1.6 Neprekidnost i derivabilnost

Neprekidnost funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ možemo karakterizirati na sljedeće načine:

- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limes u točki c i vrijedi
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$
- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limese slijeva i zdesna u točki c i vrijedi
$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Zadatak 1.77 Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1, & x \geq 0 \\ x+\lambda, & x < 0 \end{cases}$$
bude neprekidna. Je li f derivabilna na $\mathbb{R}$?

Rješenje. Računamo:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} (x+\lambda) = \lambda, \\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} (e^{-x}+1) = 2. \end{aligned}$$
Da bi f bila neprekidna, mora vrijediti
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x),$$
tj.
$$\lambda = 2 = 2,$$
odakle je $\lambda = 2$.

Računamo
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+2-2}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+1-2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-e^{-x}}{1} = -1, \end{aligned}$$
iz čega zaključujemo da
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
ne postoji pa f nije derivabilna u 0.

$\triangle$

Zadatak 1.78 Dodefinirajte funkciju f u 0 (ako je moguće) tako da dobijete neprekidnu funkciju na $\langle -1, +\infty\rangle$, ako je

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x},\ \alpha \geq 0, \qquad \text{(b)}\quad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Rješenje.

(a) Da bi f bila neprekidna, mora vrijediti:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$$

pa definiramo $f(0) := \alpha$.

(b) Računamo:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

pa vidimo da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji pa f ne može biti ni neprekidna u 0.

$\triangle$

Definicija. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je **klase** C^k na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako $f^{(k)}$ postoji na I neprekidna je na I.

Pišemo $f \in C^k(I)$.

Napomena. Vrijedi: f derivabilna u $c \implies f$ neprekidna u c

Zadatak 1.79 Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Ispitajte:

(a) neprekidnost funkcije f,

(b) diferencijabilnost funkcije f. Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

Rješenje.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}, & x < -1 \\ \operatorname{arctg} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}, & x > 1 \end{cases}.$$

(a) f je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$.

Za $x = -1$ vrijedi

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 1,$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$$

pa f ima prekid u -1.

Za $x = 1$ vrijedi

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

pa je

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \frac{\pi}{4} = f(1),$$

odakle slijedi da je f neprekidna u 1.

Dakle, f je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

(b)
- $x \in \langle -1, 1\rangle \implies f(x) = \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $x \in \langle -\infty, -1\rangle \implies f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \implies f'(x) = \frac{1}{2}$
- $x \in \langle 1, +\infty\rangle \implies f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \implies f'(x) = \frac{1}{2}$
- $x = -1 \implies$ u toj točki f nije neprekidna pa ne može biti ni derivabilna
- $x = 1$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$\implies f$ je derivabilna u 1 i $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Dakle, f je derivabilna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$ i

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < -1 \\ \frac{1}{1+x^2}, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Da bi provjerili je li $f \in C^1(\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle)$, dovoljno je provjeriti da je f' neprekidna funkcija na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$:
f' je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$.

Za $x = 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-} f'(x) &= \lim_{x\to -1-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x\to -1+} f'(x) &= \lim_{x\to -1+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pa je f' neprekidna u 1. Dakle, $f \in C^1(\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle)$.

$\triangle$

Zadatak 1.80 Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $f \in C^1(\mathbb{R})$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b, & |x| < 1 \end{cases} ?$$

Rješenje. Da bi f bila neprekidna na $\mathbb{R}$ treba vrijediti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1) &= \lim_{x\to -1+} f(x) \\ \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) &= \lim_{x\to 1+} f(x), \end{aligned}$$

odakle slijedi $a + b = 1$. f će biti derivabilna na $\mathbb{R}$ ako vrijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ \lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}, \end{aligned}$$

odakle dobijemo (koristeći uvjet $a+b=1$) da mora vrijediti $2a = -1$ i tada je $f'(-1) = 1$ i $f'(1) = -1$. Sada iz

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a &= -1 \end{aligned}$$

dobijemo $a = -\frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{2}$. Pokažimo da je $f \in C^1(\mathbb{R})$. Vrijedi:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases},$$

odakle se vidi da je f' neprekidna na $\mathbb{R}$, jer je:

$$\lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x^2} = 1,$$
$$\lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} (-x) = 1$$
$$f'(-1) = 1$$

i

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x^2} = -1,$$
$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} (-x) = -1$$
$$f'(1) = -1.$$

△

Zadatak 1.81 Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & |x| \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Rješenje. Za $x \neq 0$ je

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Još računamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

jer možemo primijeniti teorem o sendviču na

$$0 \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

kada $x \to 0$. Stoga je f derivabilna na $\mathbb{R}$ i

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \notin C^1(\mathbb{R})$, jer

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

na postoji. Npr. za $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ i $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ vrijedi

$$\lim_{k\to +\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to +\infty} y_k$$

i

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty} (-1) = -1$$
$$\lim_{k\to+\infty} f(y_k) = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1.$$

