1.3 Derivacije višeg reda

n-tu derivaciju funkcije f označavamo s $f^{(n)}$ ili u Leibnizovoj notaciji s $\frac{d^n y}{d x^n}$.

Zadatak 1.22 Nađite $f''(x)$ ako je

(a) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$

(b) $f(x) = e^x \cos x$

Rješenje.

(a) $f''(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$.

(b) $f''(x) = -2e^x \sin x$

△

Zadatak 1.23 Neka je

$$f(x) = x(2x-1)^{1002}(x+3)^{1003}.$$

Izračunajte $f^{(2006)}(x)$ i $f^{(2007)}(x)$.

Rješenje. Općenito, za polinom stupnja n

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
g'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots 2a_2 x + a_1 \\
g''(x) &= n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots 2 \cdot 1 a_2 x \\
&\ldots \\
g^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n \\
g^{(k)}(x) &= 0, \quad \text{za } k \geq n+1.
\end{aligned}$$

U ovom slučaju f je polinom 2006. stupnja i koeficijent uz x^{2006} je $1 \cdot 2^{1002} \cdot 1^{1003} = 2^{1002}$ pa je

$$\begin{aligned}
f^{(2006)}(x) &= 2006! \cdot 2^{1002} \\
f^{(2007)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

△

Zadatak 1.24 Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija takva da je

$$g(1) = 1,\ g'(1) = 2,\ g''(1) = -1.$$

Ako je $f(x) = x^3 g(x)$, izračunajte $f''(1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 g(x) + x^3 g'(x) \\ f''(x) &= 6xg(x) + 6x^2 g'(x) + x^3 g''(x) \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 \cdot g(1) + 6 \cdot 1^2 \cdot g'(1) + 1^3 g''(1) = 17 \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.25 Neka je $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, za $a, b \in \mathbb{R}$. Odredite $f^{(n)}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Dokazat ćemo matematičkom indukcijom da je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

baza $f'(x) = \frac{-1}{(ax+b)^2} \cdot a = \frac{(-1)^1 1! a^1}{(ax+b)^{1+1}}$.
korak Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Tada je po pretpostavci indukcije

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}\right)' = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}.$$

△

Matematičkom indukcijom se mogu pokazati i sljedeće formule:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a,\ \text{ za } a > 0 \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \\ (\operatorname{sh} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{sh} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{ch} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (\operatorname{ch} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{ch} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{sh} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n},\ \text{ za } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zadatak 1.26 Odredite $f^{(n)}(x)$ ako je

(a) $f(x) = \ln(3x+1)$

(b) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-x-2}$

Rješenje.

(a) $f'(x) = \frac{3}{3x+1}$, $f''(x) = \frac{-3^2}{(3x+1)^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^n}{(3x+1)^n}$

(b) $f(x) = \frac{2}{1-x} - 1$ pa je
$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{3\cdot 2\cdot 2}{(1-x)^4}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

(c) Rastavimo $\frac{1}{x^2-1}$ na **parcijalne razlomke** :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot (x^2-1) \\ 1 &= A(x+1) + B(x-1) \\ 0\cdot x + 1 &= (A+B)x + (A-B), \end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{aligned}$$

pa je $A = \frac{1}{2}$ i $B = \frac{-1}{2}$. Sada je

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

(d) Dijelenjem polinoma x^3+x polinomom x^2-x-2 dobijemo kvocijent $x+2$ i ostatak $4x+2$ pa je

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x-2)+4x+2}{x^2-x-2} = x+1+\frac{4x+2}{x^2-x-2}.$$

Rastavom na parcijalne razlomke dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{4x+2}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \quad / \cdot (x^2-x-2)\\ 4x+2 &= A(x+1)+B(x-1)\\ 0\cdot x+1 &= (A+B)x+(B-2A),\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}A+B &= 4\\ B-2A &= 2\end{aligned}$$

pa je $A = \frac{2}{3}$ i $B = \frac{10}{3}$.

Dakle, za $n \geq 2$ je

$$f^{(n)}(x) = \left(x+1+\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{10}{3}\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{5}{(x-2)^{n+1}}\right).$$

△

Zadatak 1.27 Odredite $f^{(2009)}$ ako je

(a) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

(b) $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$

Rješenje.

(a) $f(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1-\cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.
$f^{(2009)}(x) = \frac{1}{4}\cos\left(4x + \frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 4^{2009} = -4^{2008}\sin 4x$.

