2.6 Nepravi integrali

Definicija. Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu $[a, \xi]$ od $[a, +\infty\rangle$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^\xi f(x)\, dx \tag{2.4}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a, +\infty\rangle$ i označava s

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Također kažemo da nepravi integral (2.5) **konvergira**. Ako limes u (2.4) ne postoji u $\mathbb{R}$, onda kažemo da nepravi integral (2.5) **divergira**.
Analogno definiramo pojam nepravog integrala za funkciju $f : \langle -\infty, a] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx := \lim_{\xi \to -\infty} \int_\xi^a f(x)\, dx.$$

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom segmentu, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx \quad (c \in \mathbb{R}), \tag{2.6}$$

ukoliko oba neprava integrala s desne od (2.6) konvergiraju.

Napomena. Lako se pokaže da je definicija (2.6) dobra, tj. da ne ovisi o izboru točke $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.49 Izračunajte neprave integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ (c) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ $(a > 1)$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Rješenje.

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^\xi = \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} \xi = \frac{\pi}{2}.$$

(b) $$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_e^\xi \frac{dx}{x \ln^3 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & e \mapsto 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & \xi \mapsto \ln \xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\ln \xi} \frac{dt}{t^3}$$
$$= \lim_{\xi \to +\infty} \left(-\frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^{\ln \xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln^2 \xi} \right) = \frac{1}{2}.$$

(c) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\left[\begin{array}{ll} x=\operatorname{ch}t\Rightarrow t=\operatorname{Arch}x & a\mapsto\operatorname{Arch}a\\ dx=\operatorname{sh}x\,dx & \xi\mapsto\operatorname{Arch}\xi\end{array}\right]=$
$\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\operatorname{Arch}a}^{\operatorname{Arch}\xi}\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}^2t\operatorname{sh}t}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\operatorname{Arch}a}^{\operatorname{Arch}\xi}\frac{dt}{\operatorname{ch}^2t}=\lim_{\xi\to+\infty}\operatorname{th}t\Big|_{\operatorname{Arch}t}^{\operatorname{Arch}\xi}=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{th}(\operatorname{Arch}\xi)-$
$\displaystyle\operatorname{th}(\operatorname{Arch}a))=1-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}.$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int_{-\infty}^{+\infty}=\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(x+3)^2+4}+\int_{-3}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+4}=$
$\displaystyle\lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{-3}\frac{dx}{(x+3)^2+4}+\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-3}^{\eta}\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}\Big|_{\xi}^{-3}$
$\displaystyle+\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}\Big|_{-3}^{\eta}=\lim_{\xi\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\xi+3}{2}\right)+\lim_{\eta\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\eta+3}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+$
$\displaystyle\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

△

Napomena. Postojanje limesa

$$\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}f(x)\,dx. \tag{2.7}$$

općenito ne povlači konvergenciju nepravog integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$.

Npr. za sve $\xi>0$ imamo $\displaystyle\int_{-\xi}^{\xi}x\,dx=0$, pa je stoga i $\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}x\,dx=0$. S druge strane za $\xi>0$ imamo $\displaystyle\int_0^{\xi}x\,dx=\frac{\xi^2}{2}$, pa je $\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}x\,dx=+\infty$. Dakle, nepravi integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,dx$ divergira, pa onda ne postoji ni $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx$.

S druge strane, ako nepravi integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ konvergira, tada limes (2.7) postoji i vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}f(x)\,dx.$$

Limes (2.7) zove se **glavna vrijednost integrala** funkcije f i označava s

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx.$$

O njemu ćete više čuti na kompleksnoj analizi.

Definicija. Za nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ kažemo da **apsolutno konvergira**, ako konvergira nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Teorem. Apsolutna konvergencija povlači običnu konvergenciju, tj. ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ apsolutno konvergira, tada on i konvergira.

Napomena. Obrat prethodnog teorema općenito ne vrijedi. Naime, može se pokazati da nepravi integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergira, ali da ne konvergira apsolutno.

