1.4 Tangenta i normala

Ako funkcija f ima derivaciju u točki x_0, onda jednadžbe tangente i normale na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ glase:

$$t \ldots\ldots\ldots y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$n \ldots\ldots\ldots y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Zadatak 1.44 Točkom $T(2, 0)$ povucite tangentu na krivulju $y = x^4$.

Rješenje. Označimo diralište s $D(x_0, y_0) = D(x_0, x_0^4)$. Tada je jednadžba tangente

$$t \ \ldots\ldots \ y - x_0^3 = 4x_0^3(x - x_0).$$

Iz uvjeta $T \in t$ slijedi

$$0 - x_0^4 = 4x_0^3(2 - x_0)$$

odakle dobijemo

$$x_0 = 0, y_0 = x_0^4 = 0$$

ili

$$x_0 = \frac{8}{3}, y_0 = x_0^4 = \left(\frac{8}{3}\right)^4.$$

Stoga imamo dvije tangente kroz točku T:

$$t_1 \ldots\ldots y = 0$$
$$t_2 \ldots\ldots y = 4\left(\frac{8}{3}\right)^4 x - 3\left(\frac{8}{3}\right)^4$$

△

Zadatak 1.45 Dokažite da se tangente na krivulju

$$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

povučene u točkama s ordinatom 1 sijeku u ishodištu.

Rješenje. Diralište je točka $D(x_0, 1)$. Iz uvjeta $D \in \Gamma_f$ slijedi

$$1 = \frac{1+3x_0^2}{3+x_0^2} \implies x_0 = -1 \text{ ili } x_0 = 1.$$

Izračunamo

$$y' = \frac{16x}{(3+x^2)^2}$$

i dobijemo jednadžbe tangenti:

$$\begin{aligned} t_1 \ldots\ldots y - 1 = y'(1)(x-1) &\implies y = x \\ t_2 \ldots\ldots y - 1 = y'(-1)(x+1) &\implies y = -x \end{aligned}$$

odakle vidimo da se t_1 i t_2 sijeku u ishodištu.

$\triangle$

Zadatak 1.46 U proizvoljnoj točki krivulje

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

povučena je tangenta. Dokažite da odsječak tangente između osi ordinata i točke dirališta ima konstantnu duljinu i odredite ju.

Rješenje. Označimo diralište s $D(x_0, y_0)$. Derivacija y' je

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

pa je jednadžba tangente

$$t \ldots\ldots y - y_0 = -\frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0}(x - x_0).$$

Tangenta siječe os ordinatu u točki $T(0, y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})$ pa odsječak tangente između osi ordinata i točke dirališta ima duljinu

$$d(D,T) = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - (y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}))^2} = |a|,$$

koja je konstantna.

$\triangle$

Zadatak 1.47 Odredite jednadžbu tangente i normale u točki $T(1,1)$ na krivulju implicitno zadanu jednadžbom

$$x^5 + y^5 - 2xy = 0.$$

Rješenje. Primijetimo da je $T \in \Gamma_f$. Implicitnim deriviranjem dobijemo derivaciju:

$$y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$$

pa je $y'(1) = \frac{2\cdot 1 - 5\cdot 1^4}{5\cdot 1^4 - 2\cdot 1} = -1$. Jednadžbe tangente i normale su

$$t \ldots\ldots y - 1 = y'(1)(x-1) \implies y = -x + 2$$

$$n \ldots\ldots y - 1 = -\frac{1}{y'(1)}(x-1) \implies y = x$$

△

Zadatak 1.48 Pod kojim se kutem sijeku tangente na kružnicu

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

povučene točkom $T(4,1)$?

Rješenje. Neka je $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kut između tangenti. Sjetimo se da je kut između pravaca s koeficijentima smjera k_1 i k_2 dan formulom

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$y' = -\frac{x+2}{y-1}$$

Neka je $D(x_0, y_0)$ diralište. Tada je jednadžba tangente u točki D:

$$t \ldots\ldots y - y_0 = -\frac{x+2}{y_0 - 1}(x - x_0).$$

Iz uvjeta $T \in t$ i $D \in \Gamma_f$ dobijemo $x_0 = \frac{2}{3}$ i $y_0 = 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{3}$. Dakle:

$$k_1 = y'(x_0) = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1} = -\frac{\frac{2}{3} + 2}{1 + \frac{4\sqrt{5}}{3} - 1} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$k_2 = y'(x_0) = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1} = -\frac{\frac{2}{3} + 2}{1 - \frac{4\sqrt{5}}{3} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

pa je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{arctg} 4\sqrt{5}.$$

△

Zadatak 1.49 Pokažite da se parabole

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x + 4 \\ y^2 &= -12x + 36 \end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

Rješenje. Kut između krivulja se definira kao kut između tangenti na te krivulje povučenim u točkama presjeka. Odredimo prvo presjek krivulja:

$$4x + 4 = -12x + 36 \implies x = 2 \implies y = \pm 2\sqrt{3}.$$

Dakle, točke presjeka su

$$T_1(2, 2\sqrt{3}) \quad \text{i} \quad T_2(2, -2\sqrt{3}).$$

Implicitnim deriviranjem dobijemo derivacije:

$$y' = \frac{2}{y} \quad \text{i} \quad y' = -\frac{6}{y}.$$

U točki T_1 vrijedi:

$$k_1 = y'(2) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad k_2 = y'(2) = -\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

pa je $k_1 \cdot k_2 = -1$ odakle zaključujemo da su tangente okomite. Analogno se izračuna za točku T_2. Dakle, parabole se sijeku pod pravim kutem.

△

Zadatak 1.50 Za koje $n \in \mathbb{N}$ krivulja $y = \operatorname{arctg}(nx)$ siječe os x pod kutem većim od $89°$?

