1.7 Pad i rast. Ekstremi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je derivabilna u svim nerubnim točkama intervala I.

Monotonost funkcije f na intervalu I možemo karakterizirati pomoću derivacije na sljedeći način:

- f raste na $I \iff f'(x) \geq 0$, za sve nerubne točke $x \in I$
- f pada na $I \iff f'(x) \leq 0$, za sve nerubne točke $x \in I$

Definiramo skup **stacionarnih točaka** funkcije f sa

$$S := \{x \in I\colon f'(x) = 0\}.$$

Sljedeći kriterij daje karakterizaciju stroge monotonosti:

- f strogo raste na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) > 0$, za sve nerubne točke $x \in I \setminus S$
- f strogo pada na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) < 0$, za sve nerubne točke $x \in I \setminus S$

Nužan uvjet za lokalni ekstrem je dan sljedećim teoremom:

Teorem. (**Fermat**) Ako funkcija $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u $c \in \langle a, b\rangle$ i ako je derivabilna u c, onda je $f'(c) = 0$.

Zadatak 1.109 Pokažite primjerom da obrat u gornjem teoremu ne mora vrijediti.

Rješenje. Neka je $f\colon \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^3$. Funkcija f je strogo rastuća, pa niti u jednoj točci nema lokalni ekstrem. Međutim, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

△

Zadatak 1.110 Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcija:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16}$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln (1 + x^2)$

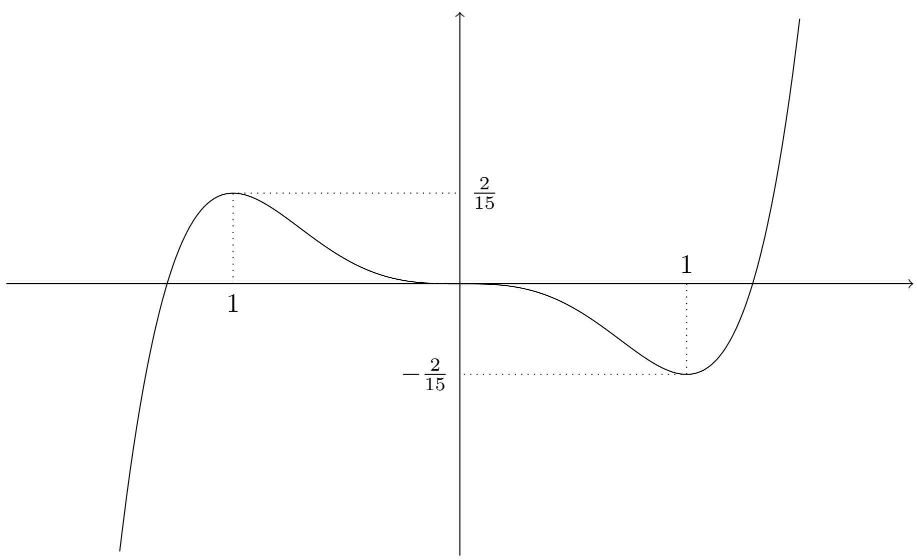
Skicirajte grafove gornjih funkcija.

Rješenje.

