MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Neka je $f(x) = x^2 \sin(3x+1)$. Odredite $f^{(10)}(0)$.

(b) (3 boda) Neka je $g : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathrm{Im}(g)$ definirana pravilom

$$g(x) = 1 + x + \mathrm{tg} x.$$

Odredite $(g^{-1})'(1)$.

Rješenje.

(a) Koristimo Leibnitzovo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) =& \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{(k)} (\sin(3x+1))^{(10-k)} \\ =& \binom{10}{0} x^2 (\sin(3x+1))^{(10)} + \binom{10}{1} 2x (\sin(3x+1))^{(9)} + \binom{10}{2} 2 (\sin(3x+1))^{(8)}. \end{aligned}$$

Kako je $(\sin(3x+1))^{(n)} = 3^n \sin(3x+1+\frac{n\pi}{2})$ imamo

$$f^{(10)}(0) = \binom{10}{2} 2 \cdot 3^8 (\sin(3x+1+\frac{8\pi}{2})(0) = 10 \cdot 3^{10} \sin 1.$$

b) Uočimo da je $g(0) = 1$. Sada je

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^2 0}} = \frac{1}{2}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 2. (6 bodova) Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{arctg}(2x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Odredite u kojim je točkama f neprekidna. Je li f diferencijabilna u točkama neprekidnosti? Odredite sve asimptote od f.
Uputa: Možete se koristiti svim svojstvima funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ i $x \mapsto \operatorname{arctg}(2x)$ kao funkcijama na $\mathbb{R}$ (neprekidnost, diferencijabilnost itd.), to jest, ne morate to pokazivati.

Rješenje. Pokažimo da je 0 jedina točka neprekidnosti. Fundamentalna je činjenica da jednadžba

$$\operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(2x) \tag{1}$$

ima jedino rješenje $x = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ neprekidna na $\mathbb{R}$, postoji $\delta_1 > 0$ takav da

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x - 0| < \delta_1 \Rightarrow |\operatorname{arctg}(x) - 0| < \varepsilon). \tag{2}$$

Slično, kako je $x \mapsto \operatorname{arctg}(2x)$ neprekidna na $\mathbb{R}$, postoji $\delta_2 > 0$ takav da

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x - 0| < \delta_2 \Rightarrow |\operatorname{arctg}(2x) - 0| < \varepsilon). \tag{3}$$

Uzmimo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ te neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - 0| < \delta$. Imamo dva slučaja.

- Ako je $x \in \mathbb{Q}$, tada je $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$. Kako je $|x| < \delta \leq \delta_1$ po (2) imamo da $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.
- Ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tada je $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$. Kako je $|x| < \delta \leq \delta_2$ po (3) imamo da $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Dakle, pronašli smo δ za dani ε, pa je prema Cauchyjevoj definiciji funkcija f neprekidna u 0.

Neka je sada $c \neq 0$. Uzmimo dva niza $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ i $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji oba konvergiraju prema c. To je svakako moguće, (x_n) postoji zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, a (y_n) postoji jer iracionalnih brojeva ima *puno više* nego racionalnih. (Napomena: Nije potrebna argumentacija zašto ovi nizovi postoje). Sada je

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \operatorname{arctg}(x_n) = \operatorname{arctg}(c)$$

zbog neprekindosti od $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ na $\mathbb{R}$. Slično,

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n \operatorname{arctg}(2 \cdot y_n) = \operatorname{arctg}(2c).$$

Prema (1) znamo kako su ova dve dvije vrijednosti različite. Stoga, vidimo da definicija neprekidnosti funkcije u točki c je opovrgnuta. Dakle, u svakoj točki $c \neq 0$ funckija f ima prekid. Pokažimo da funckija f nije diferencijabilna u 0. Zaista, slično kao i ranije uzmemo $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ i $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji oba konvergiraju prema 0. Vrijedi

$$\lim_n \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = (\operatorname{arctg}(x))' \Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

gdje prva jednakost vrijedi jer je $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ diferencijabilna u 0. Slično, imamo da

$$\lim_n \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = (\operatorname{arctg}(2x))' \Big|_{x=0} = \left(\frac{2}{1+(2x)^2}\right)\Big|_{x=0} = 2.$$

Kako smo pronašli dva niza koji daju različite limese, funkcija f po definiciji nije diferencijabilna u 0.

