1.9 Isptivanje toka funkcije

Kod ispitivanja toka funkcije koristimo sljedeći postupak:

1. Naći prirodno područje definicije.
2. Ispitati simetrije funkcije: parnost/neparnost, periodičnost.
3. Ispitati neprekidnost funkcije i naći točke prekida, ako postoje.
4. Naći nultočke funkcije i područja stalnog predznaka.
5. Naći intervale monotonosti i točke lokalnih ekstrema.
6. Naći intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije.
7. Naći asimptote.
8. Skicirati graf funkcije.

Zadatak 1.153 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje. Domena funkcije f je cijeli skup $\mathbb{R}$. Funkcija f je neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$. Ima točno jednu nultočku, u točki $x = 2$. Nazivnik funkcije f je funkcija koja poprima samo pozitivne vrijednosti. Brojnik je negativan za $x < 2$ te pozitivan za $x > 2$. Isto vrijedi za funkciju f (radi konstante pozitivnosti nazivnika). Računamo

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{te} \qquad f''(x) = \frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

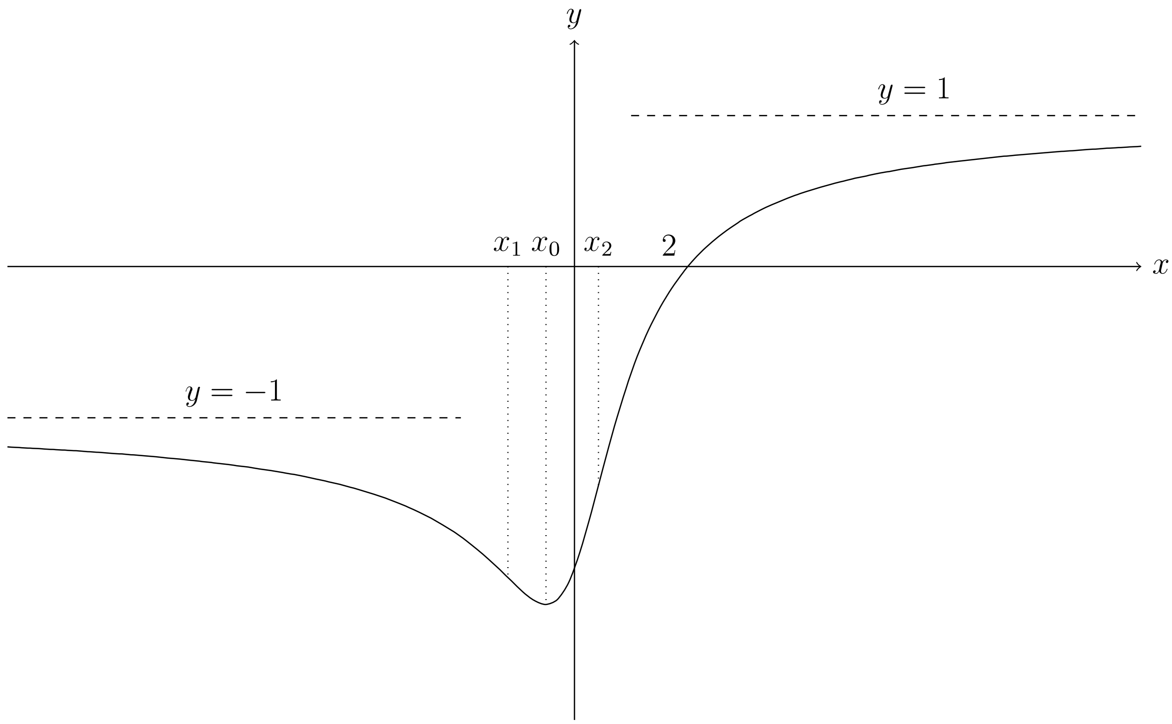
Vidimo da je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = x_0 = -\dfrac{1}{2}$ te da je $f''(x) = 0$ ako i samo ako je $x \in \left\{ x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}, x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8} \right\}$.

	$-\infty$	$\longrightarrow$	x_1	$\longrightarrow$	x_0	$\longrightarrow$	x_2	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	$+\infty$
f'		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
f''		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$	
f		$- \searrow \cap$		$- \searrow \cup$		$- \nearrow \cup$		$- \nearrow \cap$		$+ \nearrow \cap$	

Ovdje zakljuujemo sljedeće: U točki $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $-\sqrt{5}$. Nadalje, točke x_1 i x_2 su točke infleksije, u točki x_1 funkcija f iz konkavne prelazi u konveksnu, a u točki x_2 funkcija f iz konveksne prelazi u konkavnu.