(a) Uočimo da je

$$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1).$$

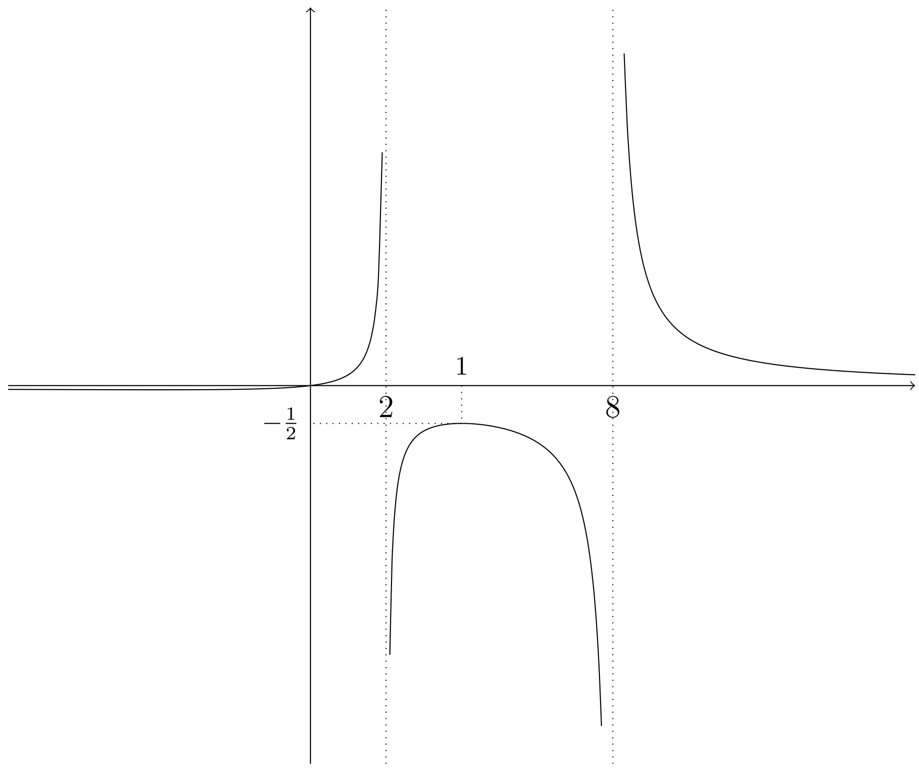
Odavde slijedi da je $f' < 0$ na $\langle -1, 1\rangle$, a $f' > 0$ na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Iz prethodne karakterizacije zaključujemo da f strogo raste na $\langle -\infty, -1]$ i $[1, +\infty\rangle$, a strogo pada na $[-1, 1]$. Napomenimo i da bi bilo pogrešno reći da f strogo raste na $\langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$ budući da je, na primjer, $f(-1) > f(1)$. Iz prethodne analize je sada očito da se u -1 postiže lokalni maksimum (i iznosi $\frac{2}{15}$), a u 1 lokalni minimum (i iznosi $-\frac{2}{15}$).



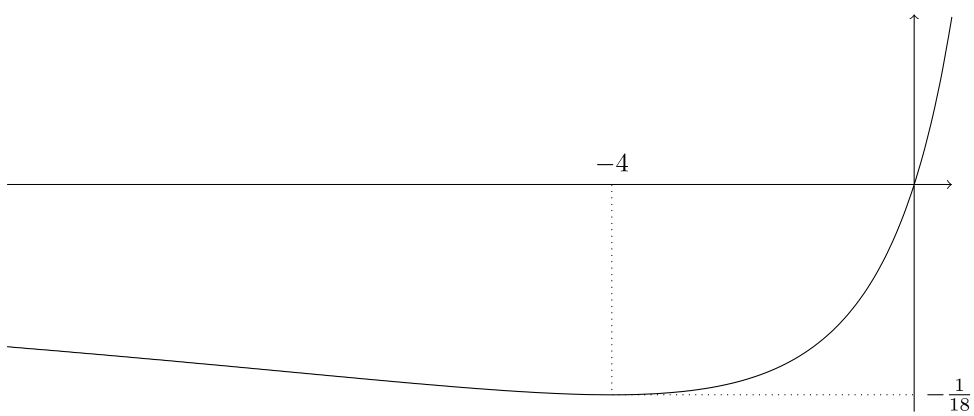
(b) Uočimo da je za $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$

$$f'(x) = \frac{16 - x^2}{(x^2 - 10x + 16)^2},$$

dok u točkama 2 i 8 funkcija f nije niti definirana. Kako je $16 - x^2 < 0$ za $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$, a $16 - x^2 > 0$ za $x \in \langle -4, 4\rangle$ zaključujemo da f strogo pada na intervalima $\langle -\infty, -4]$, $[4, 8\rangle$ i $\langle 8, +\infty\rangle$, a strogo raste na intervalima $[-4, 2\rangle$ i $\langle 2, 4]$. U točci -4 postiže se lokalni minimum (i iznosi $-\frac{1}{18}$), a u točci 4 lokalni maksimum (i iznosi $-\frac{1}{2}$).



