MATEMATIČKA ANALIZA 2

`1. natjecanje`, 7. 5. 2008.

Ime i prezime: ______________________________

Šifra: ______________________________

1	2	3	4	5	Σ

Napomene: - Od pet ponuđenih zadataka odaberite **četiri** koja ćete rješavati.
- Obavezno **prekrižite** kuću kod zadatka kojeg ne želite rješavati.
- U svakom rješavanom zadatku **detaljno** obrazložite vaše tvrdnje.

(25) 1. (a) Odredite sve neparne konveksne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(1) = 1$.

(b) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \neq y) \implies (\exists! \xi \in \mathbb{R})(f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x))).$$

Dokažite da je f strogo konveksna ili strogo konkavna na $\mathbb{R}$.

(25) 2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ za koje vrijedi

$$e^x + f(x) \ln f(x) = (x + 1) f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(25) 3. Neka je

$$\mathcal{S} := \Big\{ f \in C^2([0,1]) : \ (f(0) = f(1) = 0) \ \wedge \ (\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1) \Big\}.$$

Odredite, ako postoji,

$$\inf_{f \in \mathcal{S}} \max_{x \in [0,1]} f''(x).$$

(25) 4. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:
Za svaki par derivabilnih funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji derivabilna funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $h'(x) = f'(x) g'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(25) 5. Pretpostavimo da je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom sa realnim koeficijentima za kojeg vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{Q})(P(q) = n).$$

Koliki je najveći mogući stupanj polinoma $P(x)$?

Zavod za analizu

MATEMATIČKA ANALIZA 2

`Rješenja 1. natjecanja`, 7. 5. 2008.

(25) 1. (a) Odredite sve neparne konveksne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(1) = 1$.

(b) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \neq y) \implies (\exists! \xi \in \mathbb{R})(f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x))).$$

Dokažite da je f strogo konveksna ili strogo konkavna na $\mathbb{R}$.

Rj. (a) Jedina funkcija f koja zadovoljava uvjete iz zadatka je identiteta na $\mathbb{R}$, tj.

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Naime, trivijalno slijedi da je $f(x) = x$ jedina linearna funkcija za koju je $f(1) = 1$. Ukoliko bi postojala neparna konveksna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nije linearna, mogli bi naći realne brojeve $a < b < c$ takve da vrijedi

$$f(b) = f((1-t)a + tc) < (1-t)f(a) + tf(c),$$

gdje je $t := \frac{b-a}{c-a} \in \langle 0, 1 \rangle$. Kako je f neparna imali bi i

$$f(-b) = f((1-t) \cdot (-a) + t \cdot (-c)) > (1-t)f(-a) + tf(-c),$$

što je nemoguće, jer je $-c < -b < -a$, a prema pretpostavici f je konveksna funkcija.

(b) Pretpostavimo da f nije niti strogo konveksna niti strogo konkavna funkcija. Tada postoje $a < c$ i $t \in \langle 0, 1 \rangle$ takvi da vrijedi

$$f(b) = (1-t)f(a) + tf(c), \tag{1}$$

gdje je $b := (1-t)a + tc$. Iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti, primijenjenog redom na intervale $\langle a, b \rangle$ i $\langle b, c \rangle$, slijedi da postoje $\xi_1 \in \langle a, b \rangle$ i $\xi_2 \in \langle b, c \rangle$ takvi da vrijedi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1) \quad \text{i} \quad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\xi_2). \tag{2}$$

Jednakosti (1) i (2) povlače da je

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} &= \frac{(1-t)(f(c) - f(a))}{(1-t)(c-a)} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \\ &= \frac{t(f(c) - f(a))}{t(c-a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1) \end{aligned}$$

pa je

$$f(c) - f(a) = f'(\xi_1)(c - a) = f'(\xi_2)(c - a).$$

Iz pretpostavke zadatka slijedi da je $\xi_1 = \xi_2$, što je nemoguće.

$\square$

(25) 2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ za koje vrijedi

$$e^x + f(x) \ln f(x) = (x+1)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rj. Najprije primijetimo da funkcija $f(x) := e^x$ zadovoljava gornju jednakost. Dokažimo da je ona ujedno i jedinstvena funkcija koja zadovoljava tu jednakost.
Iz nejednakosti

$$e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

slijedi da je

$$e^{x-\ln y} \geq x - \ln y + 1 \Longleftrightarrow e^x + y \ln y \geq (x+1)y, \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Jednakost u (3) postiže se jedino za $x = 0$, pa će i jednakost u (4) biti postignuta jedino u slučaju $x = \ln y$, tj. $y = e^x$.