Rješenje. Vrijedi

$$y' = \frac{n}{1 + nx^2}$$

pa je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{y'(0) - 0}{1 + y'(0) \cdot 0}\right| = \operatorname{arctg}|y'(0)| = \operatorname{arctg} n.$$

Dakle,

$$\varphi > 89° \iff \operatorname{arctg} n > 89° \iff n > \operatorname{tg} 89° \approx 57.28 \iff n \geq 58.$$

△

Zadatak 1.51 Uz koji parametar $a \in \mathbb{R}$ krivulja $y = ax^2$ dodiruje krivulju $y = \ln x$?

Rješenje. Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki. Neka je $D(x_0, y_0)$ diralište. Iz uvjeta da se D nalazi na obje krivulje dobijemo

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0^2 \\ y_0 &= \ln x_0 \end{aligned}$$

odakle je

$$ax_0^2 = \ln x_0.$$

S druge strane, jer se tangente podudaraju, specijalno koeficijenti smjera moraju biti isti pa je

$$2ax_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Iz gornje dvije jednakosti dobijemo $x_0 = \sqrt{e}$ pa je $a = \frac{\ln x_0}{x_0^2} = \frac{1}{2e}$.

△

Zadatak 1.52 Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - x = 0 \\ x^2 + y^3 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Rješenje. Odredimo presjek krivulja:

$$x^3 + y^3 - x = x^2 + y^3 + 2$$

odakle dobijemo jednadžbu

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

čije je jedno rješenje $x = 2$. Dijeljenjem te jednadžbe s $x - 2$ dobijemo jednadžbu

$$x^2 + x + 1 = 0$$

koja nema realnih rješenja. Dakle, $x = 2$ i $y = -\sqrt[3]{6}$. Implicitinin deriviranjem dobijemo

$$y' = \frac{1 - 3x^2}{3y^2} \quad \text{i} \quad y' = -\frac{2x}{3y^2}$$

pa je

$$k_1 = y'(2) = \frac{1 - 3 \cdot 2^2}{3 \cdot (-\sqrt[3]{6})^2} = -\frac{11}{3\sqrt[3]{36}}$$
$$k_2 = y'(2) = \frac{-2 \cdot 2}{3 \cdot (-\sqrt[3]{6})^2} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{36}}.$$

Odavde je

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{-\frac{11}{3\sqrt[3]{36}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{36}}}{1 + \frac{11}{3\sqrt[3]{36}} \cdot \frac{4}{3\sqrt[3]{36}}} \right| = \operatorname{arctg} \frac{21\sqrt[3]{36}}{44 + (3\sqrt[3]{36})^2}.$$

$\triangle$

Zadatak 1.53 Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$y = x^2 - 6x + 5$$
$$y = -x^2 - 4x.$$

Rješenje. Stavimo $f(x) = x^2 - 6x + 5$ i $g(x) = -x^2 - 4x$ te označimo s $D_1(c, f(c))$ i $D_2(d, g(d))$ dirališta tangenti na krivulje. Jednadžbe tangenti su

$$t_1 \ldots\ldots y = f'(c)x + f(c) - cf'(c)$$
$$t_2 \ldots\ldots y = g'(d)x + g(d) - dg'(d)$$

Tangente se moraju podudarati pa mora vrijediti:

$$f'(c) = g'(d) \quad \text{i} \quad f(x) - cf'(x) = g(d) - dg'(d)$$

pa dobijemo sustav

$$f'(c) = g'(d)$$
$$f'(c) = \frac{g(d) - f(c)}{d - c}$$

odnosno

$$2c - 6 = -2d - 4$$
$$2c - 6 = \frac{-d^2 - 4d - c^2 + 6c - 5}{d - c}.$$

Rješavanjem gornjeg sustava slijedi $d_1 = -1, c_1 = 2$ i $d_2 = 2, c_2 = -1$, odakle dobijemo tražene tangente:

$$t \ldots\ldots y = -2x + 1$$
$$t \ldots\ldots y = -8x + 4.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.54 Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu $xy = a^2$ pod pravim kutem.

1.55 Zadana je krivulja

$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

1.56 Odredite općenitu formulu za jednadžbu tangente na krivulju implicitno zadanu s

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

1.57 Odredite sve vrijednosti parametra $b \in \mathbb{R}$ za koje je pravac $y = x + b$ tangenta krivulje

$$y = \frac{x}{x+4}.$$

1.58 Na krivulji $y = \frac{1}{1+x^2}$ nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa.

1.59 Pokažite da se krivulje familija

$$\begin{aligned} y^2 &= 4a^2 - 4ax,\ a > 0 \\ y^2 &= 4b^2 + 4bx,\ b > 0 \end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

1.60 Pokažite da parabola

$$y = a(x-x_1)(x-x_2),\ a \neq 0, x_1 < x_2$$

presijeca os apscisa u dvije točke pod jednakim kutem.

1.61 Pod kojim se kutem sijeku krivulje:

(a) $y = x^2$ i $x = y^2$,

(b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$?

1.62 Uz koje uvjete na koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ je os apscisa tangenta na krivulju

$$y = ax^2 + bx + c?$$

1.63 Nađite pravac koji je tangenta na krivulju

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

u barem dvije točke.

1.64 Dana je krivulja $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

(a) Nađite jednadžbu tangente na tu krivulju u točki s apscisom $a > 0$.

(b) Što se događa s tangentom kada $a \to +\infty$?

1.65 Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$\begin{aligned} y + x^2 &= -4 \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

1.66 Odredite kut pod kojim se krivulje

$$\begin{aligned} y^2 - 3x^2 + x + 1 &= 0 \\ xy^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

sijeku u prvom kvadrantu.