# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

**Zadatak 1.**

(a) (10 bodova) Dokažite da limes $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}}$ ne postoji te odredite (ako postoji) limes

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

(b) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana formulom

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Odredite $f^{(n)}(0)$, za svaki nenegativni cijeli broj $n$.

(c) (10 bodova) Dokažite ili opovrgnite: ako je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i surjektivna, tada postoji bar jedan $y \in \mathbb{R}$ takav da je praslika $f^{-1}(\{y\})$ konačan skup.

*Rješenje.*

(a) Znamo da je $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$. Zato je

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty.$$

S druge strane je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

(b) Primijetimo da je $f'(x) = 2xe^{x^2} = 2x \cdot f(x)$, iz čega vidimo da je, za svaki prirodni broj $n$:

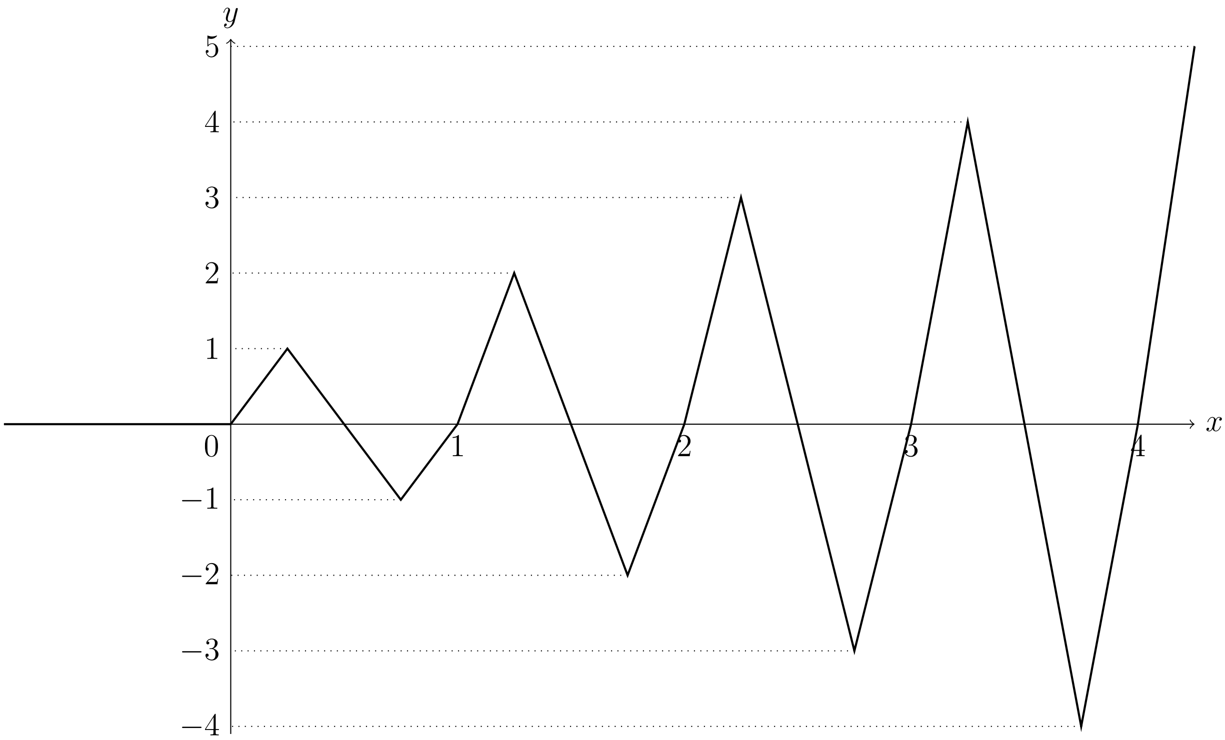
$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = 2x \cdot f^{(n)}(x) + 2n \cdot f^{(n-1)}(x).$$

Dakle, vrijedi da je $f^{(n+1)}(0) = 2n \cdot f^{(n-1)}(0)$, za svaki prirodni broj $n > 1$. Kako je $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$ te $f'(0) = 0$, zaključujemo da je $f^{(2k-1)}(0) = 0$, za svaki prirodni broj $k$ te da je

$$f^{(2k)}(0) = 2^k \cdot (2k-1)!!.$$

(c) Tvrdnja ne vrijedi. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = 0$, za svaki $x < 0$. Nadalje, na svakom segmentu $[n-1, n]$, gdje je $n$ prirodan broj neka je funkcija $f$ po dijelovima linearna i to na način da njen graf spaja redom sljedeće točke

$$(n-1, 0) \longrightarrow \left(n - \frac{3}{4}, n\right) \longrightarrow \left(n - \frac{1}{4}, -n\right) \longrightarrow (n, 0).$$




Neka je $y \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Očito je $-\lceil |y| \rceil \leq y \leq \lceil |y| \rceil$, pa je iz konstrukcije funkcije $f$ jasno da za svaki prirodan broj $n \geq \lceil |y| \rceil$ postoji neki $x \in [n-1, n]$ takav da je $f(x) = y$. Otuda slijedi da je skup $f^{-1}(\{y\})$ beskonačan.

