Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Teža varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam konveksne funkcije. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu I. Za proizvoljne x_1 i x_2 iz I, dokažite da je funkcija $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirana formulom

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$$

konveksna.

b) Koristeći Taylorov teorem srednje vrijednosti, izračunajte $\sin(1)$ uz točnost $\epsilon = 10^{-5}$. (Ne trebate dokazivati formulu za Taylorov red funkcije $\sin x$ i možete pretpostaviti da Taylorov red konvergira funkciji $\sin x$.)

2 Riemannov integral

a) Izvedite (što detaljnije) formulu za duljinu krivulje grafa funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na segmentu $[a,b]$.

b) Definirajte nepravi integral funkcije $f : [a, +\infty >\to \mathbb{R}$,

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Konvergira li red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$? Obrazložite odgovor.

3 Redovi

a) Izračunajte Taylorov red funkcije $f(x) = arctg(x)$ oko $x = 0$. (Hint: odredite prvo Taylorov red derivacije $f'(x)$.) Koji je radijus konvergencije tog reda?

b) Dokažite da Taylorov red iz a) dijela konvergira funkciji $f(x)$ za svaki $|x| < 1$. (Hint: koristite argument iz predavanja o uniformnoj konvergenciji).

c) Koristeći tvrdnju pod b), izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Obrazložite odgovor.

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Lakša varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam derivacije funkcije u tocki. Objasnite vezu između derivacije funckije i tangente na graf funkcije. Pokažite da derivabilnost povlači neprekidnost.

b) Izvedite pravilo za derivaciju kvocijenta funkcija.

2 Riemannov integral

a) Precizno iskažite "$S - s < \epsilon$" kriterij integrabilnosti.

b) Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije. Dokažite da je i funkcija $f(x) + g(x)$ integrabilna te da vrijedi

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3 Redovi

a) Navedite sve kriterije za određivanje konvergencije reda koje smo radili. Iskažite Cauchyjev integralni kriterij. Koristeći Cauchyjev

integralni kriterij dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ konvergira.

b) Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

   (a) Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan onda njegova suma ne ovisi o redosljedu sumacije.

   (b) Leibnitzov kriterij.

c) Izračunajte Taylorov red funkcije $\frac{1}{1+x^2}$. Koji mu je radijus konvergencije?

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Teža varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam konveksne funkcije. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu I. Za proizvoljne x_1 i x_2 iz I, dokažite da je funkcija $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirana formulom

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$$

konveksna.

b) Koristeći Taylorov teorem srednje vrijednosti, izračunajte $\cos(1)$ uz točnost $\epsilon = 10^{-6}$. (Ne trebate dokazivati formulu za Taylorov red funkcije $\cos x$ i možete pretpostaviti da Taylorov red konvergira funkciji $\cos x$.)

2 Riemannov integral

a) Izvedite formulu za površinu dijela ravnine opisane u polarnim koordinatama jednadžbom $r = r(\phi)$ na segmentu $[\alpha, \beta]$.

b) Definirajte nepravi integral funkcije $f : [a, +\infty >\to \mathbb{R}$,

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Konvergira li red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{4/3}}$? Obrazložite odgovor.

3 Redovi

a) Napišite Taylorov red funkcije $f(x) = arcsin(x)$ oko $x = 0$. Koji je radijus konvergencije tog reda? Obrazložite odgovor.

b) Dokažite da Taylorov red iz a) dijela konvergira funkciji $f(x)$ za svaki $|x| < 1$. (Hint: koristite argument iz predavanja o uniformnoj konvergenciji).

c) Koristeći tvrdnju pod b), izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1},$$

gdje je $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$, (npr. $9!! = 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$). Obrazložite odgovor. (Hint:$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = exp(\sum_{k=1}^n \ln(1-\frac{1}{2k}))$.)

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Lakša varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam derivacije funkcije u tocki. Objasnite vezu između derivacije funkcije i tangente na graf funkcije - izračunajte jednadžbu pravca tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ grafa derivabilne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Navedite primjer neprekidne rastuće funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja u točki $x = 0$ nema derivaciju.

b) Izvedite pravilo za derivaciju kompozicije funkcija.

2 Riemannov integral

a) Precizno definirajte pojam Riemannovog integrala.

b) Izračunajte po definiciji određeni integral $\int_a^b x^2 dx$.

3 Redovi

a) Iskažite Cauchyjev i D'Alambertov kriterij. Koristeći jedan od ta dva kriterija pokažite da je red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergentan. Čemu je jednaka

suma tog reda? Navedite primjer reda $\sum a_n$ za koji D'Alembertov kriterij ne daje odluku, dok po Cauchyjevom kriteriju taj red konvergira.

b) Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

(a) Ako je red $\sum a_n$ (gdje je $a_n \in \mathbb{C}$) apsolutno konvergentan onda je i konvergentan.

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ konvergira.

c) Izračunajte Taylorov red funkcije $\frac{x}{1-x^2}$. Koji mu je radijus konvergencije?

