MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 27. travnja 2021.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Neka je $f(x) = (\arccos x)^2$. Odredite sve $n \in \mathbf{N}$ za koje je $f^{(n)}(0) \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

(b) (3 boda) Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konveksna i $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ rastuća konveksna funkcija. Jesu li funkcije $f \cdot g$ i $g \circ f$ također konveksne funkcije? Svoje tvrdnje dokažite (za 1 bod na zadatku možete pretpostaviti da su funkcije f i g dva puta diferencijabilne).

Rješenje.

(a) Odredimo prvu i drugu derivaciju funkcije f:

$$f'(x) = \frac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; f''(x) = \frac{2 + x \cdot \frac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2},$$

iz čega slijedi da je

$$(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x).$$

Sada korištenjem Leibnizove formule odredimo $(n-1)$-u derivaciju lijeve i desne strane ove jednakosti. Za $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x^2)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} f^{(n-k)}(x)$$

Slijedi da je

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2(n-1)xf^{(n)}(x) - (n-1)(n-2)f^{(n-1)}(x) = xf^{(n)}(x) + (n-1)f^{(n-1)}(x)$$
$$\implies (1-x^2)f'^{(n+1)}(x) - (2n-1)xf^{(n)}(x) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Prema tome, za $n \geq 2$ vrijedi da je $f^{(n+1)}(0) = (n-1)^2 f^{(n-1)}(0)$. Kako je $f'(0) = -\pi$ i $f''(0) = 2$ slijedi da je $f^{(n)}(0) \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ ako i samo ako je n neparan.

(b) Funkcija $f \cdot g$ ne mora biti nužno konveksna. Uočimo, funkcije $g(x) = x$ i $f(x) = x^2$ zadovoljavaju pretpostavke zadatka, ali funkcija $f \cdot g(x) = x^3$ nije konveksna na $\mathbf{R}$.

Funkcija $g \circ f$ je konveksna. Neka je $x, y \in \mathbf{R}$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Kako je f konveksna imamo $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, pa kako je g rastuća i konveksna, slijedi

$$g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)).$$

Uz pretpostavku da su obe funkcije dva puta diferencijabilne, imamo da je

$$(g \circ f)''(x) = g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x)) \geq 0$$

jer je $g'', f'' \geq 0$ zbog konveksnosti i $g' > 0$ jer je g rastuća. Zaključujemo da je kompozicija konveksna na $\mathbf{R}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 27. travnja 2021.

Zadatak 2. (6 bodova) Odredite sve $a, b \in \mathbf{R}$ za koje je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 \ln(\operatorname{ctg}(1-x)), & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ ax^2 + bx + 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

klase C^1 na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Rješenje. Kako je f klase C^1 na $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$, dovoljno je promotriti odgovarajuće limese slijeva i s desna u točki 1. Uočimo da primjenom L'Hôpitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(\operatorname{ctg}(1-x))}{(1-x)^{-2}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(1-x)\sin^2(1-x)}}{2(1-x)^{-3}} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)}{\sin(1-x)} \cdot \frac{(1-x)^2}{2\cos(1-x)} = 0.$$

Iz neprekidnosti funkcije g slijedi da je

$$0 = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1.$$

Nadalje kako je

$$f'(x) = \begin{cases} -2(1-x)\ln(\operatorname{ctg}(1-x)) + \frac{(1-x)^2}{\cos(1-x)\sin(1-x)}, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 2ax + b, & x > 1, \end{cases}$$

slijedi da će funkcija f biti neprekidno derivabilna u 1 ako je

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x).^1$$

Primjenom L'Hôpitalovog pravila dobivamo da je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} f'(x) &= -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(\operatorname{ctg}(1-x))}{(1-x)^{-1}} - \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^2}{\cos(1-x)\sin(1-x)} \\ &= -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(1-x)\sin^2(1-x)}}{-(1-x)^{-2}} - 0 \\ &= 2 \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)}{\sin(1-x)} \cdot \frac{1-x}{\cos(1-x)} = 0 \end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 2a + b$$

slijedi da je $a = 1$ i $b = -2$.