Funkcija f ima dvije horizontalne asimptote (jednu lijevu i jednu desnu):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \text{te} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$



△

Zadatak 1.154 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = x^2\, e^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcija f je neprekidna na cijeloj svojoj domeni. U točki $x = 0$ ima prekid, primijetimo da je

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 \qquad \text{te} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty.$$

Dakle, pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota zdesna funkcije f. Primijetimo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

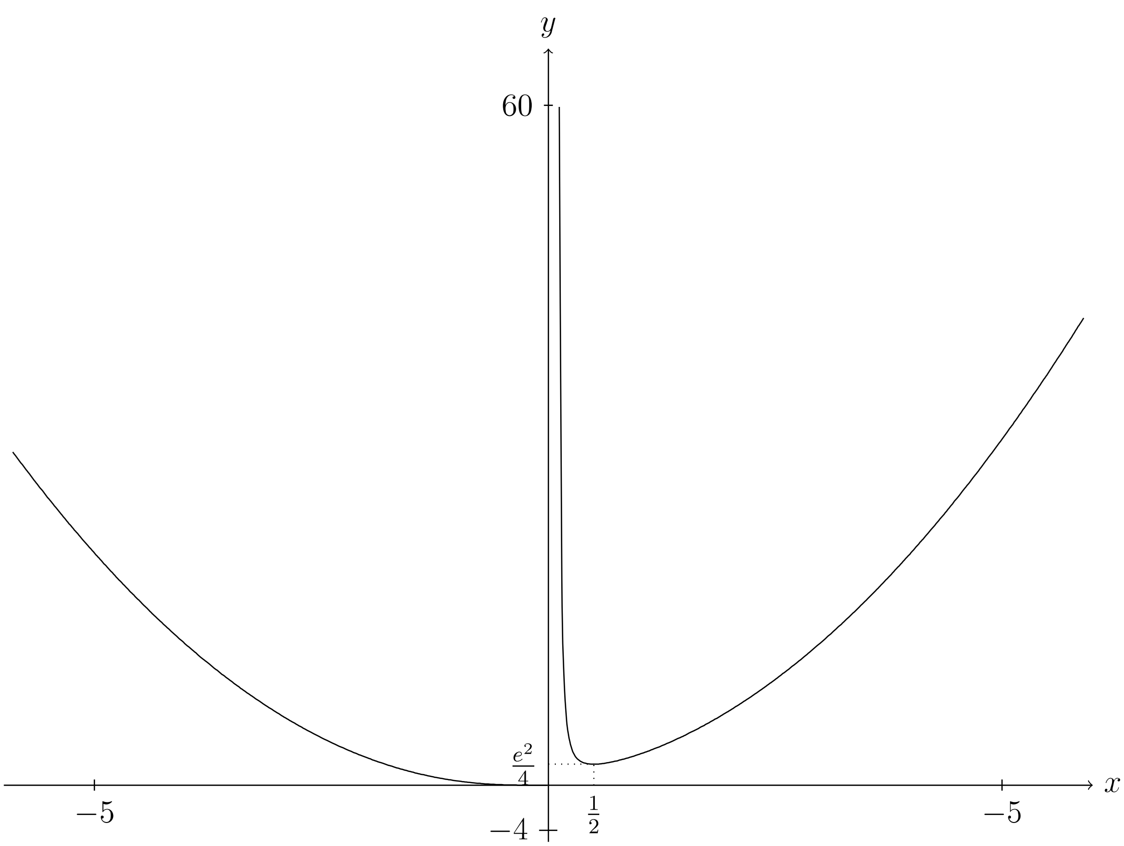
što znači da funkcija f nema kosih (a time ni horizontalnih) asimptota. Štoviše, vidimo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Funkcija f nema nultočki, vrijedi da je $f(x) > 0$, za svaki realni broj $x \neq 0$. Nadalje računamo prvu i drugu derivaciju:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1), \qquad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}.$$

