MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 1. (7 bodova) Odredite sve vrijednosti parametra $a > 0$ takve da nepravi integral

$$\int_{0\leftarrow}^{+\infty} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

konvergira.

Rješenje. Vrijedi

$$\int_{0\leftarrow}^{+\infty} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_{0\leftarrow}^{1} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x,$$

ukoliko oba integrala na desnoj strani konvergiraju.

Promotrimo najprije drugi integral. Budući da je $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = 1$, pa onda i

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a \ln(1+\frac{1}{x^2})}{x^{a-2}} = 1.$$

Budući da integral

$$\int_{1}^{+\infty} x^{a-2}\, \mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}}\, \mathrm{d}x$$

konvergira ako i samo ako je $2-a > 1$, odnosno $a < 1$, po graničnom kriteriju zaključujemo da i integral

$$\int_{1}^{+\infty} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

konvergira ako i samo ako je $a < 1$, što zajedno s uvjetom iz zadatka daje $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Pokažimo sada da integral

$$\int_{0\leftarrow}^{1} x^a \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

konvergira za sve $a > 0$. Supstitucijom $t = \frac{1}{x}$ integral postaje

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{a+2}} \ln(1+t^2)\, \mathrm{d}t.$$

Neka je $f\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}^+$ zadana s

$$f(x) = x - \ln(1+x^2).$$

Vrijedi

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0$$

za sve $x > 0$. Budući da skup stacionarnih točaka funkcije f očito ne sadrži interval, zaključujemo da je f strogo rastuća, pa je $f(x) > f(0) = 0$, odnosno $\ln(1+x^2) < x$, za sve $x > 0$. Korištenjem te nejednakosti, usporednog kriterija, i činjenice da integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{t}{t^{a+2}}\, \mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}\, \mathrm{d}t$$

konvergira za sve $a > 0$, tvrdnja slijedi. Konačno, zaključujemo da polazni nepravi intergal konvergira ako i samo ako je $a \in \langle 0, 1\rangle$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 2. Odredite integrale

(a) (2 boda) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$,

(b) (4 boda) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Rješenje.

(a) Iskoristimo supstituciju $t = x^2 + 2, \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, pa integral postaje

$$\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - 2\int_2^3 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + 2\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{1}{6}.$$

(b) Označimo $I(x) = \displaystyle\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$ i krenimo sa parcijalnom integracijom

$$u = (\arcsin x)^2, \mathrm{d}u = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v = x.$$

Slijedi

$$I(x) = x(\arcsin x)^2 - 2\int x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Nakon supstitucije

$$t = \arcsin x, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

posljednji integral postaje

$$\int t\sin t\,\mathrm{d}t,$$

te konačno još jednom parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int t\sin t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \int \cos t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \sin t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo rješenje

$$\begin{aligned} I(x) &= x(\arcsin x)^2 - 2(\sin(\arcsin x) - \arcsin x\cos(\arcsin x)) + C \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\arcsin x\cos(\arcsin x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n!\pi}{24}\right).$$

(b) (4 boda) Ispitajte konvergenciju donjeg reda u ovisnosti o parametru $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{\frac{2}{n^2}} - 1 - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} - \frac{2}{n^6} \right|^{\alpha}.$$

Rješenje.

(a) Uočimo da je za svaki $n \geq 5$

$$n! = 24 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n,$$

pa je za takve n broj $\frac{n!\pi}{24}$ cjelobrojni višekratnik broja π, zbog čega je $\sin\left(\frac{n!\pi}{24}\right) = 0$. Zaključujemo da su svi članovi reda, osim njih prvih pet, jednaki 0 pa red trivijalno konvergira.

(b) Iz Maclaurinovog razvoja eksponencijalne funkcije znamo da je za x blizu 0

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Konvergencija reda ovisi o veličini njegovih članova za velike n, a u tom je slučaju $\frac{2}{n^2}$ doista blizu 0 pa je

$$e^{\frac{2}{n^2}} \approx 1 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \frac{4}{3n^6},$$

odnosno

$$\frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1 - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} - \frac{2}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} \approx -\frac{2}{3}. \tag{1}$$

Ovo opažanje nas navodi da promatrani red usporedimo s redom $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{6\alpha}}$. U tu svrhu određujemo limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| e^{\frac{2}{n^2}} - 1 - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} - \frac{2}{n^6} \right|^{\alpha}}{\frac{1}{n^{6\alpha}}} = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{n^2}} - 1 - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} - \frac{2}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} \right|^{\alpha}. \tag{2}$$

Zbog supstitucije $x = \frac{2}{n^2}$, ovaj će limes biti jednak

$$\left| \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}}{\frac{x^3}{8}} \right|^{\alpha},$$

ukoliko limes pod apsolutnom vrijednosti postoji. Uočimo da za njega vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}}{\frac{x^3}{8}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{3x^2}{4}}{\frac{3x^2}{8}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{4}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3},$$

pri čemu smo prve tri jednakosti dobili korištenjem L'Hôpitalovog pravila (zbog aproksimacije (1) ovaj je rezultat očekivan). Zaključujemo da je limes (2) jednak $(\frac{2}{3})^\alpha \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa po graničnom kriteriju promatrani red konvergira ako i samo ako konvergira red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{6\alpha}}$, odnosno ako i samo ako je $6\alpha > 1$, tj. $\alpha > \frac{1}{6}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. Razvijte funkciju f u Maclaurinov red i odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

Uputa. Najprije zapišite funkciju f u jednostavnijem obliku koji će biti pogodniji za razvoj Maclaurinovog reda.

(b) (3 boda) Izračunajte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2018^n}.$$

Rješenje.

(a) Kubiranjem jednakosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobivamo

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1,$$

odnosno

$$f(x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Iskoristimo identitete

$$2\sin x \cos x = \sin(2x) \quad \text{i} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

pa dobijemo

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\cos(4x)}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4x).$$

Kako za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n},$$

gdje je $a_0 = 1$ i $a_n = \dfrac{3 \cdot (-16)^n}{8 \cdot (2n)!}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{16}{(2n+1)(2n+2)} \right| = 0,$$

pa po napomeni s vježbi radijus konvergencije možemo računati kao

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty.$$

(b) Neka je

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n.$$

Primijetimo da je f dobro definirana funkcija za sve $x\in\langle -1,1\rangle$ (radijus konvergencije navedenog reda je jednak 1). Moramo odrediti vrijednost $f\left(\frac{1}{2018}\right)$. Neka je

$$g(x)=\frac{x^2}{1-x}=x^2\cdot\frac{1}{1-x}=x^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+2},\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle\,.$$

Dakle,

$$f(x)=g''(x)=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Konačno je

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)=\frac{2\cdot 2018^3}{2017^3}.$$