MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 1. (5 bodova) Izračunajte

$$\int \frac{2x^2+5x+7}{(x^2+2x+5)(x+1)}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{2x^2+5x+7}{(x^2+2x+5)(x+1)}dx = \int \Big(\frac{x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x+1}\Big)dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+4}dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d((x+1)^2+4)}{(x+1)^2+4} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + \ln|x+1| + c$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 2.

a) (3 boda) Ako konvergira, izračunajte integral $\int_0^{+\infty}(4x+8)e^{-2x}dx$.

b) (4 boda) Odredite površinu skupa omeđenog s x osi, pravcem $y=x$, te grafom funkcije $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, gdje je $x\in[1,2]$.

Rješenje.

a)

$$\int_0^{+\infty}(4x+8)e^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t(4x+8)e^{-2x}dx = \begin{bmatrix} u=4x+8 & dv=e^{-2x}dx \\ du=4dx & v=\frac{-1}{2}e^{-2x}\end{bmatrix}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{2}e^{-2x}(4x+8)|_0^t - \int_0^t \frac{-1}{2}e^{-2x}4dx]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{2}e^{-2t}(4t+8)+4-e^{-2x}|_0^t\ ]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{2}e^{-2t}(4t+8)+4-(e^{-2t}-1)]$$
$$=4+1=5$$

b)

$$P=\int_0^1 xdx+\int_1^2\sqrt{2x-x^2}dx=\frac{1}{2}+\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx=[t=x-1]=\frac{1}{2}+\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$$
$$=[t=\sin v]=\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 v dv=\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2v}{2}dv=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2v|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}.$$

(b) (3 boda) Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva za koji vrijedi $1\leq a_n\leq 2$, za svaki $n\in\mathbb{N}$. U ovisnosti o parametru $\alpha>-1$ ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n\ln^{\alpha+1}n}.$$

Rješenje.

(a) Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1,$$

to onda po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da red apsolutno konvergira, pa i konvergira.

(b) Uočimo da vrijedi

$$\frac{1}{n\ln^{\alpha+1}n}\leq\frac{a_n}{n\ln^{\alpha+1}n}\leq\frac{2}{n\ln^{\alpha+1}n},$$

za svaki $n\in\mathbb{N}$. Dakle, zadani red će konvergirati akko konvergira red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha+1}n}$.

Neka je $f\colon[2,\infty\rangle\to[0,\infty\rangle$ funkcija definirana s $f(x)=\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}$. Funkcija f je neprekidna i kako vrijedi

$$f'(x)=-\frac{\ln^{\alpha+1}x+(\alpha+1)\ln^{\alpha}x}{x^2\ln^{2\alpha+2}x}<0,$$

onda je i padajuća, pa prema integralnom kriteriju red $\sum_{n=2}^{\infty}f(n)$ konvergira akko konvergira nepravi integral $\int_2^{\infty}f(x)dx$.

Kako vrijedi

$$\int_2^{\infty}f(x)dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}dt,$$

to onda zaključujemo da nepravi integral konvergira za $\alpha+1>1$, odnosno za $\alpha>0$, a divergira za $0<\alpha+1\leq 1$, odnosno za $-1<\alpha\leq 0$. Iz svega navedenog zaključujemo da polazni red konvergira za $\alpha>0$, a divergira za $-1<\alpha\leq 0$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = 3$ funkciju

$$f(x) = \frac{2x-6}{(5-2x)^2} + \ln(2x-5)$$

te odredite otvoreni interval na kojem taj red konvergira.

(b) (3 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{2^{(3n+3)/2}(n+1)!}.$$

Rješenje.

(a) Uvođenjem zamjene $y = x - 3$ dobivamo

$$\frac{2x-6}{(5-2x)^2} + \ln(2x-5) = \frac{2y}{(2y+1)^2} + \ln(2y+1),$$

pa se problem svodi na računanje Maclaurinovog reda gornje funkcije te razvijamo red posebno za svaki od dva pribrojnika. Rastavljanjem na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{2y}{(2y+1)^2} = \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{(2y+1)^2}.$$

Vrijedi

$$\frac{1}{2y+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n y^n$$

gdje potonji red konvergira za $|2y| < 1$, odnosno $|y| < 1/2$. S druge pak strane, vrijedi

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right) = -\frac{2}{(2y+1)^2},$$

pa deriviranjem gornjeg reda član po član dobivamo

$$-\frac{1}{(2y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n n y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n(n+1)y^n$$

koji prema teoremu s vježbi konvergira za $|y| < 1/2$. U konačnici

$$\frac{1}{2y+1} - \frac{1}{(2y+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n y^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n(n+1)y^n.$$

Za $\ln(2y+1)$, uočimo da vrijedi

$$\frac{d}{dy}\left(\ln(2y+1)\right) = \frac{2}{1+2y} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1} y^n$$

koji konvergira za $|y| < 1/2$, pa integracijom član po član dobivamo

$$\ln(2y+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1} y^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n} y^n.$$

Dakle, ako sada spojimo prethodno izračunate redove te vratimo supstituciju, vrijedi da je Taylorov razvoj funcije f oko točke $c = 3$ jednak

$$\begin{aligned} T[f,3](x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n (x-3)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} 2^n (n+1)(x-3)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}(x-3)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n, \end{aligned}$$

gdje je

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ (-2)^n + (-1)^{n+1} 2^n (n+1) + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

te on konvergira za $|x-3| < 1/2$.