Vidimo da je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = \frac{1}{2}$, također vrijedi i da je $f''(x) > 0$ za svaki realni broj $x \neq 0$, što znači da je funkcija f konveksna na $\langle -\infty, 0\rangle$ te također konveksna i na $\langle 0, +\infty\rangle$. Dakle, funkcija f nema točaka infleksije. Funkcija f u točki $x = \frac{1}{2}$ ima lokalni minimum koji iznosi $\frac{e^2}{4}$. Već smo prije zaključili da je cijelo vrijeme pozitivna, a znamo i da na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$ pada, dok na intervalu $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ raste. Primijetimo još da je vrijednost funkcije f u točki $x = \frac{1}{2}$ jednaka $\frac{e^2}{4}$, što je približno 1.847. Spremni smo nacrtati graf funkcije f.



△

Zadatak 1.155 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \ln(\cos x).$$

Rješenje. Odredimo najprije domenu funkcije f. Vidimo da su u domeni svi realni brojevi x za koje je $\cos x > 0$ (i samo oni). Dakle, domena funkcije f je skup

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle.$$

Funkcija je periodična s periodom 2π. Dakle, dovoljno je ispitati ponašanje funkcije f na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Preciznije, nadalje ćemo se ponašati kao da je domena funkcije f upravo taj interval, a na kraju onda znamo da funkcija izgleda isto na svakom od intervala $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, za $k \in \mathbb{Z}$. Korisno je imati na umu da je funkcija f također i parna.

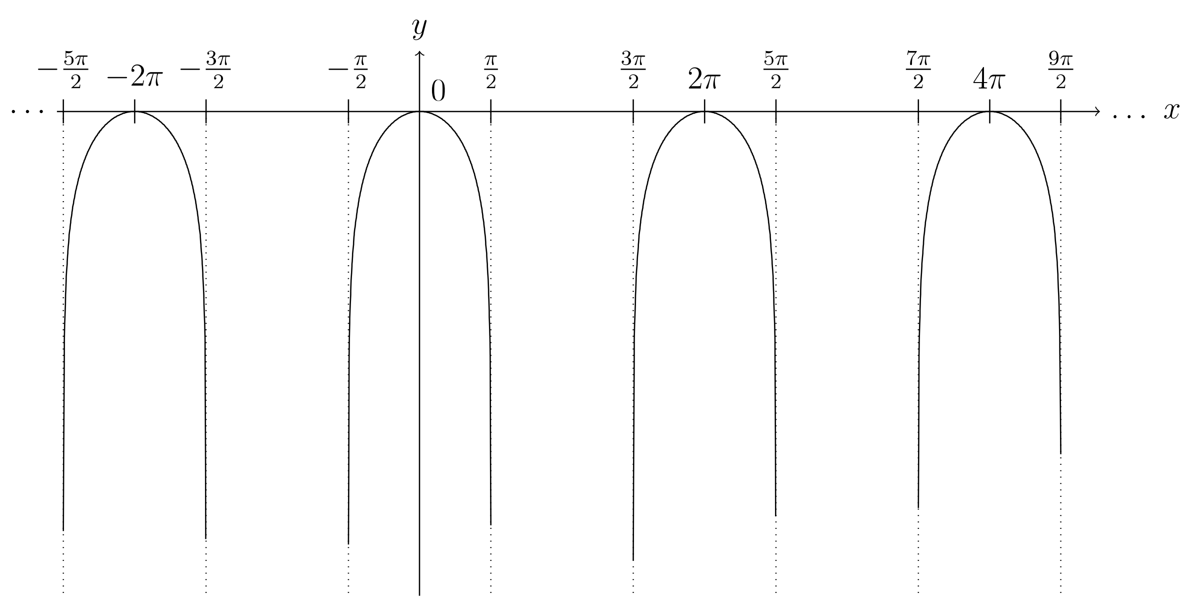
Funkcija f je neprekidna na svojoj domeni i ima nultočku u točki $x = 0$. Za sve $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \setminus \{0\}$ vrijedi da je $f(x) < 0$. Nadalje, primijetimo da je

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = -\infty.$$

Dakle, pravci $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$ su vertikalne asimptote funkcije f ($x = -\frac{\pi}{2}$ je vertikalna asimptota zdesna, a $x = \frac{\pi}{2}$ je vertikalna asimptota slijeva). Računamo

$$f'(x) = -\operatorname{tg} x \qquad \text{i} \qquad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vidimo da je $f''(x) < 0$, za svaki x iz domene, što znači da je funkcija cijelo vrijeme konkavna. Preciznije, funkcija je konkavna na svakom intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, za svaki cijeli broj k. Nadalje, vrijedi da je $f'(x) > 0$, za $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$ te $f'(x) < 0$, za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dakle, funkcija raste na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ i pada na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Odnosno, u točki $2k\pi$ (za $k \in \mathbb{Z}$) funkcija ima lokalni maksimum koji iznosi 0.



