1.8 Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija

Pravac $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \text{ ili } \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Pravac $y = ax + b$ je **kosa asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ ili } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Tada je

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

Ako je $a = 0$, vidimo da je kosa asimptota zapravo horizontalna asimptota. Pravac $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x\to a-} |f(x)| = +\infty \text{ ili } \lim_{x\to a+} |f(x)| = +\infty.$$

Zadatak 1.141 Odredite asimptote funkcija

(a) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

Rješenje.

(a) Domena funkcije f je $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je onda $x = 0$. Kako je $\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$, i $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$, zaključujemo da je vertikalna asimptota pravac $x = 0$. Računajmo sada kose asimptote. Vrijedi

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1,$$

pa imamo lijevu kosu asimptotu, koja je zapravo lijeva horizontalna asimptota, $y = -1$. Za $x \to +\infty$ vrijedi

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

pa imamo desnu kosu asimptotu, koja je zapravo desna horizontalna asimptota, $y = 0$.

(b) Domena funkcije f je $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} f(x) &= +\infty,\\ \lim_{x\to -1+} f(x) &= -\infty,\\ \lim_{x\to 1-} f(x) &= -\infty,\\ \lim_{x\to 1+} f(x) &= +\infty,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da su vertikalne asimptote $x=-1$ i $x=1$.
Kose asimptote:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(x^2-1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{x^2-1} = 0,$$

pa zaključujemo da imamo horizontalnu asimptotu $y=0$.

(c) Domena funkcije f je $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} f(x) &= +\infty,\\ \lim_{x\to -1+} f(x) &=0,\\ \lim_{x\to 1-} f(x) &=0,\\ \lim_{x\to 1+} f(x) &= +\infty,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da su vertikalne asimptote $x=-1$ (vertikalna asimptota slijeva) i $x=1$ (vertikalna asimptota zdesna) . Uočimo da je za vertikalnu asimptotu dovoljno da je samo jedan jednostrani limes jednak $+\infty$ ili $-\infty$.
Kose asimptote:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1,$$

pa zaključujemo da imamo horizontalnu asimptotu $y=1$.

$\triangle$

Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $f\colon I\to\mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je

- f **(strogo) konveksna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1,x_2 \in I, \lambda \in \langle 0,1\rangle.$$

- f **(strogo) konkavna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \overset{(>)}{\geq} (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1,x_2 \in I, \lambda \in \langle 0,1\rangle.$$

Konveksnost i konkavnost možemo karakterizirati na sljedeći način:

Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na I. Vrijedi

- f je (strogo) konveksna na $I \iff f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$, za sve $x \in I$.
- f je (strogo) konkavna na $I \iff f''(x) \overset{(<)}{\leq} 0$, za sve $x \in I$.

Točka $a \in I$ je **točka infleksije** funkcije f ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konveksna na $\langle a-\delta, a\rangle$ i strogo konkavna na $\langle a, a+\delta\rangle$
- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konkavna na $\langle a-\delta, a\rangle$ i strogo konveksna na $\langle a, a+\delta\rangle$

Dakle, u slučaju da je f dva puta derivabilna funkcija i ako u a f'' mijenja predznak, onda je u a točka infleksije. Odavde vidimo da su "kandidati" za točke infleksije nultočke funkcije f''.

Zadatak 1.142 Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkciju

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Rješenje. Kako je $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$, vidimo da je $f'' > 0$ na $\langle \infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\rangle$ i $f'' < 0$ na $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$. Prema karakterizaciji konveksnosti i konkavnosti zaključujemo da je funkcija f konveksna na intervalima $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\rangle$ i konkavna na intervalu $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Također, točke infleksije su $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△

Zadatak 1.143 Koliko najviše nultočaka može imati strogo konveksna funkcija?

Rješenje. Očito je da postoji strogo konveksna funkcija s dvije nultočke – na primjer $x \mapsto x^2 - 1$ je jedna takva funkcija.

Dokažimo da ne postoji strogo konveksna funkcija s više od dvije nultočke. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka strogo konveksna funkcija, te neka su x_1, x_2, x_3 neke tri njene nultočke takve da je $x_1 < x_2 < x_3$. Budući da je $x_2 \in \langle x_1, x_3 \rangle$, postoji $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Međutim, koristeći strogu konveksnost i činjenicu da su x_1, x_2 i x_3 nultočke funkcije f imamo

$$0 = f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) = 0,$$

što daje kontradikciju.

△

Zadatak 1.144 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dokažite da za $x_1, \ldots, x_n \in I$ vrijedi:

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n.
Baza. Za $n = 1$, vrijedi $f(\frac{x_1}{1}) \leq \frac{f(x_1)}{1}$.
Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$.
Korak. Uzmimo proizvoljne $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in I$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f\big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}}{n+1}\big) &= f\big(\frac{n}{n+1}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1}{n+1}x_{n+1}\big) \leq \\ &\leq \frac{n}{n+1} f\big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\big) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{n}{n+1}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n+1})}{n+1}, \end{aligned}$$

gdje se u prvoj nejednakosti koristi definicija konveksnosti za $\lambda = \frac{1}{n+1}$, a u drugoj pretpostavka indukcije.

△

Zadatak 1.145 Dokažite nejednakosti:

(a) $\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}, \quad p > 1,\ x_1, \ldots, x_n > 0$

(b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, gdje su α, β i γ kutevi trokuta

Rješenje.

(a) Definirajmo funkciju $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = x^p$. Kako je $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ za $x > 0$, zaključujemo da je f konveksna funkcija, pa prema prethodnom zadatku za $x_1, \ldots, x_n > 0$ vrijedi $f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$, tj. vrijedi $\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p+\ldots+x_n^p}{n}$.

(b) Definirajmo funkciju $f\colon \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = -\sin x$. Kako je $f''(x) = \sin x > 0$ za $x \in \langle 0, \pi\rangle$, zaključujemo da je f konveksna funkcija, pa prema prethodnom zadatku za kuteve trokuta $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi\rangle$ vrijedi $f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}$, tj. $-\sin\frac{\pi}{3} \leq \frac{-\sin\alpha-\sin\beta-\sin\gamma}{3}$, iz čega slijedi tražena nejednakost.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.146 Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Pokažite da je $-f$ konkavna funkcija.

1.147 Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkcije

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

(b) $f(x) = e^{-2x^2+x+1}$

1.148 Dokažite da na grafu funkcije $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ postoje tri točke infleksije i da sve leže na jednom pravcu. Odredite jednadžbu tog pravca.

1.149 Dokažite nejednakosti:

(a) $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ \geq 44 \cdot (\sqrt{2} - 1)$

(b) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \leq (\sqrt{2} - 1)^{44}$

1.150 * Ako je konveksna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omeđena, onda je f konstanta. Dokažite!

1.151 * Dokažite da ako za konveksnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

onda je ona konstanta.

1.152 * Neka je $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

(a) Pokažite da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ postoje lijeva i desna derivacija:

$$f'_-(x) = \lim_{y\to x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ i } f'_+(x) = \lim_{y\to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

i da vrijedi $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

(b) Koristeći (a) pokažite da je f neprekidna funkcija.