MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pisana provjera znanja – zadatci – 24. lipnja 2020.

Zadatak 1.

(a) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Izračunajte $f^{(2020)}(0)$.

(b) (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^3}.$$

(c) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Dokažite tvrdnju: Ako je f konveksna i omeđena funkcija, onda je ona konstantna.

Rješenje.

(a) Uočimo da vrijedi $(1+x^2)f(x) = 1$. Sada, primijenjujući Leibnizovu formulu, dobijemo da za $n \geq 1$ vrijedi

$$(1+x^2)y = 1 \qquad \Big|^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x^2)^{(k)} y^{(n-k)} = 0.$$

Sada, za $n \geq 2$ dobijemo da vrijedi

$$(1+x^2)f^{(n)} + 2xnf^{(n-1)} + n(n-1)f^{(n-2)} = 0.$$

Uvrstimo li $x = 0$ dobijemo

$$f^{(n)}(0) = -n(n-1)f^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 2.$$

Iteriranjem ove jednakosti dobijemo da za $n = 2020$ vrijedi

$$f^{(2020)}(0) = (-1)^{1010} \cdot 2020! y^{(0)}(0) = 2020!.$$

(b) Neka je $y(x) = \sqrt[x]{x^3}$. Tada je $\ln y(x) = \frac{\ln x^3}{x}$, pa vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3}3x^2}{1} = 0,$$

iz čega dobijemo (zbog neprekidnosti) da je

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = e^{\lim_{x\to+\infty} \ln y(x)} = e^0 = 1.$$

(c) Pretpostavimo da funkcija nije konstantna, tj. da postoje $x_0, h \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $f(x_0) < f(x_0+h)$. Neka je $t \geq 1$. Tada vrijedi

$$f(x_0+h) = f(\frac{1}{t}(x_0+th) + (1-\frac{1}{t})x_0) \leq \frac{1}{t}f(x_0+th) + (1-\frac{1}{t})f(x_0),$$

pri čemu nejednakost vrijedi zbog konveksnosti funkcije f. Ako zadnju nejednakost pomnožimo s t i presložimo strane, dobijemo da vrijedi

$$t(f(x_0+h) - f(x_0)) + f(x_0) \leq f(x_0+th).$$

Pustimo li da t ide u beskonačnost u zadnjoj nejednakosti, onda lijeva strana ide u $+\infty$ (jer je u pitanju afina funkcija po t s pozitivnim nagibom), što je u suprotnosti s pretpostavkom da je funkcija f ograničena.

Dakle, f mora biti konstantna funkcija.

Zadatak 2.

(a) (10 bodova) Neka je $f(x) = ax^7 + x^4 + 2x$. Odredite ralni broj a za koji funkcija $f'(x)$ ima točno jednu realnu nultočku. Za taj broj a odredite sve realne brojeve x za koje je $f(x) > x^4 + x$.

(b) (10 bodova) Neka je a realni broj. Odredite prirodnu domenu, nultočke i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = \ln\left((x-a)^2\right).$$

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$f'(x) = 7ax^6 + 4x^3 + 2 = 7at^2 + 4t + 2 = g(t),$$

gdje je $t = x^3$. Želimo da funkcija $f'(x)$ ima jedinstvenu realnu nultočku, a to je moguće jedino ako i funkcija $g(t)$ ima jedinstvenu realnu nultočku. Funkcija $g(t)$ je polinom drugog stupnja. Polinom drugog stupnja ima jedinstvenu realnu nultočku ako i samo ako je oblika

$$c(\alpha t + \beta)^2 = c\alpha^2 t^2 + 2c\alpha\beta t + c\beta^2,$$

za neke realne brojeve c, α, β. Izjednačavanjem koeficijenata zaključujemo da je $7a = 2$, iz čega vidimo da je $a = \frac{2}{7}$.

Nadalje, vidimo da je $f(x) > x^4 + x$ ako i samo ako je $\frac{2}{7}x^7 + x > 0$, a to vrijedi ako i samo ako je $x > 0$.