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Teža varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam konveksne funkcije. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu I. Za proizvoljne x_1 i x_2 iz I, dokažite da je funkcija $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirana formulom

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$$

konveksna.

b) Koristeći Taylorov teorem srednje vrijednosti, izračunajte $\sin(1)$ uz točnost $\epsilon = 10^{-5}$. (Ne trebate dokazivati formulu za Taylorov red funkcije $\sin x$ i možete pretpostaviti da Taylorov red konvergira funkciji $\sin x$.)

2 Riemannov integral

a) Izvedite (što detaljnije) formulu za duljinu krivulje grafa funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na segmentu $[a,b]$.

b) Definirajte nepravi integral funkcije $f : [a, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$? Obrazložite odgovor.

3 Redovi

a) Izračunajte Taylorov red funkcije $f(x) = arctg(x)$ oko $x = 0$. (Hint: odredite prvo Taylorov red derivacije $f'(x)$.) Koji je radijus konvergencije tog reda?

b) Dokažite da Taylorov red iz a) dijela konvergira funkciji $f(x)$ za svaki $|x| < 1$. (Hint: koristite argument iz predavanja o uniformnoj konvergenciji).

c) Koristeći tvrdnju pod b), izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Obrazložite odgovor.

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Lakša varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam derivacije funkcije u tocki. Objasnite vezu između derivacije funkcije i tangente na graf funkcije - izračunajte jednadžbu pravca tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ grafa derivabilne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Navedite primjer neprekidne rastuće funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja u točki $x = 0$ nema derivaciju.

b) Izvedite pravilo za derivaciju kvocijenta funkcija.

2 Riemannov integral

a) Precizno iskažite "$S - s < \epsilon$" kriterij integrabilnosti.

b) Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije. Dokažite da je i funkcija $f(x) + g(x)$ integrabilna te da vrijedi

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3 Redovi

a) Iskažite Cauchyjev i D'Alambertov kriterij. Koristeći jedan od ta dva kriterija pokažite da je red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergentan. Čemu je jednaka suma tog reda? Navedite primjer reda $\sum a_n$ za koji D'Alembertov kriterij ne daje odluku, dok po Cauchyjevom kriteriju taj red konvergira.

b) Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

(a) Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan onda njegova suma ne ovisi o redosljedu sumacije.

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ konvergira.

c) Izračunajte Taylorov red funkcije $\frac{1}{1+x^2}$. Koji mu je radijus konvergencije?

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Teža varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam konveksne funkcije. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu I. Za proizvoljne x_1 i x_2 iz I, dokažite da je funkcija $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirana formulom

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$$

konveksna.

b) Koristeći Taylorov teorem srednje vrijednosti, izračunajte $\cos(1)$ uz točnost $\epsilon = 10^{-6}$. (Ne trebate dokazivati formulu za Taylorov red funkcije $\cos x$ i možete pretpostaviti da Taylorov red konvergira funkciji $\cos x$.)

2 Riemannov integral

a) Izvedite formulu za površinu dijela ravnine opisane u polarnim koordinatama jednadžbom $r = r(\phi)$ na segmentu $[\alpha, \beta]$.

b) Definirajte nepravi integral funkcije $f : [a, +\infty > \to \mathbb{R}$,

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Konvergira li red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{4/3}}$? Obrazložite odgovor.

3 Redovi

a) Napišite Taylorov red funkcije $f(x) = arcsin(x)$ oko $x = 0$. Koji je radijus konvergencije tog reda? Obrazložite odgovor.

b) Dokažite da Taylorov red iz a) dijela konvergira funkciji $f(x)$ za svaki $|x| < 1$. (Hint: koristite argument iz predavanja o uniformnoj konvergenciji).

c) Koristeći tvrdnju pod b), izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1},$$

gdje je $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$, (npr. $9!! = 9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$). Obrazložite odgovor. (Hint:$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = exp(\sum_{k=1}^n \ln(1-\frac{1}{2k}))$.)

Matematička analiza 2 - teorijski ispit
Lakša varijanta

24.6.2020.

1 Derivacije funkcija

a) Definirajte pojam derivacije funkcije u tocki. Objasnite vezu između derivacije funckije i tangente na graf funkcije. Pokažite da derivabilnost povlači neprekidnost.

b) Izvedite pravilo za derivaciju kvocijenta funkcija.

2 Riemannov integral

a) Precizno definirajte pojam Riemannovog integrala.

b) Izračunajte po definiciji određeni integral $\int_a^b x^2 dx$.

3 Redovi

a) Navedite sve kriterije za određivanje konvergencije reda koje smo radili. Iskažite Cauchyjev integralni kriterij. Koristeći Cauchyjev integralni kriterij dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ konvergira.

b) Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

(a) Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan onda njegova suma ne ovisi o redosljedu sumacije.

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ konvergira.

c) Izračunajte Taylorov red funkcije $\frac{x}{1-x^2}$. Koji mu je radijus konvergencije?