MATEMATIČKA ANALIZA 2

1. kolokvij, 23. 4. 2008.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________
(10-znamenkasti broj na x-ici)

Napomene: - Svaki zadatak rješavajte na zasebnom potpisanom papiru.
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte.
- Zajedno sa rješenjima predajte i ovu naslovnicu.

1. (a) Izračunajte $f^{(100)}(0)$, ako je funkcija f zadana formulom
$$f(x) := \sin(x^2).$$
[4 boda]

   (b) Pretpostavimo da je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom:
$$(1 + x^2)y^3 + y - x^2 = 0.$$
Odredite sve stacionarne točke funkcije y. [2 boda]

2. Odredite sve točke u kojima se krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 + x + 1$ i $y = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{11}{6}$ dodiruju. (Napomena: Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki.) [6 bodova]

3. Zadana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x < 2 \\ -x^2 + \alpha x - 16, & x \geq 2. \end{cases}$$
   (a) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da f bude neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.
   (b) Ispitajte derivabilnost funkcije f.
   (c) Odredite globalne ekstreme funkcije f na $[\frac{1}{2}, 4]$.

[6 bodova]

4. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju
$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$
[7 bodova]

Rezultati:

B. Guljaš, H.Šikić, I. Gogić, A. Mimica, O. Perše, G. Trupčević

MATEMATIČKA ANALIZA 2

1. kolokvij, 23. 4. 2008.

Ime i prezime: ____________________ JMBAG: ________________
(10-znamenkasti broj na x-ici)

Napomene: - Svaki zadatak rješavajte na zasebnom potpisanom papiru.
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte.
- Zajedno sa rješenjima predajte i ovu naslovnicu.

1. (a) Izračunajte $f^{(100)}(0)$, ako je funkcija f zadana formulom

$$f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[4 boda]

(b) Pretpostavimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$f(x) := x^3 + 4x - \cos(\pi x).$$

Dokažite da je f bijekcija i odredite $(f^{-1})'(6)$. [2 boda]

2. Odredite sve točke u kojima se krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ i $y = -\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{11}{6}$ dodiruju. (Napomena: Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki.) [6 bodova]

3. Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x + \beta, & x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

(a) Odredite $\beta \in \mathbb{R}$ tako da f bude neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

(b) Ispitajte derivabilnost funkcije f.

(c) Odredite globalne ekstreme funkcije f na $[-2, 1]$.

[6 bodova]

4. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}.$$

[7 bodova]

Rezultati:

B. Guljaš, H.Šikić, I. Gogić, A. Mimica, O. Perše, G. Trupčević

MATEMATIČKA ANALIZA 2

1. kolokvij, 23. 4. 2008.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

(10-znamenkasti broj na x-ici)

Napomene: - Svaki zadatak rješavajte na zasebnom potpisanom papiru.
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte.
- Zajedno sa rješenjima predajte i ovu naslovnicu.

1. (a) Izračunajte $f^{(100)}(0)$, ako je funkcija f zadana formulom

$$f(x) := \cos(x^2).$$

[4 boda]

(b) Pretpostavimo da je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom:

$$xy = \ln x - \ln y.$$

Odredite sve stacionarne točke funkcije y. [2 boda]

2. Odredite sve točke u kojima se krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ i $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{19}{6}$ dodiruju. (Napomena: Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki.)

[6 bodova]

3. Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x^3 - \gamma x^2}, & x \le 3 \\ \ln(x-2), & x > 3. \end{cases}$$

(a) Odredite $\gamma \in \mathbb{R}$ tako da f bude neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

(b) Ispitajte derivabilnost funkcije f.

(c) Odredite globalne ekstreme funkcije f na $[1, 5]$.

[6 bodova]

4. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

[7 bodova]

Rezultati:

B. Guljaš, H.Šikić, I. Gogić, A. Mimica, O. Perše, G. Trupčević

MATEMATIČKA ANALIZA 2

1. kolokvij, 23. 4. 2008.

Ime i prezime: ____________________________ JMBAG: ________________
(10-znamenkasti broj na x-ici)

Napomene: - Svaki zadatak rješavajte na zasebnom potpisanom papiru.
- Prije rješavanja zadatka, pažljivo ga pročitajte.
- Zajedno sa rješenjima predajte i ovu naslovnicu.

1. (a) Izračunajte $f^{(100)}(0)$, ako je funkcija f zadana formulom
$$f(x) := x \operatorname{Arsh} x.$$
[4 boda]

   (b) Pretpostavimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:
$$f(x) := 2x - \sin x - \operatorname{arctg}(x+1).$$
Dokažite da je f bijekcija i odredite $(f^{-1})'(-\frac{\pi}{4})$. [2 boda]

2. Odredite sve točke u kojima se krivulje $y = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$ i $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{19}{6}$ dodiruju. (Napomena: Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki.)

[6 bodova]

3. Zadana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-\delta}, & x \leq 3 \\ -4 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right), & x > 3. \end{cases}$$
   (a) Odredite $\delta \in \mathbb{R}$ tako da f bude neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.
   (b) Ispitajte derivabilnost funkcije f.
   (c) Odredite globalne ekstreme funkcije f na $[1, 4]$.

[6 bodova]

4. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije za funkciju
$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}.$$
[2 boda]

Rezultati:

B. Guljaš, H.Šikić, I. Gogić, A. Mimica, O. Perše, G. Trupčević