MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = e^{-x^3}.$$

Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $f^{(n)}(0) \neq 0$.

Rješenje. Primijetimo da je

$$f'(x) = -3x^2 f(x),$$

derivirajmo ovu jednakost $n-1 \geq 2$ puta i iskoristimo Leibnizovu formulu

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-3x^2)^{(k)} f^{(n-1-k)}(x).$$

Vidimo da su sumandi s desne strane jednaki 0 za sve $k \geq 3$, a kako nas zanima točka $x = 0$, zaključujemo da su sumandi s desne strane jednaki 0 i za $k \leq 1$. Stoga je, za prirodan broj $n \geq 3$:

$$f^{(n)}(0) = -6\binom{n-1}{2} f^{(n-3)}(0).$$

Lako izračunamo da je

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0.$$

Dakle, vrijedi da je $f^{(n)}(0) \neq 0$ ako i samo ako je n djeljiv s 3.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 2. (7 bodova) Neka je Γ elipsa zadana jednadžbom

$$x^2 + 4y^2 = 4,$$

te neka je za svaku točku $(x, y) \in \Gamma$ iz prvog kvadranta, $P(x, y)$ površina trokuta kojeg zatvaraju os apscisa, os ordinata, te tangenta na Γ koja prolazi kroz točku (x, y). Odredite skup

$$\{P(x, y)\colon (x, y) \in \Gamma, x, y > 0\}.$$

Rješenje. Uočimo da je dio elipse Γ unutar prvog kvadranta dan jednadžbom

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Derivacija funkcije koja određuje ovu krivulju je

$$y' = -\frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}},$$

pa je stoga jednadžba tangente na proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in \Gamma, x_0, y_0 > 0$ jednaka

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}(x - x_0).$$

Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo da je duljina odsječka na osi apscisa koji stvara ova tangenta jednaka

$$y_0 \cdot \frac{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}{x_0} + x_0 = \frac{4}{x_0},$$

pri čemu smo posljednju jednakost dobili iz činjenice da je $(x_0, y_0) \in \Gamma, x_0, y_0 > 0$, odakle slijedi da je $y_0 = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}$.

Analogno, uvrštavanjem $x = 0$, za odsječak na osi y dobivamo da je duljine

$$y_0 + \frac{x_0^2}{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}.$$

Iz ovoga sada zaključujemo da je

$$P(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}} = \frac{2}{x_0\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}.$$

Budući da je iz jednadžbe elipse jasno da je $x_0 \leq 2$ (te u slučaju jednakosti vrijedi $y_0 = 0$), možemo zaključiti da se zadatak svodi na traženje slike funkcije $f\colon \langle 0, 2\rangle \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{2}{x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Njena je derivacija
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2(1 - \frac{x^2}{4})^{3/2}}.$$
Budući da je $f' < 0$ na $\langle 0, \sqrt{2}\rangle$, funkcija f na tom intervalu pada. Analogno, budući da je $f' > 0$ na $\langle \sqrt{2}, 2\rangle$, funkcija f na tom intervalu raste. Iz neprekidnosti zaključujemo da se globalni minimum postiže u točci $\sqrt{2}$, te on iznosi $f(\sqrt{2}) = 2$. S druge strane, budući da je $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, iz Bolzano-Weierstrassovog teorema možemo zaključiti da je traženi skup jednak $[2, +\infty\rangle$.

Skica alternativnog rješenja (Lugo Mihovilić i Lukas Novak). Jednadžba tangente na danu elipsu u točci (x_0, y_0) je
$$xx_0 + 4yy_0 = 4,$$
što je zapisano u segmentnom obliku jednadžbe pravca
$$\frac{x}{\frac{4}{x_0}} + \frac{y}{\frac{1}{y_0}} = 1.$$
Dakle, duljine odsječaka na osima su $\frac{4}{x_0}$ i $\frac{1}{y_0}$, pa je
$$P(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0} \cdot \frac{1}{y_0} = \frac{2}{x_0 y_0}.$$
Uočimo da je
$$P(x_0, y_0) = \frac{4}{x_0 \cdot 2y_0} \geq \frac{4}{\frac{x_0^2 + 4y_0^2}{2}} = 2,$$
pri čemu nejednakost slijedi iz A-G nejednakosti, a posljednja jednakost iz činjenice da je $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Nadalje, uočimo da se znak jednakosti doista i može postići i to u slučaju kada vrijedi jednakost kod A-G nejednakosti, odnosno kada je $x_0 = 2y_0$, tj. $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Sada analogno kao u prvom rješenju (prikazivanjem $P(x_0, y_0)$ kao funkcije jedne varijable) možemo zaključiti da je tražena slika $[2, +\infty\rangle$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^m(x-2018)^n, & x \in [0, 2018], \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

klase $C^2(\mathbb{R})$.