(b) Prirodna domena funkcije f je skup $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Naime, mora biti $(x-a)^2 > 0$, a to vrijedi za svaki realni broj x za koji je $x - a \neq 0$.

Vrijedi da je $f(x) = 0$ ako i samo ako je $(x-a)^2 = 1$, tj. ako i samo ako je $x - a = \pm 1$, tj. nultočke funkcije f su točke $x = a + 1$ i $x = a - 1$.

Računamo $f'(x) = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{2}{x-a}$. Zaključujemo da je $f'(x) < 0$, za $x < a$ te $f'(x) > 0$, za $x > a$. Dakle, na intervalu $\langle -\infty, a\rangle$ funkcija f je padajuća, a na intervalu $\langle a, +\infty\rangle$ funkcija f je rastuća.

Zadatak 3.

(a) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int (\cos^2 x - 2\sin x - 2)\operatorname{ctg} x \, dx.$$

(b) (10 bodova) Dokažite da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx$$

konvergira i odredite njegovu vrijednost.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je $\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 1 - \sin^2 x - 2\sin x - 2 = -(\sin^2 x + 2\sin x + 1) = -(\sin x + 1)^2$. Neka je $t = \sin x$, tada je $dt = \cos x\, dx$. Računamo

$$\int \frac{(t+1)^2}{t}\, dt = \int \left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{2} + 2t + \ln|t| + C,$$

gdje je C proizvoljna realna konstanta.

Konačno je

$$\int (\cos^2 x - 2\sin x - 2) \operatorname{ctg} x\, dx \left(= -\int \frac{(t+1)^2}{t}\, dt\right) = -\left(\frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x + \ln|\sin x| + C\right).$$

(b) Primijetimo da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx.$$

Vrijedi

$$\int_0^1 \left|\frac{\ln x}{x^2+1}\right| dx \leq \int_0^1 |\ln x|\; dx = \left|\int_0^1 \ln x\, dx\right| = (x - x\ln x)|_0^1 = 1.$$

Također je

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx < \infty.$$

Dakle, zadani integral uistinu konvergira. Sada ga računamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{t}, & dx = \frac{-1}{t^2}\, dt \\ 0 \to +\infty, & +\infty \to 0 \end{bmatrix} = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \cdot \frac{-1}{t^2}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt.$$

Dakle, tražena vrijednost integrala jednaka je 0.

Zadatak 4.

(a) (10 bodova) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = 1$ funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(x)$$

te odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

(b) (10 bodova) Neka je, za svaki prirodan broj n, $a_n = \dfrac{2n-1}{4n}$, izračunajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right).$$

(c) (10 bodova) Neka je $a_n = 2^n$, za svaki cijeli broj $n \geq 0$. Odredite sve realne brojeve x za koje red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + x^{a_n}}$$

konvergira. Za sve takve x odredite sumu reda.

Rješenje.

(a) Računamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1+(x-1))^2} + \ln(1+(x-1)) = (1+(x-1))^{-2} + \ln(1+(x-1)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \end{aligned}$$

gdje je $a_0 = 1$ i

$$a_n = \binom{-2}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - n - 1 \right),$$

za sve prirodne brojeve n. Radijus konvergencije dobivenog reda je 1.

(b) Primijetimo da je

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{(2n-1)!!}{4^n n!},$$

što znači da trebamo izračunati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{4^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

(c) Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} &= \frac{2}{1-x^2}, \\ \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} &= \frac{4}{1-x^4}, \\ \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} &= \frac{8}{1-x^8}, \\ &\vdots \\ \frac{2^n}{1-x^{2^n}} + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} &= \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da za svaki prirodan broj N vrijedi da je

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{2^{N+1}}{1-x^{2^{N+1}}} - \frac{1}{1-x}.$$

Zaključujemo da dani red konvergira ako i samo ako je $|x| > 1$ i u tom slučaju je suma jednaka $\dfrac{1}{x-1}$.