Konačno, odredimo sve asimptote. Kako je f ograničena funkcija, ne postoje vertikalne asimptote. Znamo da je pravac $y = -\pi/2$ lijeva horizontalna asimptota od $\operatorname{arctg}(\cdot)$ i $\operatorname{arctg}(2\cdot)$. Stoga, za dani $\varepsilon > 0$ vrijedi da postoje $M_1 > 0$ i $M_2 > 0$ takvi da

$$x < -M_i \Rightarrow \left| f(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Stoga, ako umemo $M := \max\{M_1, M_2\}$, vidimo da vrijedi

$$x < -M \Rightarrow \left| f(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| < \varepsilon$$

pa je prema definiciji horizontalne asimptote pravac $y = -\pi/2$ lijeva horizontalna asimptota. Kako je f neparna funkcija, automatski dobivamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

pa u konačnici zaključujemo da je $y = -\pi/2$ lijeva horizontalna asimptota, a $y = \pi/2$ desna horizontalna asimptota of f.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 4}$$

te skicirajte njen graf.

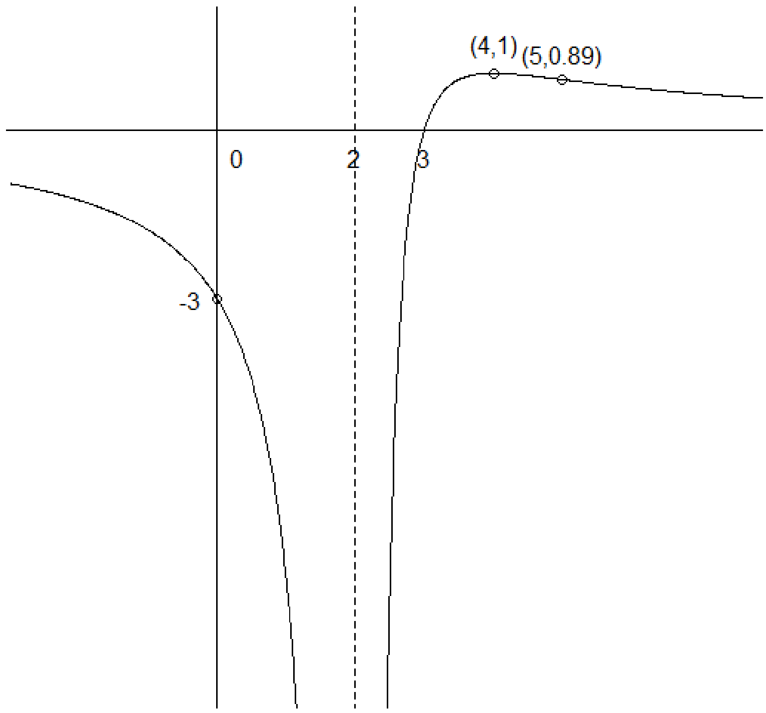
Rješenje. Domena funkcije je $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, a nultočka je $x = 3$. Uočimo da se funkcija može zapisati kao

$$f(x) = \frac{4x - 12}{(x-2)^2},$$

iz čega dobijemo

$$f'(x) = -4\frac{x-4}{(x-2)^3} \quad \text{i} \quad f''(x) = 8\frac{x-5}{(x-2)^4},$$

pa zaključujemo da funkcija raste na intervalu $\langle 2, 4]$, i pada na intervalima $\langle -\infty, 2\rangle$ i $[4, \infty\rangle$, te ima lokalni maksimum u točki $x = 4$ koji iznosi $f(4) = 1$. Također, funkcija je konkavna na intervalima $\langle -\infty, 2\rangle$ i $\langle 2, 5]$ i konvekna na intervalu $[5, \infty\rangle$, te ima jednu točku inflekcije $x = 5$, za koju je $f(5) = \frac{8}{9}$. Kako je $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = -\infty$, to je onda $x = 2$ vertikalna asimptota funkcije. Također $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pa je $y = 0$ horizontalna asimptota.



MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in I$ te $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

(b) (3 boda) Neka su $x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$ te $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Za koji izbor $x_1, \ldots, x_n$ vrijedi jednakost?

Rješenje.

(a) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Baza: Za $n = 1$ tvrdnja trivijalno slijedi. Korak: Neka tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ te pokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Pretpostavimo kako je $\alpha_{n+1} < 1$, inače tvrdnja trivijalno slijedi. Računamo lijevu stranu

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left((1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

gdje smo za dobivanje nejednakosti koristili definiciju konveksnosti. Sada, kako je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1}$, možemo iskoristiti prepostavku indukcije, pa imamo

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_i),$$

pa vratimo to u prethodnu nejednakost da dobijemo

$$(1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leq (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

što je upravo desna strana. Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n+1$, pa prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) Neka je $I = (0, \infty)$ te promtrimo funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ definiranu s pravilom pridruživanja $f(x) = -\ln(x)$. Vrijedi da je

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

pa vidimo da je f konveksna funckija prema karakterizaciji konveksnosti pomoću druge derivacije. Prema (a) dijelu, imamo da

$$-\ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq -\alpha_1 \ln(x_1) - \cdots - \alpha_n \ln(x_n),$$

što je ekvivalentno s

$$e^{\ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)} \geq e^{\alpha_1 \ln(x_1) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n)} = e^{\alpha_1 \ln(x_1)} \ldots e^{\alpha_n \ln(x_n)},$$

odnosno

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Time smo pokazali traženu nejednakost. Primjetimo dodatno kako je f strogo konveksna funkcija (jer je druga derivacija strogo veća od nule). Dakle, jednakost može vrijediti ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. U suprotnom, kada bi postojali $x_i \neq x_j$, mogli bismo uzeti $\alpha_i = \alpha_j = 1/2$ (a ostali $\alpha_k = 0$), pa bismo zbog stroge konveksnosti imali

$$f(\alpha_i x_i + \alpha_j x_j) < \alpha_i f(x_i) + \alpha_j f(x_j),$$

stoga bi nas isti račun doveo do stroge nejednakosti. Dakle, nužno je da svi x_i budu jednaki (trivijalno jest da je to i dovoljan uvjet).

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 1.

(a) (3 boda) Neka je $f(x) = x^2 \cos(7x+1)$. Odredite $f^{(10)}(0)$.

(b) (3 boda) Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathrm{Im}(g)$ definirana pravilom

$$g(x) = 3 + 2x + \mathrm{th} x.$$

Odredite $(g^{-1})'(3)$.

Rješenje.

(a) Koristimo Leibnitzovo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{(k)} (\cos(7x+1))^{(10-k)} \\ &= \binom{10}{0} x^2 (\cos(7x+1))^{(10)} + \binom{10}{1} 2x (\cos(7x+1))^{(9)} + \binom{10}{2} 2(\cos(7x+1))^{(8)}. \end{aligned}$$

Kako je $(\cos(7x+1))^{(n)} = 7^n \cos(7x + 1 + \frac{n\pi}{2})$ imamo

$$f^{(10)}(0) = \binom{10}{2} 2 \cdot 7^8 (\cos(7x+1+\frac{8\pi}{2})(0) = 90 \cdot 7^8 \cos 1.$$

b) Uočimo da je $g(0) = 3$. Sada je

$$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 0}} = \frac{1}{3}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 2. (6 bodova) Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{arcctg}(4x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Odredite u kojim je točkama f neprekidna. Je li f diferencijabilna u točkama neprekidnosti? Odredite sve asimptote od f.

Uputa: Možete se koristiti svim svojstvima funkcija $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ i $x \mapsto \operatorname{arcctg}(4x)$ kao funkcijama na $\mathbb{R}$ (neprekidnost, diferencijabilnost itd.), to jest, ne morate to pokazivati.