Rješenje. Odredimo najprije uvjete pod kojima će f biti derivabilna. f je očito derivabilna u svim točkama osim možda u 0 i 2018. Derivabilnost u tim točkama provjeravamo direktno iz definicije derivabilnosti. Očito je

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Funkcija f će zato biti derivabilna u 0 ako i samo ako je

$$0 = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} x^{m-1}(x-2018)^n.$$

Posljednji će limes biti jednak 0 ako i samo ako je $m \geq 2$. Na potpuno isti način zaključujemo da je f derivabilna u 2018 ako i samo ako je $n \geq 2$. Dakle, f je derivabilna (na cijeloj domeni) ako i samo ako je $m \geq 2$ i $n \geq 2$, te je u tom slučaju

$$f'(x) = \begin{cases} x^{m-1}(x-2018)^{n-1}(m(x-2018) + nx), & x \in [0, 2018], \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Na potpuno jednak način zaključujemo da će f' biti derivabilna (odnosno, f dvaput derivabilna) ako i samo ako je $m \geq 3$ i $n \geq 3$, te je u tom slučaju

$$f''(x) = \begin{cases} x^{m-2}(x-2018)^{n-2}(m(m-1)(x-2018)^2 + 2mnx(x-2018) + n(n-1)x^2), & x \in [0, 2018], \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Nadalje lako se provjeri da je za ovakve m i n

$$\lim_{x \nearrow 0} f''(x) = \lim_{x \searrow 0} f''(x) = 0 = f''(0)$$

i

$$\lim_{x \nearrow 2018} f''(x) = \lim_{x \searrow 2018} f''(x) = 0 = f''(2018),$$

pa je f'' neprekidna, odnosno f je klase $C^2(\mathbb{R})$. Dakle, traženi parovi prirodnih brojeva su svi parovi (m, n) za koje je $m \geq 3$ i $n \geq 3$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 4. (6 bodova) Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti/konkavnosti i točke infleksije te asimptote funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-2x}{x}.$$

Rješenje. Primijetimo da je očito $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za intervale monotonosti, trebat će nam prva derivacija. Računamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1-2x}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+(1-2x)^2}.$$

Očito je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, pa zaključujemo da f strogo pada na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$. Analogno zaključujemo da f strogo pada i na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Zato f nema lokalnih ekstrema na prirodnoj domeni.

Za konveksnost/konkavnost trebamo drugu derivaciju:

$$f''(x) = \frac{2x - 4(1-2x)}{(x^2+(1-2x)^2)^2} = \frac{10x-4}{(x^2+(1-2x)^2)^2}.$$

Budući da je nazivnik strogo pozitivan, predznak funkcije f'' ovisi o brojniku. Nije teško vidjeti da je $f''(x) < 0$ za sve $x \in \langle -\infty, \frac{2}{5}\rangle$ i $f''(x) > 0$ za sve $x \in \langle \frac{2}{5}, +\infty\rangle$, te $f''(\frac{2}{5}) = 0$. Treba paziti jer $0 \notin \mathcal{D}_f$, pa zaključujemo: f je strogo konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, strogo konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{2}{5}\rangle$ i strogo konveksna na intervalu $\langle \frac{2}{5}, +\infty, \rangle$. Točka $x = \frac{2}{5}$ je točka infleksije.

Budući da je $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-2x}{x} = -2$, te arctg neprekidna funkcija, vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\operatorname{arctg} 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\operatorname{arctg} 2.$$

Zaključujemo da je pravac $y = -\operatorname{arctg} 2$ lijeva i desna horizontalna asimptota funkcije f. Kosih asimptota (budući da postoje horizontalne) nema. Kandidati za vertikalnu asimptotu su konačni rubovi domene, znači točka $x = 0$. Budući da je $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-2x}{x} = -\infty$, arctg neprekidna funkcija i $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{-\pi}{2}$, vrijedi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-\pi}{2}.$$

Sasvim analogno pokaže se i da je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Zaključujemo da funkcija nema vertikalnih asimptota.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = e^{-x^4}.$$

Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $f^{(n)}(0) \neq 0$.