(b) $f(x) = (\sin x \sin 2x)\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(x-2x) - \cos(x+2x))\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x \sin 3x - \cos 3x \sin 3x) = \frac{1}{4}(\sin(x+3x) - \sin(x-3x)) - \frac{1}{4}\sin 6x = \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x)$
pa je
$f^{(2009)}(x) = \frac{1}{4}\left(\sin\left(4x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 4^{2009} + \sin\left(2x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 2^{2009} - \sin\left(6x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 6^{2009}\right) = \frac{1}{4}(4^{2009}\cos 4x + 2^{2009}\cos 2x - 6^{2009}\cos 6x)$.

△

Za računanje viših derivacija se ponekad koristi **Leibnizova formula**:

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

Zadatak 1.28 Odredite $f^{(n)}(x)$ za

(a) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$

(b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x}\operatorname{sh} x$

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (x^2e^{-2x})^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{-2x})^{(n-k)} \\
&= \{(x^2)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k=0,1,2\} \\
&= \binom{n}{0}(x^2)^{(0)}(e^{-2x})^{(n-0)} + \binom{n}{1}(x^2)^{(1)}(e^{-2x})^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)^{(2)}(e^{-2x})^{(n-2)} + 0 \\
&= x^2e^{-2x}\cdot(-2)^n + n\cdot 2xe^{-2x}\cdot(-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{-2x}\cdot(-2)^{n-2} \\
&= (-2)^{n-2}e^{-2x}(4x^2+4x+n(n-1))
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^2e^x\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x^2e^{2x}-x^2}{2}$ pa je za $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}(x^2e^{2x})^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)} \\
&= \{(x^2)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k=0,1,2\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2e^{2x}\cdot 2^n + n\cdot 2xe^{2x}\cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{2x}\cdot 2^{n-2}\right) \\
&= 2^{n-3}e^{2x}(8x^2+4nx+n(n-1)).
\end{aligned}$$

△

Zadatak 1.29 Odredite $f^{(100)}(0)$ za

(a) $f(x) = x^3\sin x\cos x$

(b) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Rješenje.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 \sin 2x$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}(x^3 \sin 2x)^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3)^{(k)}(\sin 2x)^{(n-k)} \\
&= \{(x^3)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k = 0,1,2,3\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^3 \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n + n\cdot 3x^2 \sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-1}\right. \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 6x \sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-2} \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 6 \sin\left(2x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-3}\right)
\end{aligned}
$$

Za $n = 100$ i $x = 0$ dobijemo

$$
f^{(100)}(0) = \frac{100(100-1)(100-2)}{3!}\cdot 6 \sin\left(0 + \frac{(100-3)\pi}{2}\right)\cdot 2^{100-3} = 100\cdot 99\cdot 98\cdot 2^{97}.
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f^{(100)}(x) &= \left((1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \text{Leibnizova formula} \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(1+x)^{(k)}((1-x)^{-1/2})^{(100-k)} \\
&= \{(1+x)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k = 0,1\} \\
&= (1+x)((1-x)^{-1/2})^{(100)} + 100((1-x)^{-1/2})^{(99)} = (*)
\end{aligned}
$$

Izračunajmo $((1-x)^{-1/2})^{(k)}$:

$$
\begin{aligned}
((1-x)^{-1/2})^{(k)} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)(-1)^k(1-x)^{-\frac{1}{2}-k} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2k-1)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1}{2}-k} = \frac{(2k-1)!!}{2^k}(1-x)^{-\frac{1}{2}-k}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
(*) = (1+x)\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-100} + 100\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-99} = \frac{197!!}{2^{100}}\frac{399-x}{\sqrt{(x-1)^{201}}}.
$$

△

Računanje derivacija višeg reda pomoću diferencijalnih jednakosti

Ponekad nije teško pronaći neku jednostavnu diferencijalnu jednakost koju funkcija zadovoljava. Zatim se na tu jednakost primijeni Leibnizov formula. Ovakav način računanja se koristi kod računanja derivacija višeg reda u nekoj unaprijed određenoj točki, npr. $f^{(n)}(0)$.

Zadatak 1.30 Neka je $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Odredite $f^{(n)}(0)$.