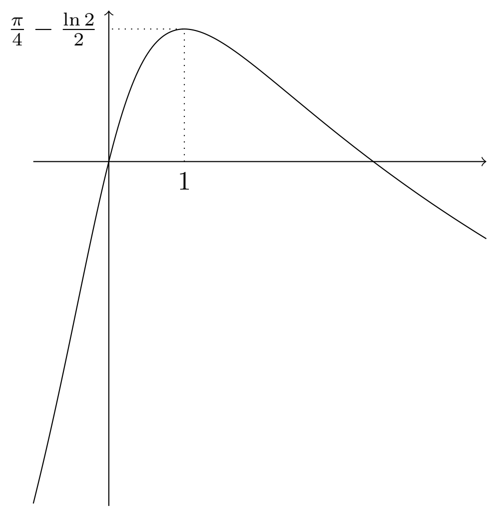
"Zumiramo" dio oko točke -4



(c) Budući da je

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x^2},$$

zaključujemo da f strogo raste na $\langle -\infty, 1]$, a strogo pada na $[1, +\infty\rangle$. U točci 1 postiže se lokalni (čak i globalni) maksimum (i iznosi $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$).



△

Vrijedi:

Teorem. (**Bolzano-Weierstrass**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je i $f([a, b]) = [c, d]$ segment.

Dakle, ako je funkcija neprekidna na segmentu, onda ona na tom segmentu postiže minimum i maksimum.

Zadatak 1.111 Odredite broj realnih rješenja svake od sljedećih jednadžbi:

(a) $x^7 + x^5 + x^3 - 3 = 0\,,$

(b) $x + \cos x - 5 = 0$

Rješenje.

(a) Uočimo da je broj rješenja dane jednadžbe jednak broju nultočaka funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - 3$. Kako je

$$f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2,$$

zaključujemo da je 0 jedina stacionarna točka, dok za sve ostale x vrijedi $f'(x) > 0$. Iz prethodne karakterizacije zaključujemo da je f strogo rastuća pa ima *najviše jednu* nultočku. S druge strane, očito je $f(1) = 0$, pa f ima *točno jednu* nultočku. Alternativno, mogli smo zaključiti da f ima barem jednu nultočku i bez da smo direktno uočili da je $f(1) = 0$. Naime, budući da je, na primjer, $f(-100) < 0$ i $f(100) > 0$, Bolzano-Weierstrassov teorem nam govori da postoji (barem jedna) točka iz $[-100, 100]$ koju f šalje u 0.

(b) Ponovno određujemo broj nultočaka funkcije $f(x) = x + \cos x - 5$. Kako je

$$f'(x) = 1 - \sin x,$$

vidimo da je skup stacionarnih točaka funkcije f jednak $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, S ne sadrži interval, dok je u svim ostalim točkama funkcija f' strogo pozitivna. Zaključujemo da je f strogo rastuća pa ima najviše jednu nultočku. Budući da je $f(-10) < 0$, a $f(10) > 0$, po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da f ima barem jednu nultočku. Spajajući posljednja dva zaključka dobivamo da f ima točno jednu nultočku, pa i početna jednadžba ima točno jedno realno rješenje.

△

Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Za točku $c \in [a, b]$ kažemo da je **kritična točka** ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- f nije derivabilna u c
- f je derivabilna u c i $f'(c) = 0$
- $c = a$ ili $c = b$

Zadatak 1.112 Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4|x|.$$

Rješenje. Posebno analiziramo funkciju f na $[-3, 0]$ i $[0, 3]$. Na $[-3, 0]$ je $f(x) = x^2 + 4x$ i $f'(x) = 2x + 4$ pa f pada na $[-3, -2]$, a raste na $[-2, 0]$. S druge strane, na $[0, 3]$ je $f(x) = x^2 - 4x$ i $f'(x) = 2x - 4$ pa f pada na $[0, 2]$, a raste na $[2, 3]$.

Iz ove analize možemo zaključiti da f poprima globalni minimum u -2 ili 2. Budući da je $f(-2) = f(2) = -4$, zaključujemo da se globalni minimum postiže u obje te točke i iznosi -4. Nadalje, f poprima globalni maksimum u -3, 0 ili 3. Budući da je $f(3) = f(-3) = -3$, a $f(0) = 0$, slijedi da se globalni maksimum postiže u 0 i iznosi 0.

