MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je $f(x) = \cos(3\arcsin x)$. Odredite $f^{(100)}(0)$.
Uputa. Pronađite neku jednakost koja povezuje funkcije f, f' i f''.

Rješenje. U skladu s uputom, nađimo diferencijalnu jednakost koju zadovoljava funkcija f.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(3\arcsin x)\cdot\frac{3}{\sqrt{1-x^2}},\\
f''(x) &= -\cos(3\arcsin x)\cdot\frac{9}{1-x^2} - \sin(3\arcsin x)\cdot\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},
\end{aligned}
$$

iz čega dobijemo

$$(1-x^2)f'' = -9f + xf'.$$

Sada, primijenjujući Leibnizovu formulu, dobijemo da za $n \geq 2$ vrijedi

$$(1-x^2)f'' = -9f + xf' \quad /^{(n-2)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1-x^2)^{(k)}f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-9)^{(k)}f^{(n-2-k)} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(x)^{(k)}f^{(n-1-k)}.$$

Sada, za $n \geq 4$ dobijemo da vrijedi

$$(1-x^2)f^{(n)} + (n-2)(-2x)f^{(n-1)} - (n-2)(n-3)f^{(n-2)} = -9f^{(n-2)} + xf^{(n-1)} + (n-2)f^{(n-2)}.$$

Uvrstimo li $x = 0$, dobijemo

$$f^{(n)}(0) = (n-5)(n+1)f^{(n-2)}(0), \qquad \text{za } n \geq 4.$$

Iteriranjem ove jednakosti dobivamo da je za $n = 100$

$$f^{(100)}(0) = \frac{-1}{3}95!!\cdot 101!!\cdot f''(0).$$

Kako je $f''(0) = -9$, dobijemo

$$f^{(100)}(0) = 3\cdot 95!!\cdot 101!!$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

(b) (4 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je konveksna na $\langle -\infty, 0]$ i $[0, +\infty\rangle$, te koja u točci 0 poprima strogi lokalni maksimum. Dokažite da f nije derivabilna u 0.

Rješenje.

(a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{2},$$

pri čemu druga i četvrta jednakost slijede korištenjem L'Hôpitalovog pravila.

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da je f derivabilna u 0. Ideja je da promatrajući desnu okolinu točke 0 zaključimo da je $f'(0) < 0$, a potom da promatrajući lijevu okolinu točke 0 zaključimo da je $f'(0) > 0$, što će dovesti do očite kontradikcije.

Budući da f u točci 0 poprima strogi lokalni maksimum, postoji $s > 0$ takav da je $f(0) > f(s)$. Pokazat ćemo da je koeficijent smjera tangente u točci $(0, f(0))$ manji od koeficijenta smjera pravca koji prolazi točkama $(0, f(0))$ i $(s, f(s))$, odnosno da je

$$f'(0) \le \frac{f(s)-f(0)}{s}.$$

Neka je $x \in \langle 0, s\rangle$ proizvoljan. Budući da je $x = (1-\frac{x}{s})\cdot 0 + \frac{x}{s}\cdot s$, iz uvjeta konveksnosti funkcije f dobivamo da je

$$f(x) \le \left(1-\frac{x}{s}\right)\cdot f(0) + \frac{x}{s}\cdot f(s),$$

odnosno

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{f(s)-f(0)}{s}.$$

Iz ovoga slijedi

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{f(s)-f(0)}{s} < 0.$$

Na potpuno isti način, promatrajući lijevu okolinu točke 0, dolazimo do zaključka da je i $f'(0) > 0$, što je kontradikcija.

Skica alternativnog rješenja (b) dijela (Juraj Marušić). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f(0) = 0$ (doista, u suprotnom možemo promatrati funkciju $x \mapsto f(x) - f(0)$ koja zadovoljava sva svojstva kao i originalna funkcija f, ali ima svojstvo da u 0 poprima vrijednost 0).