Rješenje. Primijetimo da je

$$f'(x) = -4x^3 f(x),$$

derivirajmo ovu jednakost $n-1 \geq 3$ puta i iskoristimo Leibnizovu formulu

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-4x^3)^{(k)} f^{(n-1-k)}(x).$$

Vidimo da su sumandi s desne strane jednaki 0 za sve $k \geq 4$, a kako nas zanima točka $x = 0$, zaključujemo da su sumandi s desne strane jednaki 0 i za $k \leq 2$. Stoga je, za prirodan broj $n \geq 4$:

$$f^{(n)}(0) = -24 \binom{n-1}{3} f^{(n-4)}(0).$$

Lako izračunamo da je

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0.$$

Dakle, vrijedi da je $f^{(n)}(0) \neq 0$ ako i samo ako je n djeljiv s 4.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 2. (7 bodova) Neka je Γ elipsa zadana jednadžbom

$$4x^2 + y^2 = 4,$$

te neka je za svaku točku $(x, y) \in \Gamma$ iz prvog kvadranta, $P(x, y)$ površina trokuta kojeg zatvaraju os apscisa, os ordinata, te tangenta na Γ koja prolazi kroz točku (x, y). Odredite skup

$$\{P(x, y) \colon (x, y) \in \Gamma, x, y > 0\}.$$

Rješenje. Uočimo da je dio elipse Γ unutar prvog kvadranta dan jednadžbom

$$y = 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Derivacija funkcije koja određuje ovu krivulju je

$$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

pa je stoga jednadžba tangente na proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in \Gamma, x_0, y_0 > 0$ jednaka

$$y - y_0 = -\frac{2x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}(x - x_0).$$

Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo da je duljina odsječka na osi apscisa koji stvara ova tangenta jednaka

$$y_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{2x_0} + x_0 = \frac{1}{x_0},$$

pri čemu smo posljednju jednakost dobili iz činjenice da je $(x_0, y_0) \in \Gamma, x_0, y_0 > 0$, odakle slijedi da je $y_0 = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}$.

Analogno, uvrštavanjem $x = 0$, za odsječak na osi y dobivamo da je duljine

$$y_0 + \frac{2x_0^2}{\sqrt{1 - x_0^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

Iz ovoga sada zaključujemo da je

$$P(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - x_0^2}} = \frac{1}{x_0\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

Budući da je iz jednadžbe elipse jasno da je $x_0 \leq 1$ (te u slučaju jednakosti vrijedi $y_0 = 0$), možemo zaključiti da se zadatak svodi na traženje slike funkcije $f \colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

Njena je derivacija

$$f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2(1 - x^2)^{3/2}}.$$

Budući da je $f' > 0$ na $\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, funkcija f na tom intervalu raste. Analogno, budući da je $f' < 0$ na $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\rangle$, funkcija f na tom intervalu pada. Iz neprekidnosti zaključujemo da se globalni minimum postiže u točci $\frac{\sqrt{2}}{2}$, te on iznosi $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$. S druge strane, budući da je $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, iz Bolzano-Weierstrassovog teorema možemo zaključiti da je traženi skup jednak $[2, +\infty\rangle$.

Skica alternativnog rješenja (Lugo Mihovilić i Lukas Novak). Jednadžba tangente na danu elipsu u točci (x_0, y_0) je

$$4xx_0 + yy_0 = 4,$$

što je zapisano u segmentnom obliku jednadžbe pravca

$$\frac{x}{\frac{1}{x_0}} + \frac{y}{\frac{4}{y_0}} = 1.$$

Dakle, duljine odsječaka na osima su $\frac{1}{x_0}$ i $\frac{4}{y_0}$, pa je

$$P(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{4}{y_0} = \frac{2}{x_0 y_0}.$$

Uočimo da je

$$P(x_0, y_0) = \frac{4}{2x_0 \cdot y_0} \geq \frac{4}{\frac{4x_0^2 + y_0^2}{2}} = 2,$$

pri čemu nejednakost slijedi iz A-G nejednakosti, a posljednja jednakost iz činjenice da je $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Nadalje, uočimo da se znak jednakosti doista i može postići i to u slučaju kada vrijedi jednakost kod A-G nejednakosti, odnosno kada je $2x_0 = y_0$, tj. $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Sada analogno kao u prvom rješenju (prikazivanjem $P(x_0, y_0)$ kao funkcije jedne varijable) možemo zaključiti da je tražena slika $[2, +\infty\rangle$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x+2018)^m x^n, & x \in [-2018, 0], \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

klase $C^2(\mathbb{R})$.