△

Zadatak 1.113 Neka je $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$. Odredite $f([-5, -1])$.

Rješenje. Imamo

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x = 4x(x + 2)(x + 4),$$

pa je (ako gledamo samo interval $[-5, -1]$) $f' > 0$ na $\langle -4, -2 \rangle$, a $f' < 0$ na $\langle -5, -4 \rangle$ i $\langle -2, -1 \rangle$.

Sada zaključujemo da f pada na $\langle -5,-4\rangle$, raste na $\langle -4,-2\rangle$ i ponovno pada na $\langle -2,-1\rangle$. Zbog toga slijedi da $f|_{[-5,-1]}$ postiže globalni maksimum ili u -5 ili u -2. Budući da je $f(-5)=25$ i $f(-2)=16$, zaključuje da se radi o točci -5 i maksimumu 25. Slično, $f|_{[-5,-1]}$ postiže globalni minimum ili u -4 ili u -1. Budući da je $f(-4)=0$ i $f(-1)=9$, zaključuje da se radi o točci -4 i minimumu 0. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema zaključujemo da je $f([-5,-1])=[0,25]$.

△

Zadatak 1.114 Odredite sliku funkcija:

(a) $f\colon [-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

(b) $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

Rješenje.

(a) f je neprekidna svuda, ali nije derivabilna u točkama 0 i 1, te u rubovima -1 i 2. Za ostale x je

$$f'(x)=\frac{1-3x}{3x^{2/3}(1-x)^{1/3}}.$$

Analizom predznaka vidimo da f raste na $[-1,0]$ i $[0,\frac{1}{3}]$ (pa stoga i na $[-1,\frac{1}{3}]$), potom pada na $[\frac{1}{3},1]$ te opet raste na $[1,2]$.

Budući da je $f(-1)=-4^{1/3}$ i $f(1)=0$, zaključujemo da je $-4^{1/3}$ globalni minimum funkcije f. Slično, $f(\frac{1}{3})=4^{1/3}/3$ i $f(2)=2^{1/3}$ pa je globalni maksimum funkcije f jednak $2^{1/3}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema zaključujemo da je slika funkcije f jednaka $[-4^{1/3},2^{1/3}]$.

(b) Na $[0,1]$ je $f(x)=xe^{x-1}$ i $f'(x)=e^{x-1}(x+1)$, pa je f na $[0,1]$ strogo rastuća. S druge strane, na $[-1,0]$ je $f(x)=-xe^{x-1}$ i $f'(x)=-e^{x-1}(x+1)$ pa je f na $[-1,0]$ strogo padajuća. Zaključujemo da je globalni minimum funkcije f jednak $f(0)=0$, dok je globalni maksimum jednak $f(1)$ ili $f(-1)$. Budući da je $f(1)=1$ i $f(-1)=\frac{1}{e^2}$ slijedi da je globalni maksimum jednak 1 pa je, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, slika funkcije f jednaka $[0,1]$.

△

Zadatak 1.115 U ovisnosti o parametru $a\in\mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x)=x\ln x-a.$$

Rješenje. Uočimo da je

$$f'(x)=\ln x+1,$$

pa je f strogo padajuća $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$, a strogo rastuća na $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$. Nadalje, f u točci $\frac{1}{e}$ postiže globalni minimum i on iznosi $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} - a$.

Ukoliko je $a < -\frac{1}{e}$ možemo zaključiti da f nema nultočaka, dok za $a = -\frac{1}{e}$ postoji točno jedna nultočka (upravo $\frac{1}{e}$).

Preostaje za analizirati slučaj $a > -\frac{1}{e}$. U tom slučaju, možemo imati još najviše dvije nultočke.

Prva potencijalna nultočka bit će na intervalu $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ i ona će postojati ako i samo ako je $\lim_{x\to 0+} f(x) > 0$. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo imamo

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

pa je $\lim_{x\to 0+} f(x) = -a$. Zaključujemo da je na $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ imamo nultočku ako je $a < 0$.

Druga potencijalna nultočka bit će na intervalu $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$ i ona će postojati ako i samo ako je $\lim_{x\to +\infty} f(x) > 0$, a to očito vrijedi $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Dakle, za $a \in \langle -\frac{1}{e}, 0\rangle$ funkcija f ima dvije, a za $a \geq 0$ jednu nultočku.