$\square$

(25) 3. Neka je

$$\mathcal{S} := \Big\{ f \in C^2([0,1]) : \ (f(0) = f(1) = 0) \ \wedge \ (\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1) \Big\}.$$

Odredite, ako postoji,

$$\inf_{f \in \mathcal{S}} \max_{x \in [0,1]} f''(x).$$

Rj. Neka je $f \in \mathcal{S}$ proizvoljna funkcija. Kako je $\min\limits_{x \in [0,1]} f(x) = -1$, iz Bolzano-Weierstrassovog teorema slijedi da postoji $c \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $f(c) = -1$. Feramtova lema povlači da je $f'(c) = 0$. Nadalje, kako je f klase C^2 na $[0,1]$, iz Taylorovog teorema srednje vrijednosti slijedi da postoje $\xi_1 \in \langle 0, c \rangle$ i $\xi_2 \in \langle c, 1 \rangle$ takvi da vrijedi

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2 \Longrightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2},$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 \Longrightarrow f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2}.$$

Neka je $g : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$g(t) := \max \left\{ \frac{2}{t^2}, \frac{2}{(1-t)^2} \right\}.$$

Primijetimo da je $\min_{t \in \langle 0,1 \rangle} g(t) = g(\frac{1}{2}) = 8$. Radi toga je

$$f''(x) \geq \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} = \max \left\{ \frac{2}{c^2}, \frac{2}{(1-c)^2} \right\} = g(c) \geq \min_{t \in \langle 0,1 \rangle} g(t) = 8, \quad \forall x \in [0,1].$$

Kako je $f \in \mathcal{S}$ bila proizvoljna, slijedi da je

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geq 8, \quad \forall f \in \mathcal{S}. \tag{5}$$

Na poslijetku dokažimo da je

$$\inf_{f\in\mathcal{S}} \max_{x\in[0,1]} f''(x) = 8.$$

Zbog nejednakosti (5) dovoljno je naći funkciju $f \in \mathcal{S}$ za koju je $\max_{x\in[0,1]} f''(x) = 8$. Primjer takve funkcije je $f(x) := 4x^2 - 4x$.

□

(25) 4. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:
Za svaki par derivabilnih funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji derivabilna funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $h'(x) = f'(x)g'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rj. Tvrdnja nije istinita. Označimo sa $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vektorski prostor svih derivabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je $D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ operator deriviranja,

$$(Df)(x) := f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$\varphi(x) := \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{za } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da za funkciju φ vrijedi

$$\varphi \in \mathrm{Im}(D) \quad \text{i} \quad \varphi^2 \notin \mathrm{Im}(D),$$

pa će upravo ona poslužiti kao kontraprimjer da tvrdnja iz zadatka ne vrijedi.

Dokažimo najprije da je $\varphi \in \mathrm{Im}(D)$. Neka su $\psi, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane formulom

$$\psi(x) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{za } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases} \quad \text{te} \quad \theta(x) := \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{za } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

Funkcija θ je derivabilna na $\mathbb{R}$ i vrijedi

$$\varphi = 2\psi - D\theta.$$

Budući da je ψ neprekidna na $\mathbb{R}$, imamo $\psi \in \mathrm{Im}(D)$, a kako je $\mathrm{Im}(D)$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, to je i $\varphi \in \mathrm{Im}(D)$.

Sada dokažimo da $\varphi^2 \notin \mathrm{Im}(D)$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\varphi^2 \in \mathrm{Im}(D)$. Tada postoji funkcija $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takva da je $DF = \varphi^2$. Prema dokazanom je i $\varphi \in \mathrm{Im}(D)$, pa također postoji funkcija $\phi \in D(\mathbb{R})$ takva da je $D\phi = \varphi$. Na poslijetku definirajmo funkcije $\widetilde{F}, \omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulama

$$\widetilde{F}(x) := F\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{te} \quad \omega(x) := D(\Phi - \widetilde{F})(x).$$

Očito je $\widetilde{F} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i $\omega \in \mathrm{Im}(D)$. S druge strane, za $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\omega(x) = \Phi'(x) - \widetilde{F}'(x) = \varphi(x)^2 - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{x} & \text{za } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases},$$

što je nemoguće, jer funkcija ω nema svojstvo međuvrijednosti (Darbouxov teorem).