Rješenje. Pokažimo da je 0 jedina točka neprekidnosti. Fundamentalna je činjenica da jednadžba

$$\operatorname{arcctg}(x) = \operatorname{arcctg}(4x) \tag{4}$$

ima jedino rješenje $x = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ neprekidna na $\mathbb{R}$, postoji $\delta_1 > 0$ takav da

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x - 0| < \delta_1 \Rightarrow |\operatorname{arcctg}(x) - 0| < \varepsilon). \tag{5}$$

Slično, kako je $x \mapsto \operatorname{arcctg}(4x)$ neprekidna na $\mathbb{R}$, postoji $\delta_2 > 0$ takav da

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x - 0| < \delta_2 \Rightarrow |\operatorname{arcctg}(4x) - 0| < \varepsilon). \tag{6}$$

Uzmimo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ te neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - 0| < \delta$. Imamo dva slučaja.

- Ako je $x \in \mathbb{Q}$, tada je $f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$. Kako je $|x| < \delta \le \delta_1$ po (5) imamo da $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.
- Ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tada je $f(x) = \operatorname{arcctg}(4x)$. Kako je $|x| < \delta \le \delta_2$ po (6) imamo da $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Dakle, pronašli smo δ za dani ε, pa je prema Cauchyjevoj definiciji funkcija f neprekidna u 0.

Neka je sada $c \neq 0$. Uzmimo dva niza $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ i $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji oba konvergiraju prema c. To je svakako moguće, (x_n) postoji zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, a (y_n) postoji jer iracionalnih brojeva ima *puno više* nego racionalnih. (Napomena: Nije potrebna argumentacija zašto ovi nizovi postoje). Sada je

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \operatorname{arcctg}(x_n) = \operatorname{arcctg}(c)$$

zbog neprekindosti od $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ na $\mathbb{R}$. Slično,

$$\lim_n f(y_n) = \lim_n \operatorname{arcctg}(4 \cdot y_n) = \operatorname{arcctg}(4c).$$

Prema (4) znamo kako su ova dve dvije vrijednosti različite. Stoga, vidimo da definicija neprekidnosti funkcije u točki c je opovrgnuta. Dakle, u svakoj točki $c \neq 0$ funckija f ima prekid. Pokažimo da funckija f nije diferencijabilna u 0. Zaista, slično kao i ranije uzmemo $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ i $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji oba konvergiraju prema 0. Vrijedi

$$\lim_n \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = (\operatorname{arcctg}(x))' \Big|_{x=0} = \left(-\frac{1}{1 + x^2} \right) \Big|_{x=0} = -1$$

gdje prva jednakost vrijedi jer je $x \mapsto \operatorname{arcctg}(x)$ diferencijabilna u 0. Slično, imamo da

$$\lim_n \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = (\operatorname{arcctg}(4x))' \Big|_{x=0} = \left(-\frac{4}{1 + (4x)^2} \right) \Big|_{x=0} = -4.$$

Kako smo pronašli dva niza koji daju različite limese, funkcija f po definiciji nije diferencijabilna u 0.

Konačno, odredimo sve asimptote. Kako je f ograničena funkcija, ne postoje vertikalne asimptote. Znamo da je pravac $y = \pi$ lijeva horizontalna asimptota od $\operatorname{arcctg}(\cdot)$ i $\operatorname{arcctg}(4\cdot)$. Stoga, za dani $\varepsilon > 0$ vrijedi da postoje $M_1 > 0$ i $M_2 > 0$ takvi da

$$x < -M_i \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Stoga, ako umemo $M := \max\{M_1, M_2\}$, vidimo da vrijedi

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

pa je prema definiciji horizontalne asimptote pravac $y = \pi$ lijeva horizontalna asimptota. Slično se pokaže da je pravac $y = 0$ desna horizontalna asimptota. Stoga, u konačnici zaključujemo da je $y = \pi$ lijeva horizontalna asimptota, a $y = 0$ desna horizontalna asimptota of f.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{-4x - 12}{x^2 + 4x + 4}$$

te skicirajte njen graf.