Rješenje. Odredimo najprije uvjete pod kojima će f biti derivabilna. f je očito derivabilna u svim točkama osim možda u 0 i -2018. Derivabilnost u tim točkama provjeravamo direktno iz definicije derivabilnosti. Očito je

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Funkcija f će zato biti derivabilna u 0 ako i samo ako je

$$0 = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} (x+2018)^m x^{n-1}.$$

Posljednji će limes biti jednak 0 ako i samo ako je $n \geq 2$. Na potpuno isti način zaključujemo da je f derivabilna u -2018 ako i samo ako je $m \geq 2$. Dakle, f je derivabilna (na cijeloj domeni) ako i samo ako je $m \geq 2$ i $n \geq 2$, te je u tom slučaju

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2018)^{m-1} x^{n-1} (n(x+2018) + mx), & x \in [-2018, 0], \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Na potpuno jednak način zaključujemo da će f' biti derivabilna (odnosno, f dvaput derivabilna) ako i samo ako je $m \geq 3$ i $n \geq 3$, te je u tom slučaju

$$f''(x) = \begin{cases} (x+2018)^{m-2} x^{n-2} (n(n-1)(x+2018)^2 + 2mnx(x+2018) + m(m-1)x^2), & x \in [-2018, 0], \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Nadalje lako se provjeri da je za ovakve m i n

$$\lim_{x \nearrow 0} f''(x) = \lim_{x \searrow 0} f''(x) = 0 = f''(0)$$

i

$$\lim_{x \nearrow -2018} f''(x) = \lim_{x \searrow -2018} f''(x) = 0 = f''(-2018),$$

pa je f'' neprekidna, odnosno f je klase $C^2(\mathbb{R})$. Dakle, traženi parovi prirodnih brojeva su svi parovi (m, n) za koje je $m \geq 3$ i $n \geq 3$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 4. (6 bodova) Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti/konkavnosti i točke infleksije te asimptote funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{x}.$$

Rješenje. Primijetimo da je očito $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za intervale monotonosti, trebat će nam prva derivacija. Računamo

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{3x-1}{x})^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2 + (3x-1)^2}.$$

Očito je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, pa zaključujemo da f strogo raste na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$. Analogno zaključujemo da f strogo raste i na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Zato f nema lokalnih ekstrema na prirodnoj domeni.

Za konveksnost/konkavnost trebamo drugu derivaciju:

$$f''(x) = -\frac{2x + 6(3x-1)}{(x^2 + (3x-1)^2)^2} = -\frac{20x - 6}{(x^2 + (3x-1)^2)^2}.$$

Budući da je nazivnik strogo pozitivan, predznak funkcije f'' ovisi o brojniku. Nije teško vidjeti da je $f''(x) > 0$ za sve $x \in \langle -\infty, \frac{3}{10}\rangle$ i $f''(x) < 0$ za sve $x \in \langle \frac{3}{10}, +\infty\rangle$, te $f''(\frac{3}{10}) = 0$. Treba paziti jer $0 \notin \mathcal{D}_f$, pa zaključujemo: f je strogo konveksna na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, strogo konveksna na intervalu $\langle 0, \frac{3}{10}\rangle$ i strogo konkavna na intervalu $\langle \frac{3}{10}, +\infty, \rangle$. Točka $x = \frac{3}{10}$ je točka infleksije.

Budući da je $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x} = 3$, te arctg neprekidna funkcija, vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 3 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 3.$$

Zaključujemo da je pravac $y = \operatorname{arctg} 3$ lijeva i desna horizontalna asimptota funkcije f. Kosih asimptota (budući da postoje horizontalne) nema. Kandidati za vertikalnu asimptotu su konačni rubovi domene, znači točka $x = 0$. Budući da je $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{3x-1}{x} = +\infty$, arctg neprekidna funkcija i $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, vrijedi

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Sasvim analogno pokaže se i da je

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-\pi}{2}.$$

Zaključujemo da funkcija nema vertikalnih asimptota.