Budući da se u 0 postiže strogi lokalni maksimum, postoji $x > 0$ takav da je $f(x) < f(0) = 0$. Iz konveksnosti dobivamo da je

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(0)}{2} = \frac{f(x)}{2},$$

a iteriranjem ove nejednakosti (za $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \dots$) dobivamo da je

$$f\left(2^{-n}x\right) \leq 2^{-n} f(x), \quad \text{za sve } n \geq 1.$$

Kako je $2^{-n}x \to 0$ za $n \to \infty$, vrijedi

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{-n}x) - f(0)}{2^{-n}x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{-n}x)}{2^{-n}x} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}f(x)}{2^{-n}x} = \frac{f(x)}{x} < 0.$$

Međutim, na potpuno isti način, promatrajući neki $x' < 0$ takav da je $f(x') < f(0) = 0$, dobiva se da je i $f'(0) > 0$ što daje kontradikciju.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 3. (6 bodova)

(a) (3 boda) Riješite nejednadžbu $x^9 - x^5 + x > 1$.

(b) (3 boda) Neka je $f \in C^3(\mathbb{R})$ funkcija s barem jednom točkom infleksije, te takva da je f' strogo konveksna i da vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) > 0.$$

Dokažite da ako f nema strogi lokalni maksimum, tada nema ni strogi lokalni minimum.

Rješenje.

(a) Neka je $f(x) = x^9 - x^5 + x - 1$. Tada je $f'(x) = 9x^8 - 5x^4 + 1 = 9(x^4)^2 - 5(x^4) + 1 > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ jer je diskriminanta $D = 25 - 36 < 0$, a $9 > 0$. Dakle, f je strogo rastuća funkcija pa je $f(x) > 0 = f(1)$ ako i samo ako je $x > 1$.

(b) Budući je f' strogo konveksna, a $f \in C^3(\mathbb{R})$, zaključujemo da je $f^{(3)} > 0$. To znači da je f'' strogo rastuća, a otuda slijedi da ima maksimalno jednu nultočku. Budući da f ima točku infleksije, f'' ima točno jednu nultočku – označimo je s c.

Tada je $f'' < 0$ na $\langle -\infty, c\rangle$ i $f'' > 0$ na $\langle c, +\infty\rangle$, odakle zaključujemo da je f' strogo padajuća na $\langle -\infty, c\rangle$ i strogo rastuća na $\langle c, +\infty\rangle$, pa f' ima maksimalno dvije nultočke. Sada razlikujemo tri slučaja:

(i) f' nema nultočaka. Tada f nema stacionarnih točaka, a onda niti lokalnih ekstrema.

(ii) f' ima jednu nultočku. Kako je $\lim_{x\to-\infty} f'(x) > 0$ i $\lim_{x\to+\infty} f'(x) > 0$, a u c je lokalni minimum funkcije f', to znači da je ta nultočka c, a onda je $f' \geq 0$ pa je f rastuća i samim time nema strogi lokalni minimum.

(iii) f' ima dvije nultočke $a \in \langle -\infty, c\rangle$ i $b \in \langle c, +\infty\rangle$. No tada je $f' > 0$ na $\langle -\infty, a\rangle$ i $f' < 0$ na $\langle a, b\rangle$ pa f u točci a postiže strogi lokalni maksimum, što je u suprotnosti s pretpostavkom zadatka.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 4. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Prirodna domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, a jedina nultočka 0. Prva derivacija funkcije f je

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Stacionarne točke su nultočke funkcije f', tj. $\pm\sqrt{3}$ i 0. Kako je $f'(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle$ te $x \in \langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$, zaključujemo da je f na tim intervalima strogo rastuća funkcija. Kako je $f'(x) < 0$ za $x \in \langle -\sqrt{3}, -1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ te $x \in \langle 1, \sqrt{3}\rangle$, zaključujemo da je f na tim intervalima strogo padajuća funkcija, pa je $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ strogi lokalni minimum, a $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ strogi lokalni maksimum.