△

Zadatak 1.82 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x) = (|x(x-2)| - 3x + 6)^2.$$

Rješenje. Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}$ kao kompozicija neprekidnih funkcija. Vrijedi:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2-5x+6)^2, & x < 0 \\ (-x^2-x+6)^2, & 0 \le x \le 2 \\ (x^2-5x+6)^2, & x > 2 \end{cases}.$$

Ispitajmo derivabilnost funkcije f u točkama 0 i 2:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{(x^2-5x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{2(x^2-5x+6)(2x-5)}{1} = -60$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{(-x^2-x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2(-x^2-x+6)(-2x-1)}{1} = 12$$

$\Longrightarrow$ f nije derivabilna u 0

$$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{(-x^2-x+6)^2-0}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{2(-x^2-x+6)(-2x-1)}{1} = 0$$
$$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{(x^2-5x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2+} \frac{2(x^2-5x+6)(2x-5)}{1} = 0$$

$\Longrightarrow$ f je derivabilna u 2 i $f'(2) = 0$.

Dakle, f je derivabilna na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$.

△

Zadatak 1.83 Neka je f diferencijabilna u nekoj okolini točke c i dva puta diferencijabilna u c. Dokažite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2} = f''(c).$$

Rješenje.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)\cdot 1+f'(c-h)\cdot(-1)}{2h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)+f'(c)-f'(c-h)}{2h} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}+\frac{f'(c-h)-f'(c)}{-h}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}[f''(c)+f''(c)] = f''(c).$$

△

Zadatak 1.84 * **Riemannova funkcija** je funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\quad M(|m|,n)=1 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i da ima prekid u svakoj racionalnoj točki.

Rješenje.

(a) $c=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\quad M(|m|,n)=1 \implies f(c)=\frac{1}{n}$

Uzmimo neki $\varepsilon>0$ takav da je $\varepsilon\le\frac{1}{n}$. Tada

$$(\forall\delta>0)(\exists x_\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ |x_\delta-c|<\delta\ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0}-\underbrace{f(c)}_{\frac{1}{n}}| = \frac{1}{n}\ge\varepsilon$$

pa f ima prekid u c.

(b) $c=0$

Uzmimo neki $\varepsilon>0$ takav da je $\varepsilon\le 1$. Tada

$$(\forall\delta>0)(\exists x_\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ |x_\delta-0|<\delta\ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0}-\underbrace{f(0)}_{1}| = 1\ge\varepsilon$$

pa f ima prekid u 0.

(c) $c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon>\frac{1}{n}$. Definirajmo

$$A := \left\{\frac{m}{n}\colon 1\le n<n_0\right\}\cap\langle c-1,c+1\rangle.$$

Tada je A konačan skup, jer u intervalu $\langle c-1, c+1\rangle$ ima konačno mnogo razlomaka s nazivnikom iz skupa $\{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$. Tada je $\delta := \min\{|c-p| \colon p \in A\} > 0$ i vrijedi

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, |x-c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x-c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon$$

△

Zadatak 1.85 Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost **Dirichletove funkcije** $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje. Pokažimo da f ima prekid u svakoj točki:

(a) $c \in \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0} - \underbrace{f(c)}_{1}| = 1 \geq \varepsilon$$

(b) $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=1} - \underbrace{f(c)}_{0}| = 1 \geq \varepsilon$$

Dakle f nije nigdje neprekidna pa ne može biti ni diferencijabilna.

△

Zadatak 1.86 Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje.

- neprekidnost

  Tvrdimo da je f neprekidna samo u 0.

- $c = 0$

  Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $0 < \delta \leq \varepsilon$. Tada je

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbb{Q}, |x-0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |x - 0| < \delta \leq \varepsilon \\
x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x-0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |0 - 0| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

- $c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$

  Neka je $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |f(x_\delta) - f(c)| = |0 - c| = |c| > \frac{|c|}{2} = \varepsilon$$

- $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

  Uzmimo $\varepsilon = \frac{|c|}{4}$. Tada

$$(\forall 0 < \delta \frac{|c|}{2})(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |f(x_\delta) - f(c)| = |x_\delta - 0| = |x_\delta| \geq |c| - \underbrace{|c - x_\delta|}_{< \frac{|c|}{2}} \geq \frac{|c|}{2} > \varepsilon,$$

gdje smo iskoristili

$$|c| \leq |c - x_\delta| + |x_\delta| \implies |x_\delta| \geq |c| - |c - x_\delta|.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.87 Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna. Je li f diferencijabilna?

1.88 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 8\,, & x \leq 3 \\ x^2 - 2x + 1\,, & x > 3\,. \end{cases}$$

Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

1.89 Ispitajte neprekidnost funkcije f definirane na $[-1,+\infty\rangle$ formulom

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\,.\end{cases}$$

U kojim točkama je f derivabilna, a u kojim neprekidno derivabilna?

