MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Izračunajte integral

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx.$$

(b) (4 boda) Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ takve da nepravi integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|\sin x|^{1/3}+x}\,dx$$

konvergira.

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x-1)^2+4}\,dx \\
&= 2\int \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx = \left[t=\frac{x-1}{2},\ dt=\frac{1}{2}dx\right] \\
&= 4\int \sqrt{t^2+1}\,dt = [t=\mathrm{sh}s,\, s=\mathrm{Arsh}t,\ dt=\mathrm{ch}s\,ds] = 4\int \mathrm{ch}^2 s\,ds = 2\int (\mathrm{ch}(2s)+1)\,ds \\
&= 2\left(\frac{\mathrm{sh}(2s)}{2}+s\right)+C = 2\left(t\sqrt{1+t^2}+\mathrm{Arsh}(t)\right)+C \\
&= (x-1)\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4}}+2\mathrm{Arsh}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

(b) Promatrajmo prvo slučaj kada je $\alpha \geq 0$. Dokazat ćemo da tada integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|\sin x|^{1/3}+x}\,dx,$$

divergira. Uočimo da je $|\sin x|^{1/3}+x \leq 1+x$ za sve $x \in \mathbb{R}$ pa je $\frac{x^\alpha}{|\sin x|^{1/3}+x} \geq \frac{x^\alpha}{1+x} \geq \frac{1}{1+x}$ za sve $x \geq 1$, jer je $\alpha \geq 0$. Budući da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$$

divergira, po usporednom kriteriju, divergira i početni integral.

Sada gledamo slučaj $\alpha < 0$. Kako je $\frac{x^\alpha}{|\sin x|^{1/3}+x} \leq \frac{x^\alpha}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, a integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx$$

konvergira jer je $1-\alpha > 1$ (zbog $\alpha < 0$), onda po usporednom kriteriju konvergira i integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|\sin x|^{1/3}+x}\,dx.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 2. (6 bodova) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko y osi lika omeđenog krivuljama $y = \frac{1}{1+x^2}$ i $y = \frac{x^2}{2}$.

Rješenje. Prvo uočimo da su funkcije $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $f_2(x) = \frac{x^2}{2}$ parne, i da se grafovi tih funkcija sijeku u točkama $(-1, \frac{1}{2})$ i $(1, \frac{1}{2})$. Dakle, traženi volumen ćemo dobiti ako gledamo rotaciju jednog dijela lika omeđenog s danim krivuljama i s y osi (imamo dva takva dijela koji su simetrični s obzirom na y os). Npr. dio desno od osi ordinata i zarotirajmo ga oko osi y. Tada je volumen traženog tijela jednak

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx - 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \pi \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 3.

(a) (4 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^4+10)}{\sqrt{n^3-\ln n}}.$$

(b) (2 boda) Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Dokažite da tada konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}.$$

Rješenje.

(a) Najprije ćemo *intuitivno* i ne potpuno precizno naslutiti odgovor, a zatim ga precizno dokazati. Za velike n je $\ln(n^4+10) \approx 4\ln n$. Nadalje, logaritam jako sporo raste – sporije od bilo koje potencije u varijabli n s pozitivnim eksponentom (npr. $n^{0.1}$). Iz ovih zaključaka slijedi da je brojnik *odozgo dominiran* funkcijom $n^{0.1}$.

Što se tiče nazivnika, član $\ln n$ ne utječe bitno na njegovu veličinu budući da je, kao što smo prethodno spomenuli, puno manji od n^3. Zbog toga zaključujemo da je nazivnik reda veličine $n^{1.5}$.

Iz ova dva zaključka slijedi da je opći član danog reda *odozgo dominiran* s $1/n^{1.4}$, pa očekujemo da red konvergira. Sada ćemo vodeći se time to i precizno dokazati.

Uočimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n^4+10)}{\sqrt{n^3-\ln n}}}{1/n^{1.4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x^4+10)}{x^{0.1}}}{\sqrt{1-\frac{\ln x}{x^3}}}, \tag{1}$$

pri čemu smo s limesa niza prešli na limes funkcije. Korištenjem L'Hôpitalovog pravila dobivamo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4+10)}{x^{0.1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{40x^{3.9}}{x^4+10} = 0$$

i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3} = 0,$$

pa možemo zaključiti da je limes (1) jednak 0. Budući da je $1.4 > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.4}}$ konvergira, pa po graničnom kriteriju konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^4+10)}{\sqrt{n^3-\ln n}}.$$

(b) Iz očite nejednakosti $(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})^2 \geq 0$ dobivamo da je $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$.

Budući da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ konvergiraju, slijedi da konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n+1}\right).$$

Stoga, koristeći usporedni kriterij, možemo zaključiti da konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Razvijte u Maclaurinov red funkciju $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ i odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

(b) (3 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+(2n)!}{3^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Rješenje.

(a) Kako je $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$, vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

gdje je niz $a_n,\ n \geq 1$, dan formulom

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ neparan}, \\ 0, & n \text{ paran}. \end{cases}$$

Dakle, Maclaurinov red funkcije f je

$$T[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}.$$

Radijus konvergencije dobivenog reda se dobije pomoću Cauchy-Hadamardove formule

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n-1}}} = 1.$$

(b) Uočimo da se dana suma može zapisati kao

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+(2n)!}{3^{2n+1}(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)},$$

a desna strana gornje jednakosti jednaka je $\sin\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Dakle,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+(2n)!}{3^{2n+1}(2n+1)!} = \sin\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$