Nadalje, druga derivacija funkcije f je

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

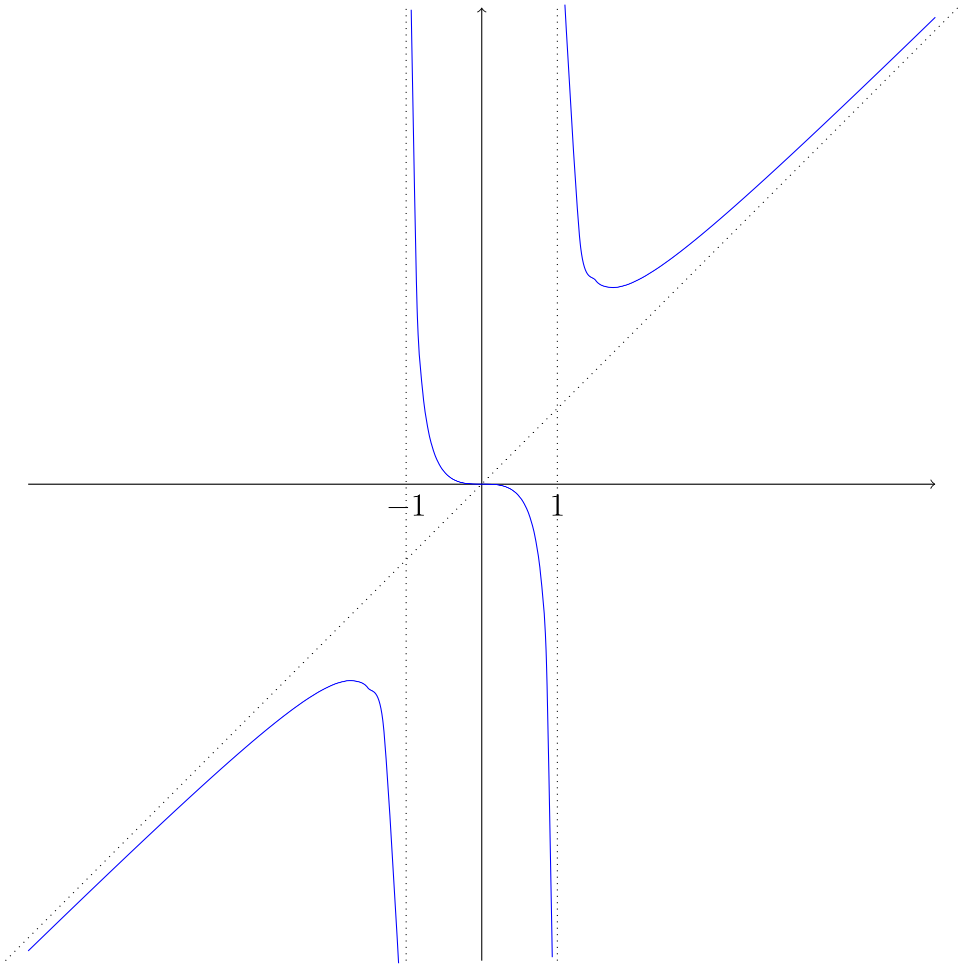
čija je jedina nultočka infleksije $x = 0$. Kako je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, -1\rangle$ ta za $x \in \langle 0, 1\rangle$, f je strogo konkavna na tim intervalima, dok je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle -1, 0\rangle$ ta za $x \in \langle 1, +\infty\rangle$, tj. f je strogo konveksna na intervalima $\langle -1, 0\rangle$ ta $\langle 1, +\infty\rangle$. Dakle, 0 je točka infleksije.

Vrijedi $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ i $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$ pa je pravac $y = x$ kosa asimptota funkcije f. Nadalje, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ pa horizontalnih asimptota nema. Napokon,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

pa su pravci $x = -1$ i $x = 1$ vertikalne asimptote funkcije f.

Graf funkcije izgleda ovako



−1
1