$\triangle$

Zadatak 1.116 Dokažite nejednakosti:

(a) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, za $x > 0$

(b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, za $x > 0$

(c) $\ln(1 + e^{-2x}) + 2\operatorname{arctg} e^x < \pi$, za $x > 0$

Rješenje.

(a) Neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \quad \text{i} \quad g(x) = x - \sin x.$$

Tvrdnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f > 0$ i $g > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$. Budući da je $g'(x) = 1 - \cos x$, možemo zaključiti da je $g' > 0$ osim na skupu stacionarnih točaka koji ne sadrži interval. Slijedi da je g strogo rastuća, a budući da je $g(0) = 0$ vrijedi da je $g > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Uočimo da je

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad f''(x) = x - \sin x.$$

Funkcija f'' je, dakle, jednaka g pa je $f'' > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$. Slijedi da je f' strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$, a budući da je $f'(0) = 0$ imamo da je $f' > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$. Zaključujemo da je f strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$, a kako je $f(0) = 0$ onda je $f > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$.

(b) Slično kao u (a) dijelu, definiramo $f, g\colon \langle -1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad g(x) = x - \ln(1+x).$$

Tvrdnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f > 0$ i $g > 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$. Budući da je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x},$$

zaključujemo da je f strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$, pa tvrdnja slijedi iz $f(0) = 0$.

S druge strane

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x},$$

pa je i g strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$ i tvrdnja slijedi zbog $g(0) = 0$.

(c) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + 2\operatorname{arctg}\ e^x - \pi.$$

Tvrdnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f < 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$. Uočimo da je

$$f'(x) = \frac{2(e^x - 1)}{e^{2x} + 1},$$

odakle slijedi da je f strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$. Budući da je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, sada možemo zaključiti da je doista $f < 0$ na $\langle 0, +\infty\rangle$.

$\triangle$

Zadatak 1.117 Žica duljine $l > 0$ je presječena na dva dijela. Od jednog dijela se savije kružnica, a od drugog rub kvadrata. Kako treba presjeći žicu da zbroj povrsina kruga i kvadrata bude minimalan?

Rješenje. Pretpostavimo da ćemo dio segment $[0, x]$ iskoristiti za kružnicu, a $[x, l]$ za kvadrat. Tada je suma površina funkcija $f\colon [0, l] \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi + \left(\frac{l-x}{4}\right)^2,$$

a njena derivacija je

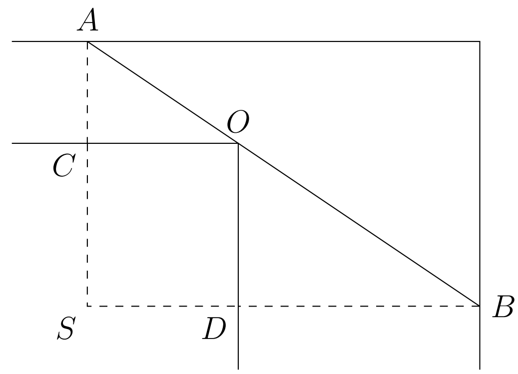
$$f'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x-l}{8} = x\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) - \frac{l}{8}.$$

Zaključujemo da f pada na $[0, \frac{l\pi}{\pi+4}]$, a raste na $[\frac{l\pi}{\pi+4}, l]$. Žicu treba presijeći u omjeru $\pi : 4$.

$\triangle$

Zadatak 1.118 Dva hodnika širine 320 cm i 135 cm se sijeku pod pravim kutem. Odredite najveću duljinu tankog nesavitljivog štapa koji se može prenijeti iz jednog hodnika u drugi.

Rješenje. Sljedeća skica prikazuje ključno ograničenje prenošenja štapa AB iz jednog hodnika u drugi.



Neka je $x = |OC|$. Duljina štapa kojeg želimo prenijeti iz jednog hodnika u drugi mora biti manja ili jednaka $|AB|$ za sve $x \in \langle 0, +\infty\rangle$. Zadatak se stoga svodi na određivanje minimalne duljine $|AB|$ kada x varira od 0 do $+\infty$.

