MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prva popravna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 1.

(a) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$

Izračunajte $f^{(2020)}(0)$.

(b) (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{e^{2x}}.$$

(c) (10 bodova) Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na otvorenom intervalu I.
Dokažite tvrdnju: Ako je $f'(x) \neq 1$, za $\forall x \in I$, onda f može imati najviše jednu fiksnu točku.
(Napomena: za $x \in I$ kažemo da je fiksna točka funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ ako vrijedi $f(x) = x$.)

Rješenje.

(a) Kako je prva derivacija funkcije f jednaka $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, to dobijemo da vrijedi $(1 + x^2)f'(x) = 2x$. Sada, primijenjujući Leibnizovu formulu, dobijemo da za $n \geq 3$ vrijedi

$$(1 + x^2)f' = 2x \qquad \Big|^{(n-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1 + x^2)^{(k)} f^{(n-k)} = 0.$$

Dakle, za $n \geq 3$ vrijedi

$$(1 + x^2)f^{(n)} + 2x(n - 1)f^{(n-1)} + (n - 1)(n - 2)f^{(n-2)} = 0.$$

Uvrstimo li $x = 0$ dobijemo

$$f^{(n)}(0) = -(n - 1)(n - 2)f^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 3.$$

Iteriranjem ove jednakosti dobijemo da za $n = 2020$ vrijedi

$$f^{(2020)}(0) = (-1)^{1009} \cdot 2019!f^{(2)}(0) = -2 \cdot 2019!.$$

(b) Računajmo koristeći L'H pravilo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{e^{2x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{xe^{2x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(e^{2x} + 2xe^{2x})} = 0.$$

(c) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $x_1, x_2 \in I$ takvi da vrijedi $x_1 < x_2$ i $f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2$. Tada po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $c \in \langle x_1, x_2 \rangle$ za koji vrijedi $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} = 1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, funkcija f može imati najviše jednu fiksnu točku.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prva popravna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 2.

(a) (10 bodova) Dokažite nejednakost

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \quad \forall x > 1.$$

(b) (10 bodova) Odredite prirodnu domenu, intervale monotonosti i asimptote za funkciju

$$f(x) = (x^2-1)e^{-x^2}.$$

Rješenje.

(a) Definirajmo funkciju $f\colon [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

Uočimo da je funkcija f neprekidna i da vrijedi $f(1) = 0$. Kako je $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$, za $\forall x > 1$, to je onda funkcija f strogo rastuća na $[1, +\infty\rangle$, pa vrijedi da je $f(x) > f(1)$, za sve $x > 1$, tj. vrijedi

$$\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0, \quad \forall x > 1.$$

(b) Prirodna domena funkcije je $\mathbb{R}$.
Kako je $f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2-2)$, to su stacionarne točke $x = 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. Funkcija f' je pozitivna na intervalima $\langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle$ i $\langle 0, \sqrt{2}\rangle$ i negativna na intervalima $\langle -\sqrt{2}, 0\rangle$ i $\langle \sqrt{2}, +\infty\rangle$. Iz toga zaključujemo da je funkcija f strogo rastuća na intervalima $\langle -\infty, -\sqrt{2}]$ i $[0, \sqrt{2}]$, dok je strogo padajuća na intervalima $[-\sqrt{2}, 0]$ i $[\sqrt{2}, +\infty\rangle$.
Funkcija nema vertikalnih asimptota. Kako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prva popravna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 3.

(a) (10 bodova) Odredite integral

$$\int \frac{2\cos x}{-12\sin x + 11 - \cos 2x}\, dx.$$

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}}.$$

(c) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana s

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$$

Izračunajte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x^{-1}e^x}{x^{-2}e^x}.$$

Rješenje.

