JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 11. svibnja 2022. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Neka je $f(x) = x^2 \sin(3x+1)$. Odredite $f^{(10)}(0)$.

(b) (3 boda) Neka je $g : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathrm{Im}(g)$ definirana pravilom

$$g(x) = 1 + x + \mathrm{tg} x.$$

Odredite $(g^{-1})'(1)$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 2. (6 bodova) Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{arctg}(2x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Odredite u kojim je točkama f neprekidna. Je li f diferencijabilna u točkama neprekidnosti? Odredite sve asimptote od f.

Uputa: Možete se koristiti svim svojstvima funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ i $x \mapsto \operatorname{arctg}(2x)$ kao funkcijama na $\mathbb{R}$ (neprekidnost, diferencijabilnost itd.), to jest, ne morate to pokazivati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 4}$$

te skicirajte njen graf.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in I$ te $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

(b) (3 boda) Neka su $x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$ te $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Za koji izbor $x_1, \ldots, x_n$ vrijedi jednakost?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 11. svibnja 2022. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Neka je $f(x) = x^2 \cos(7x+1)$. Odredite $f^{(10)}(0)$.

(b) (3 boda) Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathrm{Im}(g)$ definirana pravilom

$$g(x) = 3 + 2x + \mathrm{th}x.$$

Odredite $(g^{-1})'(3)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 2. (6 bodova) Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{arcctg}(4x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Odredite u kojim je točkama f neprekidna. Je li f diferencijabilna u točkama neprekidnosti? Odredite sve asimptote od f.

Uputa: Možete se koristiti svim svojstvima funkcija $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ i $x \mapsto \operatorname{arcctg}(4x)$ kao funkcijama na $\mathbb{R}$ (neprekidnost, diferencijabilnost itd.), to jest, ne morate to pokazivati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{-4x - 12}{x^2 + 4x + 4}$$

te skicirajte njen graf.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in I$ te $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

(b) (3 boda) Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ interval te promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Je li f konveksna funkcija?