[1] Uočite da primjenom L'Hôpitalovog pravila egzistencija limesa $\lim_{x\to 1\pm} f'(x)$ povlači egzistenciju limesa $\lim_{x\to 1\pm} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ i ti limesi su jednaki. Stoga ovaj račun osigurava da je f i diferencijabilna.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 27. travnja 2021.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty\rangle$. Funkcija ima jedinu nultočku u točki $x = e$.

Kako je

$$f'(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3},$$

zaključujemo da je $f' < 0$ na $\langle 0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$, te $f' > 0$ na $\langle e^{\frac{3}{2}}, +\infty\rangle$, pa je f strogo padajuća na intervalu $\langle 0, e^{\frac{3}{2}}]$, a strogo rastuća na $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\rangle$. U točki $x = e^{\frac{3}{2}}$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $-\frac{1}{2e^3}$.

Kako je

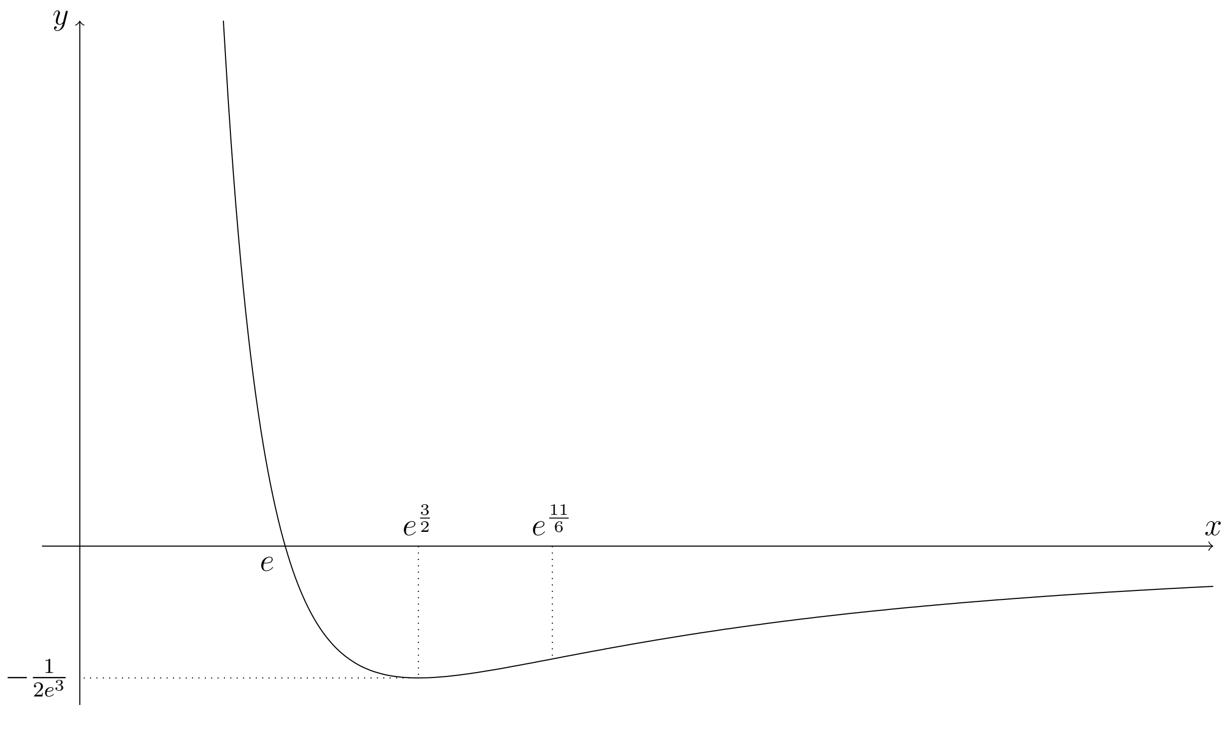
$$f''(x) = \frac{11 - 6\ln x}{x^4},$$

zaključujemo da je $f'' > 0$ na $\langle 0, e^{\frac{6}{11}}\rangle$, te $f'' < 0$ na $\langle e^{\frac{6}{11}}, +\infty\rangle$, pa je f strogo konveksna na intervalu $\langle 0, e^{\frac{11}{6}}]$, a strogo konkavna na intervalu $[e^{\frac{11}{6}}, +\infty\rangle$. Točka infleksije je $x = e^{\frac{11}{6}}$.