Rješenje. Pronađimo diferencijalnu jednakost koju zadovoljava $y(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y' &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xy \end{aligned}$$

pa je tražena diferencijalna jednakost:

$$y' + xy = 0.$$

Primijenimo Leibnizovu formulu na dobivenu diferencijalnu jednakost

$$\begin{gathered} y' + xy = 0 \qquad /^{(n-1)},\ \text{za } n \geq 1 \\ y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^{(k)} y^{(n-1-k)} = 0 \\ y^{(n)} + xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} = 0 \end{gathered}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u zadnju jednakost dobijemo rekurzivnu relaciju za $y^{(n)}(0)$:

$$y^{(n)}(0) + 0 + (n-1)y^{(n-2)}(0) = 0,$$

odakle je

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)y^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 2.$$

Imamo dva slučaja

- $n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} y^{(2k-1)} &= -(2k-2)y^{(2k-3)}(0) = (-(2k-2))(-(2k-4))y^{(2k-6)}(0) = \ldots = \\ &= (-(2k-2))(-(2k-4))\cdots(-2)\underbrace{y^{(1)}(0)}_{=y'(0)=0} = 0, \end{aligned}$$

- $n = 2k$

$$\begin{aligned} y^{(2k)} &= -(2k-1)y^{(2k-2)}(0) = (-(2k-1))(-(2k-3))y^{(2k-4)}(0) = \ldots = \\ &= (-(2k-1))(-(2k-3))\cdots(-1)\underbrace{y^{(0)}(0)}_{=y(0)=1} = (-1)^k(2k-1)!!. \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.31 Neka je $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Odredite $f^{(99)}(0)$ i $f^{(100)}(0)$.

Rješenje. Pronađimo diferencijalnu jednakost koju zadovoljava $y(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y' &= \frac{1+yx}{1-x^2} \end{aligned}$$

pa je tražena diferencijalna jednakost:

$$(1-x^2)y' = 1 + xy.$$

Primijenimo Leibnizovu formulu na dobivenu diferencijalnu jednakost, a zatim uvrstimo $x = 0$:

$$\begin{aligned} &(1-x^2)y' = 1 + xy \qquad /^{(n-1)},\ \text{za } n \geq 1 \\ &\sum_{k=0}^{(n-1)} \binom{n-1}{k} (1-x^2)^{(k)} \underbrace{(y')^{(n-1-k)}}_{=y^{(n-k)}} = \sum_{k=0}^{(n-1)} \binom{n-1}{k} (x)^{(k)} y^{(n-1-k)} \\ &(1-x^2)y^{(n)} + (n-1)(-2x)y^{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(-2)y^{(n-2)} = xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} \ /_{x=0} \\ &y^{(n)}(0) - (n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) = (n-1)y^{(n-2)}(0). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi rekurzivna relacija:

$$y^{(n)}(0) = (n-1)^2 y^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 2.$$

Računamo:

- $n = 99$

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= (99-1)^2 y^{(97)}(0) = (99-1)^2(97-1)^2 y^{(95)}(0) = \ldots = \\ &= (99-1)^2(97-1)^2 \cdots (3-1)^2 \underbrace{y^{(1)}(0)}_{=y'(0)=1} = (98!!)^2, \end{aligned}$$

- $n = 100$

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= (100-1)^2 y^{(98)}(0) = (100-1)^2(98-1)^2 y^{(96)}(0) = \ldots = \\ &= (100-1)^2(98-1)^2 \cdots (2-1)^2 \underbrace{y^{(0)}(0)}_{=y(0)=0} = 0. \end{aligned}$$

△

Zadaci za vježbu

1.32 Dokažite da funkcija $y(x) = \frac{e^{5x}+2}{e^x}$ zadovoljava jednakost:

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

1.33 (a) Odredite $f^{(8)}$ za $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

(b) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = x \ln x$.

(c) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$.

1.34 (a) Pokažite da funkcija $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + y = 0.$$

(b) Pokažite da funkcija $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - y = 0.$$

1.35 Dokažite Leibnizovu formulu. (Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.)

1.36 Neka je $f(x) = x^3 \operatorname{sh} x$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

1.37 Neka je $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

1.38 Neka je $y(x) = \arcsin x$. Odredite $y^{(n)}(0)$. (Uputa: $(1-x^2)y'' = xy'$.)

1.39 Neka je $y(x) = \cos(3 \arcsin x)$. Odredite $y^{(n)}(0)$. (Uputa: $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.)

1.40 Izračunajte $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ ako je funkcija f zadana formulom:

(a) $f(x) = (x \sin 2x)^3$

(b) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

(c) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(d) $f(x) = x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$

1.41 Neka je $f(x) = x^n$. Dokažite:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

1.42 Funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$P(x) = e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(2006)}$$

Dokažite da je P polinom, odredite mu stupanj i vodeći koeficijent.

1.43 Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku n puta derivabilnu funkciju f vrijedi jednakost

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.)