(a) Koristeći osnovne trigonometrijske formule, vidimo da je

$$\frac{2\cos x}{-12\sin x + 11 - \cos 2x} = \frac{2\cos x}{-12\sin x + 12 - 2\cos^2 x} = \frac{\cos x}{-6\sin x + 5 + \sin^2 x}.$$

Ako uvedemo supstituciju $t = \sin x$, dobivamo da je zadani integral jednak

$$\int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} = \int \frac{dt}{(t-1)(t-5)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \ln\left|\frac{t-5}{t-1}\right|^{1/4} + C,$$

za proizvoljnu konstantu $C \in \mathbb{R}$. Dakle, traženi je integral jednak

$$\ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right|^{1/4} + C.$$

(b) Pokazat ćemo da dani nepravi integral konvergira i to tako što ćemo pokazati da konvergiraju i nepravi integrali

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}} \quad \text{i} \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}}.$$

Uočimo najprije da je

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}.$$

Ako pokažemo da integral s desne strane konvergira, po usporednom kriteriju isto će vrijediti i za integral s lijeve strane. Budući da je

$$\lim_{x\to1+} \frac{(x-1)^{1/2}}{\sqrt{\ln x}} = 1,$$

slijedi da integral $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ konvergira ako i samo ako konvergira i

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}},$$

a budući da je $\frac{1}{2} < 1$, po zadatku s vježbi integral s desne strane konvergira.
Preostaje za dokazati konvergenciju integrala

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}}.$$

Uočimo da je

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)\ln x}} \leq \frac{1}{\ln 2}\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)}} = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

a pa ponovno možemo koristiti isti zadatak s vježbi, te potom usporedni kriterij da bi došli do tražene konvergencije.

(c) Uočimo da je

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\,dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} - 4e + \int_1^x \frac{6e^t}{t^4}\,dt,$$

pri čemu smo u svakoj jednakosti iskoristili parcijalnu integraciju. Zaključujemo da je

$$\frac{f(x) - x^{-1}e^x}{x^{-2}e^x} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{4x^2 e}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}\int_1^x \frac{6e^t}{t^4}\,dt.$$

Tvrdimo da je limes iz zadatka jednak 1. Očito je da kada pustimo $x \to +\infty$, drugi i treći pribrojnik s desne strane prethodne nejednakosti teže u 0. Dokažimo da je i

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}\int_1^x \frac{6e^t}{t^4}\,dt = 0.$$

Promatrajući prvu derivaciju funkcije $t \mapsto \frac{6e^t}{t^4}$, lako se vidi da je ta funkcija rastuća na $[4, +\infty\rangle$. Zato je

$$0 \leq \frac{x^2}{e^x}\int_1^x \frac{6e^t}{t^4}\,dt = \frac{x^2}{e^x}\left(\int_1^4 \frac{6e^t}{t^4}\,dt + \int_4^x \frac{6e^t}{t^4}\,dt\right) \leq \frac{Cx^2}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{e^x(x-4)}{x^4},$$

pri čemu je $C = \int_1^4 \frac{6e^t}{t^4}\,dt$ konstanta. Pustivši $x \to +\infty$, po teoremu o sendviču vidimo da je traženi limes doista jednak 0.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prva popravna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 4.

(a) (10 bodova) Odredite koeficijent uz član x^{2020} u Maclaurinovom razvoju funkcije $f(x) = \sin^2 x + \ln(1+x)^2$.

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos^2 \frac{1}{n}}{n \sin^2 \frac{3}{n}}.$$

Rješenje.

(a) Koristeći trigonometrijske formule dobivamo alternativni zapis

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} + 2\ln(1+x).$$

Budući da je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

i

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{kadagod je } |x| < 1,$$

dobivamo da za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x| < 1$ vrijedi

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Odavde vidimo da je koeficijent uz x^{2020} jednak

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1)^{1010} \cdot \frac{2^{2020}}{2020!} + 2 \cdot (-1)^{2019} \cdot \frac{1}{2020} = -\frac{2^{2019}}{2020!} - \frac{1}{1010}.$$

(b) Neka je $x = \frac{1}{n}$. Tada je

$$\frac{1-\cos^2 \frac{1}{n}}{n \sin^2 \frac{3}{n}} = \frac{1+\cos x}{9} \frac{1-\cos x}{x^2} \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \cdot x,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos^2 \frac{1}{n}}{n \sin^2 \frac{3}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{9} \frac{1-\cos x}{x^2} \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{9}.$$

Budući da je $\frac{1}{9} \in \langle 0, \infty \rangle$ i da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, zaključujemo da divergira i početni red.