Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Teža varijanta

21.9.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Odredite $\epsilon > 0$ takav da je $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+\epsilon}| \leq \frac{1}{100}$ za svaki $x \in [0,1]$.

b) Odredite polinom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ takav da je $|\sqrt[3]{x} - P(x)| \leq \frac{1}{100}$ za svaki $x \in [0,1]$.

Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje.

2 Riemannov integral

a) Za proizvoljnu subdiviziju $\mathcal{S} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ segmenta $[a,b]$ definiramo sa $o(\mathcal{S}) = \max_{i=0,1,\ldots,n-1}\{x_{i+1} - x_i\}$ očicu subdivizije $\mathcal{S}$. Dokažite da za integrabilnu funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vrijedi: za svaki niz subdivizija $(\mathcal{S}_n)_n$ takvih da $\lim_n o(\mathcal{S}_n) = 0$ pripadni nizovi (gornjih i donjih) Darbouxovih suma konvergiraju integralu $\int_a^b f(t)dt$.

b) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija koja je neprekidna na intervalu $\langle a,b \rangle$. Je li $f(x)$ integralna na $[a,b]$? Obrazložite odgovor bez pozivanja na Lebesgueov teorem.

3 Redovi

a) Iskažite i precizno dokažite Abelov teorem. U dokazu naznačite gdje točno koristite teorem o produktu redova koji kaže da je produkt konvergentnih redova (od kojih je jedan apsolutno konvergentan) konvergentan sa sumom jednakom produktu suma danih redova.

b) Koristeći Abelov teorem precizno dokažite: Ako redovi $\sum a_n, \sum b_n$ i $\sum c_n$ konvergiraju k A, B i C i ako je red $\sum c_n$ jednak produktu redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$, onda je $A \cdot B = C$.

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Lakša varijanta

21.9.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Odredite $\epsilon > 0$ takav da je $|\sqrt{x+\epsilon} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{100}$ za svaki $x \in [1, 2]$. Obrazložite odgovor.

b) Iskažite Rolleov teorem. Koristeći Rolleov teorem dokažite da postoji $c \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $e - e^c = ce^c$. Obrazložite odgovor.

2 Riemannov integral

a) Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija na otvorenom intervalu I. Definirajte primitivnu funkcije funkcije $f(x)$. Ima li funkcija $g(x) = \frac{e^x}{x}$ primitivnu funkciju na intervalu $\langle 0, 1\rangle$? Iskažite teorem koji vam daje odgovor na to pitanje. Dokažite taj teorem.

b) Izračunajte koristeći samo definiciju određeni integral $\int_1^2 x^3 dx$.

3 Redovi

a) Definirajte pojam reda potencija i radijusa konvergencije reda potencija. Izračunajte radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Označimo sa

$E(x)$ sumu gornjeg reda. Dokažite da je $E(x+y) = E(x)E(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi $E(x), E(y)$ i $E(x+y)$ definirani. Koji je radijus konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$? Obrazložite odgovor.

b) Iskažite i dokažite Caucyjev kriterij za konvergenciju reda. Navedite primjer reda za koji taj kriterij ne daje odluku.

c) Definirajte pojam uniformne konvergencije niza funkcije. Definirajte niz funkcija $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira funkciji $f(x) = x$ za svaki $x \in [0, 1]$. Možete li odabrati funkcije $f_n(x)$ tako da niti jedna nije neprekidna na $[0, 1]$? Obrazložite odgovor.