MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2021.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Izračunajte integral

$$\int \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x}\, dx.$$

(b) (3 boda) Neka je $\alpha \in \langle 0, 2]$. Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{x^\alpha}\, dx.$$

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x}\, dx &= \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}\, dx \end{bmatrix} = -\int t \cos t\, dt \\
&= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t\, dt & v = \sin t \end{bmatrix} = -t \sin t + \int \sin t\, dt = \\
&= -t \sin t - \cos t + C = -\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

(b) Pogledajmo kako se podintegralna funkcija ponaša u okolini nule. Vrijedi (nakon primjene L'H pravila)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x e^{x^2}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to 0+} \frac{2 e^{x^2}}{\alpha x^{\alpha - 2}}.$$

Dakle, za $\alpha \in \langle 0, 2]$, gornji limes je konačan, pa je podintegralna funkcija omeđena (svakako je i neprekidna) na intervalu $\langle 0, 1]$, iz čega zaključujemo da traženi integral konvergira.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2021.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Dokažite da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je za sve $n \geq n_0$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} > \ln 2.4.$$

(b) (2 boda) Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ konkavna funkcija takva da je $f(0) = 1$ i $f(1) = 2$. Dokažite da je tada

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje.

(a) Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tada je

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Iz posljednje jednakosti je jasno da je $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz integralnih suma funkcije f, pa je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsh} 1 - \operatorname{Arsh} 0 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Tvrdnja zadatka slijedi iz definicije limesa i činjenice da je $\ln(1+\sqrt{2}) > \ln 2.4$.

(b) Zbog pretpostavke o konkavnosti za proizvoljan $x \in [0,1]$ imamo

$$f(x) = f((1-x)\cdot 0 + x \cdot 1) \geq (1-x)f(0) + xf(1) = x+1.$$

Iz toga slijedi da je

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Ispitajte konvergenciju redova $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$.

(b) (4 boda) U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!) \operatorname{arctg}(n)}{(n+2021)^p}.$$

Rješenje.

(a) Nužan uvjet za konvergenciju reda je da opći član niza teži u 0, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Prema tome, znamo da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $a_n < 1$ za $n \geq n_0$.

Slijedi da za $n \geq n_0$ vrijedi da je $a_n^3 \leq a_n$, pa po usporednom kriteriju konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a time i $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$) povlači konvergenciju reda $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^3$ (a time i konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$).

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ ne mora konvergirati. Na primjer, za $a_n = \frac{1}{n^2}$ vrijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira (jer je $2 > 1$), ali red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harmonijski red).

(b) Uočimo prvo da je $0 < \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2}$ te da je $(n+2021)^p > n^p$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da za $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi da je $\ln n \leq n^\varepsilon$, pa je i

$$\ln(n!) \leq \ln(n^n) \leq n \ln n \leq n^{1+\varepsilon}.$$

Time smo pokazali da je za $n \geq n_\varepsilon$

$$\frac{\ln(n!) \operatorname{arctg}(n)}{(n+2021)^p} \leq \frac{\pi}{2n^{p-1-\varepsilon}}.$$

Sada uočimo da za svaki $p > 2$ možemo odabrati dovoljno malen $\varepsilon > 0$ takav da je $p - 1 - \varepsilon > 1$. Za takav ε vrijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p-1-\varepsilon)}$ konvergira. Stoga po usporednom kriteriju konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!) \operatorname{arctg}(n)}{(n+2021)^p}. \tag{1}$$

Da bismo pokazali da red divergira za $p \leq 2$, uočimo prvo da je $\operatorname{arctg}(n) \geq \operatorname{arctg} 1$ te je $(n+2021)^p \leq (2n)^p$ za $n \geq 2021$. Nadalje,

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n) > \ln 2^n = n \ln 2$$

gdje nejednakost vrijedi za dovoljno veliki n ($n \geq 4$). Slijedi da je za $n \geq 2021$

$$\frac{\ln(n!) \operatorname{arctg}(n)}{(n+2021)^p} \geq \frac{\operatorname{arctg} 1 \ln 2}{2^p n^{p-1}}.$$

Kako za $p \leq 2$ red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p+1}$ divergira (jer je $p - 1 \leq 1$), po usporednom kriteriju slijedi da divergira i red (1).

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2021.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Razvijte u Maclaurinov red funkciju $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$ i odredite radijus konvergencije tako dobivenog reda.

(b) (4 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)4^n}.$$

Rješenje.

(a) Uočimo da rastavom na parcijalne razlomke dobijemo $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$. Kako je $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$ i $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$, $|x| < 2$, dobijemo Maclaurinov red funkcije f:

$$T[f](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad |x| < 1.$$

Definirajmo $a_n = (-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}}, n \geq 0$.
Radijus konvergencije dobivenog reda se dobije pomoću Cauchy-Hadamardove formule

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[2n-1]{1 + \frac{1}{2^{2n}}}} = 1.$$

(b) Uočimo da se tražena suma može zapisati kao

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)4^n}.$$

Za $|t| < 1$ vrijedi $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, iz čega integriranjem i dijeljenjem s t dobijemo $-\frac{\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}$. Uvrstimo li za $t = \frac{1}{4}$, dobijemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)4^n} = -4\ln\frac{3}{4}.$$

Nadalje, za $|t| < 1$ iz $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$ deriviranjem i množenjem s t^2 dobijemo $\frac{t^2}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)t^n$, iz čega dobijemo da je $\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)t^n = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)t^n = -1 + \frac{t^2}{(1-t)^2}$. Uvrstimo li za $t = \frac{1}{4}$, dobijemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} = -1 + \frac{(\frac{1}{4})^2}{(1-\frac{1}{4})^2} = -\frac{8}{9}.$$

Konačno, tražena suma iznosi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)4^n} = -4\ln\frac{3}{4} - \frac{8}{9}$.