac{120}{\pi^5}\Big)^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{480}{\pi^5} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{480}{\pi^5},$$

pri čemu će jednakost u zadnjem redu vrijediti ako i samo ako je $\alpha = \frac{120}{\pi^5}$. Stoga je $\alpha_0 := \frac{120}{\pi^5}$ jedina točka globalnog minimuma funkcije f, pa je za to α_0 vrijednost integrala minimalna.

(25) 4. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana je formulom

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je f dobro definirana funkcija, te da nije Riemann-integrabilna ni na kojem segmentu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.

Rj: Tvrdimo da je $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, gdje je $\chi_{\mathbb{Q}}$ Dirichletova funkcija definirana formulom

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & \text{za } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(i) Ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onda je $0 < (\cos(n!\pi x))^{2k} < 1$, za svako $k, n \in \mathbb{N}$, pa je $\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2k} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zato je i

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(ii) Ako je $x \in \mathbb{Q}$, tada je $x = \frac{p}{q}$, za neke relativno proste $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Tada je $n!x = n!\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$, za svako $n \geq q$. Stoga je $(\cos(n!\pi x))^{2k} = 1$, za svako $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq q$, iz čega slijedi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k} = 1.$$

Dakle, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Budući da svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ sadrži i racionalne i iracionalne brojeve, to će svaka donja/gornja Darbouxova suma funkcije $\chi_{\mathbb{Q}}$ na $[a, b]$ biti jednaka $0/1$, pa će i donji/gornji Riemannov integral od $\chi_{\mathbb{Q}}$ na $[a, b]$ biti jednk $0/1$. Dakle, funkcija $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ nije Riemann-integrabilna ni na kojem segmentu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.

(25) 5. Izračunajte sumu reda

$$\frac{0!}{4!} + \frac{4!}{8!} + \frac{8!}{12!} + \frac{12!}{16!} + \cdots$$

Rj: Primijetimo da je opći član a_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ gornjeg reda oblika

$$a_n = \frac{(4n)!}{(4(n+1))!} = \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}.$$

Kako je $(k+1)(k+2) - k(k+3) = 2$, $(k+3) - k = 3$ i $(k+2) - (k+1) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ to je

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Primijetimo da je

$$\frac{1}{4n+j} = \int_0^1 x^{4n+j-1}\, dx, \text{ za } 1 \leq j \leq 4, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

te da red polinoma $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \right)$ uniformno konvergira na segmentu $[0,1]$ prema funkciji $x \mapsto \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}$.

Naime, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,1]$ imamo

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \right) - \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)} \right| =$$

$$\frac{1}{6} \left| \frac{(1-x^{4m})(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)} - \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} \right| = \frac{1}{6} \frac{x^{4m}(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)} \leq$$

$$\frac{1}{6}x^{4m}(1-x)^2 \overset{(\triangle)}{\leq} \frac{1}{6}\left(\frac{2m}{2m+1} \right)^{4m} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{(2m+1)^2},$$

pri čemu nejednakost $(\triangle)$ vrijedi zato jer funkcija $x \mapsto (1-x)^2 x^{4m}$ postiže maksimum na $[0,1]$ u točki $x_0 := \frac{2m}{2m+1}$ sa iznosom $\left(\frac{2m}{2m+1}\right)^{4m} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2}$. Kako zadnja nejednakost ne ovisi o izboru $x \in [0,1]$, te kako je $\lim_{m \to \infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 0$, zaključujemo da je konvergencija reda uniformna.

Napokon, računamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4} \right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \right) dx =$$

[Red polinoma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \right)$ uniformno konvergira na $[0,1]$ prema funkciji $x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}$, pa suma i integral komutiraju.]

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \right) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\, dx =$$

$$\frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - \frac{x+1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{12} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 2 - \frac{\pi}{24}.$$

Zavod za analizu