(b) Vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{2^{\frac{3n+3}{2}}(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+\frac{n}{2}} n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

pa uočavamo da je posljednji red jednak

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} - 1$$

zbog

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} x^n, |x| < 1.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 1. (5 bodova) Izračunajte

$$\int \frac{2x^2+9x+19}{(x^2+4x+13)(x+2)}dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2+9x+19}{(x^2+4x+13)(x+2)}dx = \int \left(\frac{x+3}{x^2+4x+13} + \frac{1}{x+2}\right)dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2+9}dx + \int \frac{dx}{x+2} \\
&= \int \frac{x+2}{(x+2)^2+9}dx + \int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx + \int \frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d((x+2)^2+9)}{(x+2)^2+9} + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9} + \int \frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+9) + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3} + \ln|x+2| + c
\end{aligned}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 2.

a) (3 boda) Ako konvergira, izračunajte integral $\int_0^{+\infty}(9x+9)e^{-3x}dx$.

b) (4 boda) Odredite površinu skupa omeđenog s x osi, pravcem $y = x - 1$, te grafom funkcije $f(x) = \sqrt{-3+4x-x^2}$, gdje je $x \in [2,3]$.

Rješenje.

a)

$$\int_0^{+\infty}(9x+9)e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t (9x+9)e^{-3x}dx = \begin{bmatrix} u = 9x+9 & dv = e^{-3x}dx \\ du = 9dx & v = \frac{-1}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{3}e^{-3x}(9x+9)|_0^t - \int_0^t \frac{-1}{3}e^{-3x}9dx]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{3}e^{-3t}(9t+9) + 3 - e^{-3x}|_0^t\ ]$$
$$= \lim_{t\to+\infty}[\frac{-1}{3}e^{-3t}(9t+9) + 3 - (e^{-3t}-1)]$$
$$= 3 + 1 = 4$$

b)

$$P = \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^3 \sqrt{-3+4x-x^2}dx = \frac{1}{2} + \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}dx = [t = x-2] = \frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$
$$= [t = \sin v] = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2v}{2}dv = 2 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2v|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{4^n}.$$

(b) (3 boda) Neka je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva za koji vrijedi $2 \leq b_n \leq 3$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. U ovisnosti o parametru $\alpha > -2$ ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n \ln^{\alpha+2} n}.$$

Rješenje.

(a) Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \frac{1}{4} < 1,$$

to onda po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da red apsolutno konvergira, pa i konvergira.

(b) Uočimo da vrijedi

$$\frac{2}{n \ln^{\alpha+2} n} \leq \frac{b_n}{n \ln^{\alpha+2} n} \leq \frac{3}{n \ln^{\alpha+2} n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, zadani red će konvergirati akko konvergira red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha+2} n}$.

Neka je $f\colon [2,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ funkcija definirana s $f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha+2} x}$. Funkcija f je neprekidna i kako vrijedi

$$f'(x) = -\frac{\ln^{\alpha+2} x + (\alpha+2) \ln^{\alpha+1} x}{x^2 \ln^{2\alpha+4} x} < 0,$$

onda je i padajuća, pa prema integralnom kriteriju red $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konvergira akko konvergira nepravi integral $\int_2^{\infty} f(x)dx$.

Kako vrijedi

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+2} x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}} dt,$$

to onda zaključujemo da nepravi integral konvergira za $\alpha+2 > 1$, odnosno za $\alpha > -1$, a divergira za $0 < \alpha+2 \leq 1$, odnosno za $-2 < \alpha \leq -1$. Iz svega navedenog zaključujemo da polazni red konvergira za $\alpha > -1$, a divergira za $-2 < \alpha \leq -1$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 29. lipnja 2022.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = -2$ funkciju

$$f(x) = \frac{2x+4}{(2x+5)^2} + \ln(2x+5)$$

te odredite otvoreni interval na kojem taj red konvergira.

(b) (3 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{2^{(3n+3)/2}(n+1)!}.$$

Rješenje.

(a) Uvođenjem zamjene $y = x + 2$ dobivamo

$$\frac{2x+2}{(2x+5)^2} + \ln(2x+5) = \frac{2y}{(2y+1)^2} + \ln(2y+1),$$

pa se problem svodi na računanje Maclaurinovog reda gornje funkcije te razvijamo red posebno za svaki od dva pribrojnika. Rastavljanjem na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{2y}{(2y+1)^2} = \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{(2y+1)^2}.$$

Vrijedi

$$\frac{1}{2y+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n y^n$$

gdje potonji red konvergira za $|2y| < 1$, odnosno $|y| < 1/2$. S druge pak strane, vrijedi

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right) = -\frac{2}{(2y+1)^2},$$

pa deriviranjem gornjeg reda član po član dobivamo

$$-\frac{1}{(2y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n n y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n(n+1)y^n$$

koji prema teoremu s vježbi konvergira za $|y| < 1/2$. U konačnici

$$\frac{1}{2y+1} - \frac{1}{(2y+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n y^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n(n+1)y^n.$$

Za $\ln(2y+1)$, uočimo da vrijedi

$$\frac{d}{dy}\left(\ln(2y+1)\right) = \frac{2}{1+2y} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1} y^n$$

koji konvergira za $|y| < 1/2$, pa integracijom član po član dobivamo

$$\ln(2y+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1} y^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n} y^n.$$

Dakle, ako sada spojimo prethodno izračunate redove te vratimo supstituciju, vrijedi da je Taylorov razvoj funcije f oko točke $c=-2$ jednak

$$\begin{aligned} T[f,3](x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x+2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n(n+1)(x+2)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}(x+2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n, \end{aligned}$$

gdje je

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \ n=0 \\ (-2)^n + (-1)^{n+1}2^n(n+1) + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n} & , \ n \geq 1 \end{cases}$$

te on konvergira za $|x+2| < 1/2$.

(b) Vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{2^{\frac{5n+5}{4}}(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+\frac{n}{4}}n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^n,$$

pa uočavamo da je posljednji red jednak

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}} - 1$$

zbog

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^n, |x| < 1.$$