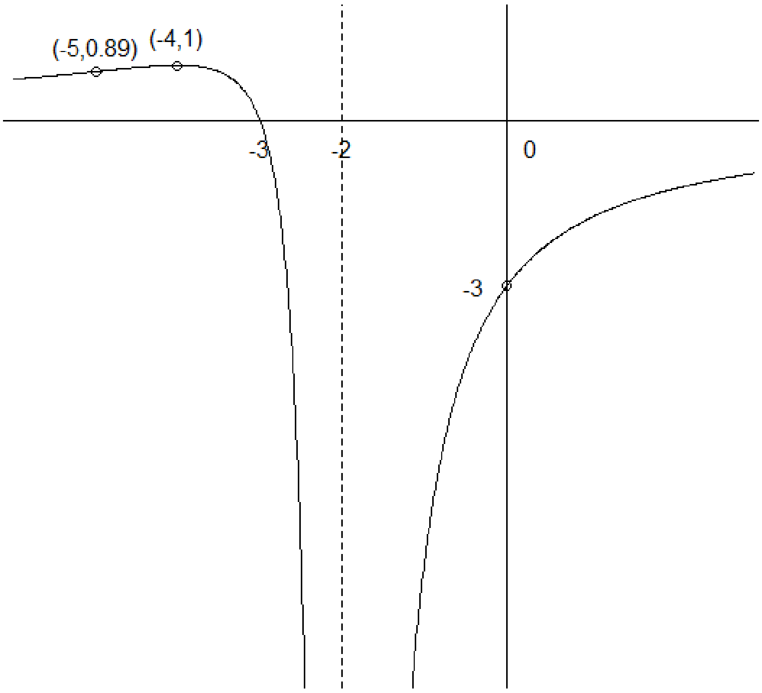
Rješenje. Domena funkcije je $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, a nultočka je $x = -3$. Uočimo da se funkcija može zapisati kao

$$f(x) = \frac{-4x - 12}{(x+2)^2},$$

iz čega dobijemo

$$f'(x) = 4\frac{x+4}{(x+2)^3} \quad \text{i} \quad f''(x) = -8\frac{x+5}{(x+2)^4},$$

pa zaključujemo da funkcija pada na intervalu $[-4, -2\rangle$, i raste na intervalima $\langle -\infty, -4\rangle$ i $\langle -2, \infty\rangle$, te ima lokalni maksimum u točki $x = -4$ koji iznosi $f(-4) = 1$. Također, funkcija je konkavna na intervalima $[-5, -2\rangle$ i $\langle -2, \infty\rangle$ i konvekna na intervalu $\langle -\infty, -5]$, te ima jednu točku inflekcije $x = -5$, za koju je $f(-5) = \frac{8}{9}$. Kako je $\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2+} f(x) = -\infty$, to je onda $x = -2$ vertikalna asimptota funkcije. Također $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pa je $y = 0$ horizontalna asimptota.



MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 04. svibnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te $f : I \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Neka su $x_1, \dots, x_n \in I$ te $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ takvi da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pokažite da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

(b) (3 boda) Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ interval te promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Je li f konveksna funkcija?

Rješenje.

(a) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Baza: Za $n = 1$ tvrdnja trivijalno slijedi. Korak: Neka tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ te pokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Pretpostavimo kako je $\alpha_{n+1} < 1$, inače tvrdnja trivijalno slijedi. Računamo lijevu stranu

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left((1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\geq (1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

gdje smo za dobivanje nejednakosti koristili definiciju konkavnosti. Sada, kako je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1}$, možemo iskoristiti prepostavku indukcije, pa imamo

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_i),$$

pa vratimo to u prethodnu nejednakost da dobijemo

$$(1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \geq (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

što je upravo desna strana. Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n+1$, pa prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) Primjetimo kako konveksnost ne možemo provjeravati predznakom druge derivacije jer f nije diferencijabilna funckija. Stoga, provjerimo konveksnost po definiiji.

Neka je A određen s $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a \leq b$. Primjetimo da funkcija f mjeri udaljenost od skupa A. Stoga, možemo ju zapisati kao

$$f(x) = \max\{\max\{a - x, 0\}, \max\{x - b, 0\}\}.$$

Očito su $x \mapsto 0, x \mapsto a - x$ i $x \mapsto x - b$ konveksne funkcije. Isto tako, iz definicije konveksnosti se može lako pokazati da je i maksimum dviju konveksnih funkcija opet konveksna funkcija. Stoga je i f konveksna funkcija.