△

Zadatak 1.156 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Rješenje. Primijetimo da je $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right)$ te da je domena funkcije

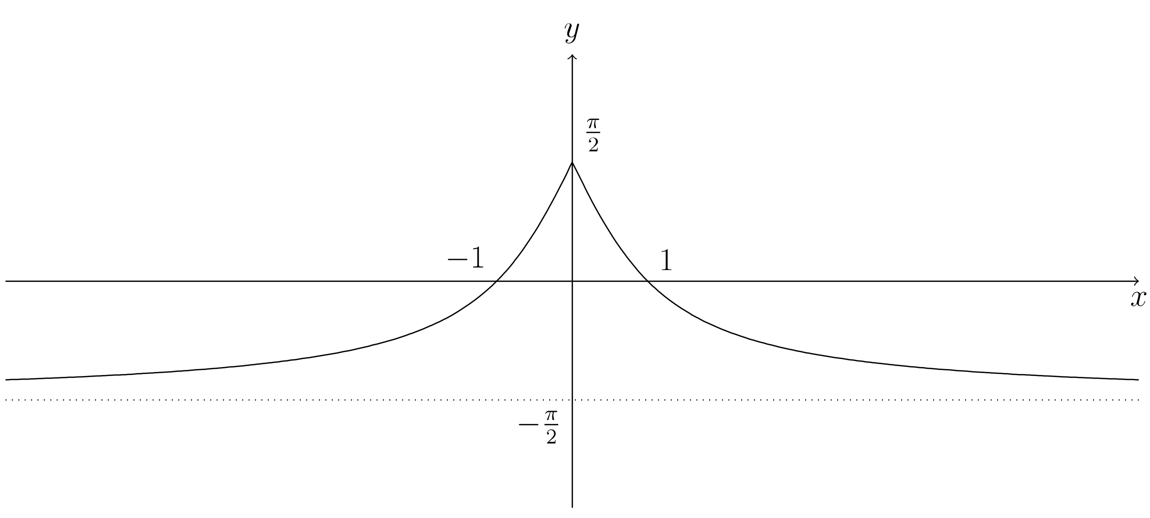
$$x \mapsto \frac{2}{1+x^2} - 1$$

cijeli $\mathbb{R}$ i njena slika je skup $\langle 0, 2]$. Dakle, domena funkcije f je cijeli $\mathbb{R}$. Primijetimo da je slika funkcije f skup $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nadalje uočimo da je funkcija f parna. Neprekidna je na cijeloj svojoj domeni i ima dvije nultočke, u točkama $x = \pm 1$. Funkcija f ima jednu horizontalnu asimptotu, pravac $y = -\frac{\pi}{2}$. Računamo (imajmo na umu da u točki $x = 0$ derivacija ne postoji):

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot \operatorname{sgn}(x)}{1+x^2} \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \frac{4|x|}{(1+x^2)^2}.$$

Dakle, funkcija f je konveksna na $\langle -\infty, 0]$ i na $[0, +\infty\rangle$. (Oprezno! Funkcija f nije konveksna na cijeloj svojoj domeni, ali je na svakom od ovih intervala zasebno.) Na intervalu $\langle -\infty, 0]$ raste, a na intervalu $[0, +\infty\rangle$ pada. Što se predznaka tiče, funkcija f je pozitivna na $\langle -1, 1\rangle$ te negativna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Dodatno, funkcija f u točki $x = 0$ ima globalni maksimum koji iznaosi $\frac{\pi}{2}$.



△

Zadaci za vježbu

1.157 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

1.158 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}.$$

1.159 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

1.160 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}.$$

1.161 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

1.162 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1.163 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

1.164 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1.165 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x \sin x.$$

1.166 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x - \ln \left(\frac{x - 3}{x - 2} \right)^2.$$