Vrijedi $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, pa je vertikalna asimptota zdesna $x = 0$. Primjenom L'Hôpitalovog pravila dobivamo da je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = 0,$$

iz čega zaključujemo da je desna horizontalna asimptota $y = 0$.



MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 27. travnja 2021.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ diferencijabilna funkcija. Dokažite da je

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta} = e^{xf'(x)/f(x)}.$$

(b) (3 boda) Odredite sve brojeve $n \in \mathbf{N}$ i $t \in \langle 0, +\infty\rangle$ takve da je $n < t$ i $n^t = t^n$.

Rješenje.

(a) *Prvo rješenje.* Iz neprekidnosti funkcije ln, definicije derivacije, te derivacije kompozicije dobivamo

$$\begin{aligned}\ln\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta} &= \lim_{\delta\to 0}\ln\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta}\\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln f(x+\delta x)-\ln f(x)}{\delta}\\ &= x\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln f(x+\delta x)-\ln f(x)}{\delta x}\\ &= x(\ln f)'(x)\\ &= \frac{xf'(x)}{f(x)}.\end{aligned}$$

Tražena jednakost slijedi eksponiranjem.

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta} &= \lim_{\delta\to 0}\left(1+\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{f(x)}\right)^{1/\delta}\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\left(1+\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+\delta x)-f(x)}}\right)^{\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\cdot\frac{x}{f(x)}}\\ &= e^{f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}},\end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednjem redu iskoristili da je $\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{f(x)} = 0$ i poznat limes $\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$.

Napomena. Neki studenti pokušali su riješiti zadatak korištenjem L'Hôpitalovog pravila. U takvom pristupu iznimno česta greška bila je derivacija brojnika i nazivnika kao da se radi o funkcijama varijable x, a ne δ (uočite da je u našem slučaju x konstanta, a δ je varijabla koja se mijenja pri limesiranju). Ispravno korištenje L'Hôpitalovog pravila izgledalo bi ovako:

$$\ln\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{1/\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)}{\delta} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{f(x)}{f(x+\delta x)}\cdot\frac{f'(x+\delta x)}{f(x)}\cdot x}{1} = \lim_{\delta\to 0}\frac{xf'(x+\delta x)}{f(x+\delta x)}.$$

Međutim, uočimo da nam je za zaključak da je posljednji limes jednak $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ sada potrebna i dodatna informacija da je funkcija f' neprekidna u točci x. Budući da se radi o dodatnom uvjetu na funkciju f koji nije zadan u zadatku, ovakav pristup nije donosio maksimalan broj bodova.

(b) Neka je $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbf{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

te uočimo da je

$$n^t = t^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad t\ln n = n\ln t \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(n) = f(t).$$

Budući da je

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

slijedi da je $f' > 0$ na $\langle 0, e\rangle$, te $f' < 0$ na $\langle e, +\infty\rangle$, pa je f strogo rastuća na $\langle 0, e]$, a strogo padajuća na $[e, +\infty\rangle$. Iz pretpostavke da je $n < t$ i $f(n) = f(t)$ zaključujemo da je $n \in \langle 0, e]$ i $t \in [e, +\infty\rangle$. Budući da je $n \in \mathbf{N}$ slijedi da je $n = 1$ ili $n = 2$.

Ako je $n = 1$, tada iz $n^t = t^n$ dobivamo da je $t = 1$ što nije dopušteno rješenje zbog uvjeta $n < t$.

Ako je $n = 2$, tada će $t = 4$ dati jedno rješenje koje je ujedno i jedinstveno zbog zaključka o strogoj monotonosti funkcije f na $[e, +\infty\rangle$.