$\square$

(25) 5. Pretpostavimo da je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom sa realnim koeficijentima za kojeg vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{Q})(P(q) = n).$$

Koliki je najveći mogući stupanj polinoma $P(x)$?

Rj. Označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih polinoma $P(x)$ za koje vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{Q})(P(q) = n).$$

Tvrdimo da je

$$M := \max\{\deg P(x) : \ P(x) \in \mathcal{S}\} = 1$$

Nejednakost $M \geq 1$ je trivijalno zadovoljena, jer je polinom $P(x) = x$ element skupa $\mathcal{S}$. Dokažimo i da je $M \leq 1$. Neka je $P(x) := a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{S}$ polinom stupnja k i neka je $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz racionalnih brojeva takav da je

$$P(q_n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema definiciji skupa $\mathcal{S}$, takav niz postoji.

Najprije primijetimo da su svi koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_k$ od $P(x)$ nužno racionalni brojevi. Naime, neka su $x := (a_0, a_1, \ldots, a_k)^\tau$ i $b := (1, 2, \ldots, k+1)^\tau$ stupčane matrice. U matričnom zapisu sistem linearnih jednadžbi

$$P(q_i) = a_0 + q_i a_1 + q_i^2 a_i + \cdots + q_i^k a_k = i, \quad 1 \leq i \leq k+1 \tag{6}$$

je oblika $Ax = b$, gdje je matrica A sustava (6) Vandermonedova matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & q_1 & \cdots & q_1^k \\ 1 & q_2 & \cdots & q_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_{k+1} & \cdots & q_{k+1}^k \end{pmatrix} \in M_{k+1}(\mathbb{Q}).$$

Matrica A je invertibilna, pa je i $A^{-1} \in M_{k+1}(\mathbb{Q})$. Budući da je $x = A^{-1}b$, slijedi

$$a_i \in \mathbb{Q}, \quad \text{za sve } \ 0 \leq i \leq k.$$

Neka je N najmanji zajednički višekratnih svih nazivnika keficijenata a_i $(0 \leq i \leq k)$ zapisanih u reduciranoj formi. Polinom

$$Q(x) := N \cdot P(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0$$

ima cjelobrojne koeficijente i radi određenosti uzmimo da je $b_k > 0$. Nadalje, imamo

$$Q(q_n) = N \cdot n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $q_n = \frac{c_n}{d_n}$ reducirani zapis od q_n. Kako je $Q(q_n) - Nn = 0$, imamo $c_n \mid (b_0 - Nn)$ i $d_n \mid b_k$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $m \neq n$ je $q_m \neq q_n$, pa je

$$|q_m - q_n| \geq \frac{1}{b_k}, \quad \text{za sve } \ m, n \in \mathbb{N}, m \neq n. \tag{8}$$

Kako bi dokazali da je $\deg Q(x) \leq 1$, dovoljno je dokazati da je derivacija $Q'(x)$ konstantan polinom. Pretpostavimo suprotno. Tada vrijedi

$$\lim_{|x| \to \infty} |Q'(x)| = +\infty, \quad \text{te} \quad \lim_{n \to \infty} |Q(q_n)| = \lim_{n \to \infty} Nn = +\infty. \tag{9}$$

Zato je i

$$\lim_{n \to \infty} |q_n| = +\infty, \quad \text{te} \quad \lim_{n \to \infty} |Q'(q_n)| = +\infty. \tag{10}$$

Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ barem dva broja od q_n, q_{n+1} i q_{n+2} su istog predznaka. Nazovimo ih x_n i y_n, te radi određenosti uzmimo da je $x_n < y_n$. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi_n \in \langle x_n, y_n \rangle$ takav da je

$$Q'(\xi_n) = \frac{Q(y_n) - Q(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Zbog (8) je

$$|Q'(\xi_n)| \leq \frac{N(n+2) - Nn}{y_n - x_n} \leq 2Nb_k, \tag{11}$$

što je kontradikcija. Naime, iz (10) slijedi $\lim_{n \to \infty} |\xi_n| = +\infty$, a (9) povlači da je onda i $\lim_{n \to \infty} |Q'(\xi_n)| = +\infty$. S druge strane, (11) povlači da je niz $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omeđen. Dakle, pretpostavka da je $\deg Q'(x) > 0$ bila je kriva, pa zaključujemo da je $\deg Q(x) \leq 1$.

$\square$

I.G.