1.90 Neka je $f(x)=|x|^3$. Dokažite da je $f\in C^2(\mathbb{R})$, ali da $f'''(0)$ ne postoji.

1.91 Neka je $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x), & |x|\leq 1\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}x-\frac{\sqrt{3}}{4}, & |x|>1\end{cases}.$$

Ispitajte:

(a) neprekidnost funkcije f,

(b) diferencijabilnost funkcije f. Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

1.92 Zadana ja funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & a\leq x\leq b\\ 0, & \text{inače}\end{cases}.$$

Je li f derivabilna? Je li $f\in C^1(\mathbb{R})$?

1.93 Neka je

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Je li $f\in C^1(\mathbb{R})$? Je li $f\in C^2(\mathbb{R})$? (Odgovori: Da. Ne.)

1.94 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x)=||x^3+3x^2+3x+1|+|x^2+x-6||.$$

1.95 Zadana ja funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x+e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ \sin x, & x\geq 0\end{cases}.$$

Je li $f\in C^2(\mathbb{R})$?

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

Označimo:

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \textit{lijeva derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \textit{desna derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

1.96 Navedite primjer funkcije f neprekidne na $[-1,1]$ za koju vrijedi

$$f(0)=0\,,\ f'_-(0)=0 \ \text{ i } f'_+(0)=1.$$

Skicirajte njen graf i zapišite formulu.

1.97 Skicirajte primjer grafa funkcije f neprekidne na $[-2,2]$, koja zadovoljava uvjete

$$f(-2)=1\,,\ f(0)=0\,,\ f'(0)=0\,,\ f'_-(1)=-1\,,\ f'_+(1)=1 \ \text{ i } f'_-(2)=-1.$$

1.98 * Neka je f neprekidna na $\langle a,b\rangle$ te derivabilna na $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, za neki $c\in\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka postoje $\lim\limits_{x\to c-} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to c+} f'(x)$. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo dokažite tvrdnje:

1. $f'_-(c)$ postoji i vrijedi $f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c-} f'(x)\,,$
2. $f'_+(c)$ postoji i vrijedi $f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c+} f'(x)\,.$

U slučaju da još vrijedi $f'_-(c)=f'_+(c)$, postoji čak $f'(c)$ i f' je neprekidna u c, tj. funkcija f je neprekidno derivabilna u c.

1.99 Dokažite da za funkciju zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$$

ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (niti jednostrani limesi), ali f ima derivaciju u 0. Dakle, ne možemo primijeniti postupak za ispitivanje derivabilnosti iz prethodnog zadatka.

1.100 Je li f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{2}{3}}\,, & x\le 0 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}}\,, & x>0 \end{cases}$$

derivabilna u 0?

1.101 Za
$$f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$$
odredite $f'_-(1)$, ako postoji.

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

U sljedećim zadacima iskoristite sljedeće teoreme:

Teorem. (**Bolzano-Weierstrass**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada je i $f([a,b]) = [c,d]$ segment.

Teorem. (**Rolle**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a,b]$, diferencijabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$ i neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.

Teorem. (**Lagrangeov teorem srednje vrijednosti**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.102 * Neka je $f\colon [a,b] \to [a,b]$ neprekidna funkcija. Pokažite da f ima barem jednu fiksnu točku na $[a,b]$, tj. da postoji $c \in [a,b]$ takav da je $f(c) = c$.

[*Uputa*: Bolzano-Weierstrassov teorem.]

1.103 * Ako je $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, pokažite da jednadžba $f'(x) = 0$ ima tri realna rješenja i nađite intervale u kojima se nalaze.

[*Uputa*: Rolleov teorem.]

1.104 * Koristeći Rolleov teorem dokažite

Teorem. (**Cauchyev teorem srednje vrijednosti**) Neka su f i g realne funkcije koje su neprekidne na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilne na intervalu $\langle a,b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da je
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$
Specijalno, ako je $g(b) \neq g(a)$ i $g'(c) \neq 0$, tada je
$$.\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[*Uputa*: Imitirajte dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti.]

1.105 * Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n outa derivabilna funkcija takva da je $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Pokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $0 < \vartheta < 1$ takav da je

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}.$$

[*Uputa*: Iskoristite Cauchyev teorem srednje vrijednosti.]

1.106 * Koristeći Cauchyev teorem srednje vrijednosti dokažite **L'Hôpitalovo pravilo**:

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Neka su f i g realne funkcije koje su derivabilne na I takve da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to c} g(x)$, $g'(x) \neq 0$, za sve $x \in I \setminus \{c\}$ i da postoji limes $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Tada postoji $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.107 * Pokažite da je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti specijalni slučaj Cauchyevog teorema srednje vrijednosti.

1.108 * Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti dokažite sljedeće nejednakosti:

(a) $\dfrac{1}{x+1} < \ln \dfrac{1+x}{x} < \dfrac{1}{x}$, za $x > 0$

(b) $\dfrac{y-x}{5} < \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < y - x$, za $0 < x < y < 1$