Odredimo minimum funkcije $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = |AB|$. Zbog sličnosti trokuta ACO i ASB, slijedi da je

$$f(x) = |AO| \cdot \frac{|BS|}{|OC|} = \sqrt{135^2 + x^2} \cdot \frac{320 + x}{x}.$$

Računamo

$$f'(x) = \frac{x^3 - 135^2 \cdot 320}{x^2\sqrt{x^2 + 135^2}}.$$

Budući da je $(135^2 \cdot 320)^{1/3} = 180$, zaključujemo da je f padajuća na $\langle 0, 180]$ i rastuća na $[180, +\infty\rangle$, pa je tražena maksimalna duljina štapa jednaka $f(180) = 625$.

△

Zadatak 1.119 U krug radijusa 10 cm upišite jednakokračni trokut maksimalne površine.

Rješenje. Neka je ABC traženi jednakokračni trokut maksimalne površine, te neka mu je AB osnovica. Uočimo da je ABC šiljastokutan. Doista, kad bi $\angle ACB$ bio tup, mogli bismo nacrtati šiljastokutni jednakokračni trokut $A'B'C$ koji bi bio upisan u istu kružnicu takav da je $A'B'$ paralelno s AB i da je $|AB| = |A'B'|$. Tada bi visina iz C na AB bila strogo manja od visine iz C na $A'B'$ pa bi trokut $A'B'C$ ima veću površinu nego ABC.

Neka je S središte promatrane kružnice i označimo s α polovicu kuta $\angle ASB$. Tada je $|AB| = 20 \sin\alpha$, dok duljina visine iz C na stranicu AB iznosi

$$10 + 10\cos\alpha.$$

Zadatak se svodi na maksimiziranje funkcije $P\colon \langle 0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$$P(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 20 \sin\alpha \cdot (10 + 10\cos\alpha) = 100 \sin\alpha + 100 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Budući da je

$$P'(\alpha) = 100(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 100(2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

Odavde vidimo da je P rastuća na $\langle 0, \frac{\pi}{3}]$, a padajuća na $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ pa je površina maksimalna za $\alpha = \frac{\pi}{3}$, a to će biti slučaj ukoliko je ABC jednakostraničan trokut.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.120 Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije zadane formulom:

(a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2 - 4}$,

(b) $f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) - 2\operatorname{arctg}(x^2 - 3)$.

1.121 Odredite sliku funkcija:

(a) $f\colon \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

(b) $f\colon [-5, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + 4x + 5}$

1.122 U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = e^x - x - a.$$

1.123 Dokažite nejednakosti:

(a) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, za svaki $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(b) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$, za svaki $x > 0$

(c) $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, za svaki $x > 1$

(d) $5x + \dfrac{1}{x^5} \geq 6$, za svaki $x > 0$,

(e) $\operatorname{arctg} x > \arcsin \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, za svaki $x > 0$,

(f) $\ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b^2 - a^2}{2ab}$, za svake $0 < a < b$,

(g) $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{8}{3}} \geq 9\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$, za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

1.124 Odredite globalne ekstreme funkcije:

(a) $f\colon [-2, -\frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x^2 + 6x + 1}{x}}$,

(b) $f\colon [\frac{1}{2}, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1}$.

1.125 Rastavite broj 1 na dva nenegativna pribrojnika tako da im zbroj korijena bude najveći.

1.126 U polukružnicu polumjera 1 upisan je trapez čija osnovica je promjer polukružnice. Odredite kut uz osnovicu trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

1.127 Na krivulji $y = \operatorname{ch} x$ nađite točku najbližu pravcu $y = \frac{3}{4}x$.

1.128 U zemlji *MathLand* davno je uveden koordinatni sustav. Na obali rijeke $y = 0$ nalazi se grad $A(-2, 0)$, a dalje od obale je grad $C(0, 1)$. Odredite na kojem mjestu treba izgraditi pristanište $B(b, 0)$, $-2 \leq b \leq 0$ da bi transport od A do C preko B bio najjeftiniji. Pritom je još poznato da je cijena transporta kopnom dva puta veća nego cijena transporta rijekom.

1.129 Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $(x^2 - 3)e^x = a$ (u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$).