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

**Zadatak 2.**

(a) (10 bodova) Zadana je krivulja

$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

(b) (10 bodova) Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije $f$ definirane s

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{\frac{1}{x}}\,, & x < 0 \\ \sin x\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

Je li $f$ klase $C^1(\mathbb{R})$?

*Rješenje.*

(a) Točke presjeka krivulje s koordinatnim osima su $T_1(0,2)$ i $T_2(4,0)$. Vrijedi $y' = \frac{2}{(x-2)^2}$, pa za koeficijente smjera tangenti u točkama presjeka $T_1$ i $T_2$ vrijedi $y'(0) = y'(4) = \frac{1}{2}$, iz čega zaključujemo da su tangente paralelne.

(b) Funkcija je neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nadalje, vrijedi $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, pa zaključujemo da je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Funkcija je derivabilna na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ gdje vrijedi $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Funkcija je derivabilna i na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ gdje vrijedi $f'(x) = \cos x$. Ostaje još ispitati derivabilnost u nuli. Vrijedi

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$$

i

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

pa je funkcija derivabilna u nuli i vrijedi $f'(0) = 1$. Dakle, vrijedi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,, & x < 0 \\ 1\,, & x = 0 \\ \cos x\,, & x > 0 \end{cases}$$

Kako vrijedi $\lim_{x\to 0-} f'(x) = f'(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$, to zaključujemo da je funkcija klase $C^1(\mathbb{R})$.

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

**Zadatak 3.**

(a) (10 bodova) Neka je $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = x^x$. Odreedite njene intervale monotonosti, te intervale konveksnosti i konkavnosti. Dokažite da postoji neka konstanta $C > 0$ takva da je $f(x) \geq C$ za sve $x > 0$.

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{2 + \arcsin x}{e^{(1-x)\ln x}}\, dx.$$

*Rješenje.*

(a) Uočimo najprije da je $f(x) = e^{x \ln x}$, pa je

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

Odavde vidimo da je $f' < 0$ na $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ i $f' > 0$ na $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$, pa zaključujemo da je $f$ strogo padajuća na $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ i strogo rastuća na $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$, te da u točci $\frac{1}{e}$ postiže globalni minimum. Sada je jasno da uzevši $C = f(\frac{1}{e})$ slijedi posljednja tvrdnja iz podzadatka.

Preostalo je za provjeriti konveksnost i konkavnost. Druga derivacija funkcije $f$ jednaka je

$$f''(x) = x^x \left( (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right).$$

Dakle, $f'' > 0$ na cijeloj domeni, tako da se radi o konveksnoj funkciji.

(b) Podintegralnu funkciju možemo zapisati kao

$$\frac{x^x(2 + \arcsin x)}{x},$$

pa je, koristeći (a) dio i nejednakost $\arcsin x \geq -\frac{\pi}{2}$, možemo odozdo ograničiti s

$$\frac{(2 - \frac{\pi}{2})C}{x}.$$

Budući da integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

divergira, po usporednom kriteriju zaključujemo da divergira i početni integral.

# MATEMATIČKA ANALIZA 2

Druga popravna provjera znanja – 21. rujna 2020.

**Zadatak 4.**

(a) (10 bodova) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n+2}(2n+1)!}.$$

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n}.$$

(c) (10 bodova) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Dokažite da je tada

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

*Rješenje.*

(a) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju jasno je da je $f$ dobro definirana. Uočimo da je red iz teksta zadatka jednak

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}.$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1-1)}{2(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x\cos x - \sin x}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, suma reda je

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{8}.$$

(b) Uočimo da je

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Zato postoje neki $n_0$ i $C > 0$ takvi da je

$$\sin(\sqrt{n^2+n}-n) > C \quad \text{za sve } n \geq n_0.$$

Slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n} > \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{C}{n},$$

pa zbog divergencije harmonijskog reda zaključujemo da i red iz teksta zadatka divergira po usporednom kriteriju.

(c) *Prvo rješenje.* Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\epsilon > 0$ i podniz $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da je $n_k a_{n_k} \geq \epsilon$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n_{k+1} > 2n_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ – u suprotnom jednostavno izostavimo neke članove niza $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Uočimo sada da je

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n \geq (n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}} \geq \frac{(n_{k+1}-n_k)\epsilon}{n_{k+1}} \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sumiranjem po svim $k \in \mathbb{N}$ dobivamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, što je kontradikcija.

*Drugo rješenje.* Neka je $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Budući da je taj red konvergentan, slijedi da je i niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, pa je stoga i Cauchyev. Zato možemo zaključiti da je

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{\lfloor n/2 \rfloor}) = 0.$$

S druge strane, iz činjenice da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz pozitivnih realnih brojeva, dobivamo

$$0 < na_n/2 < a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} = s_n - s_{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Puštanjem $n \to \infty$, te korištenjem teorema o sendviču slijedi tražena tvrdnja.