1.130 Na krivulju $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x > 1$ povucite tangentu takvu da površina pravokutnog trokuta omeđenog tom tangentom i koordinatnim osima bude minimalna. Kolika je najmanja vrijednost te površine?

1.131 U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upišite pravokutnik najveće površine.

1.132 Tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ siječe koordinatne osi u točkama A i B. Pokažite da je

$$|AB| \geq a + b.$$

1.133 U kuglu radijusa 10 cm upišite stožac maksimalnog volumena.

1.134 Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da minumum funkcije $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a$ na segmentu $[0, 2]$ bude 1.

1.135 Iz kruga je izrezan kružni isječak sa središnjim kutem α. Odaberite kut α tako da volumen stošca, čiji se plašt dobije savijanjem izrezanog dijela bude najveći.

1.136 U kocku duljine stranice a upišite valjak maksimalnog volumena, tako da mu prostorna dijagonala kocke prolazi središtem.

1.137 (a) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

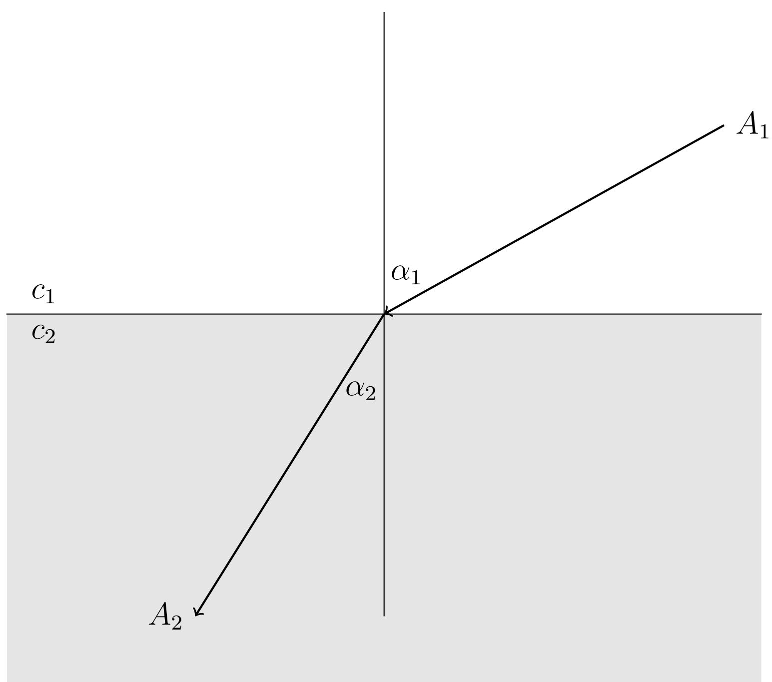
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \text{ kada je } 0 < \alpha < 1$$
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \text{ kada je } \alpha < 0 \text{ ili } \alpha > 1$$

(b) Koristeći (a) dokažite **Youngove nejednakosti**:

Za $a, b > 0$ i $p, q \neq 0, 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi:

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p > 1$$
$$a^{1/p}b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p < 1$$

1.138 * (**Snellov zakon loma svjetlosti**) Po tzv. *Fermatovom principu* zraka svjetlosti od jedne do druge točke putuje tako da je vrijeme putovanja najmanje moguće. Ako neki medij ima istu strukturu u svakom svom dijelu, onda je putanja zrake svjetlosti pravac. Pretpostavite da imate dva takva medija, kao na sljedećoj slici:



Ako su brzine svjetolsti u tim medijima c_1 i c_2, pokažite da vrijedi **Snellov zakon**:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

1.139 * Posuda oblika valjka je postavljena na ravnu površinu. Na nekoj visini je napravljen otvor iz kojeg istječe mlaz vode. Odredite visinu na koju treba staviti otvor tako da mlaz dostigne najveći domet, ako znate da je prema *Torricellijevom zakonu* brzina kojom voda istječe dana fomulom $\sqrt{2gh}$, gdje je h visina vode iznad otvora. ($g = 9.81m/s^2$)

1.140 * Polinom P stupnja n s realnim koeficijentima zadovoljava $P(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da tada vrijedi i

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

[*Uputa*: Označimo lijevu stranu s $f(x)$. Primijetite da je $f(x) = P(x) + f'(x)$.]