Teorem. (**Usporedni kriterij**) Neka su $f, g : [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ dvije nenegativne funkcije koje su Riemann integrabilne na svakom segmentu $[a, b]$, $a < b$. Pretpostavimo da vrijedi

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty\rangle.$$

(a) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(b) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira, onda divergira i nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Korolar. (Granični kriterij) Neka su $f, g : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}_+$ dvije pozitivne funkcije koje su Riemann integrabilne na svakom segmentu $[a, b]$, $b < a$. Pretpostavimo da u $\overline{\mathbb{R}}$ postoji limes

$$L := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0, +\infty].$$

(a) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergira i ako je $c \in [0, +\infty\rangle$, tada i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira.

(b) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergira i ako je $c \in \langle 0, +\infty]$, tada i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira.

Zadatak 2.50 U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad \text{gdje je} \quad a > 0.$$

Rješenje. Po definiciji, nepravi integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira ako postoji konačan limes

$$L := \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p}.$$

Promatramo slučajeve.

(i) Ako je $p = 1$, onda je $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +\infty} (\ln \xi - \ln a) = +\infty,$$

pa nepravi integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergira.

(ii) Ako je $p \neq 1$, onda je $\int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{\xi} = \frac{1}{1-p}(\xi^{1-p} - a^{1-p})$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{\xi \to +\infty} (\xi^{1-p} - a^{1-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{za } p < 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{za } p > 1. \end{cases}$$

Dakle, nepravi integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $0 < p \leq 1$.

△

Zadatak 2.51 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^5 + 4}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^2 \sin^2 x}$.

Rješenje.

(a) Tvrdimo da nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^5 + 4}}\, dx$ konvergira apsolutno.
Zaista, kako je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^5}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{4 + x^5}} = 1,$$

te kako nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konvergira ($p = \frac{3}{2}$), iz graničnog kriterija slijedi da nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+4}}$ također konvergira.

Iz nejednakosti

$$\frac{|x \sin x|}{\sqrt{x^5+4}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^5+4}}, \quad \forall x > 0,$$

dokazane konvergencije nepravog integrala $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+4}}$ i usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^5+4}}\,dx$ konvergira apsolutno.

(b) Iz nejednakosti

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \quad \forall x \in [1, +\infty\rangle,$$

divergencije nepravog integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ($p = \frac{1}{3}$) i usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ također divergira.

(c) Kako je

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

te kako nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergira, prema graničnom kriteriju zaključujemo da integral $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$ također divergira.

(d) Iz nejednakosti

$$\frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2} > \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, +\infty\rangle$$

divergencije nepravog integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ($p = 1$) i usporednog kriterija, slijedi da nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\,dx$ također divergira.

△

Definicija. Neka je $f : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (ne nužno ograničena) funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu $[a, \xi]$ od $[a, b\rangle$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\xi\to b-} \int_a^{\xi} f(x)\,dx, \tag{2.8}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a,b\rangle$ i označava s

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Također kažemo da nepravi integral (2.9) **konvergira**. Ako limes u (2.8) ne postoji u $\mathbb{R}$, onda kažemo da nepravi integral (2.9) **divergira**.
Analogno definiramo pojam nepravog integrala za funkciju $f:\langle a,b]\to\mathbb{R}$:

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\xi\to a+}\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Ako je $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu od $\langle a,b\rangle$, tada definiramo

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx := \int_{a\leftarrow}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\to b} f(x)\,dx \quad (a<c<b), \tag{2.10}$$

ukoliko oba neprava integrala s desne od (2.10) konvergiraju.

Napomena. (a) Lako se pokaže da definicija (2.10) ne ovisi o izboru točke $a<c<b$.

(b) Ako je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann integrabilna funkcija, tada je

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

što pokazuje da je u tom slučaju nepravi integral jednak "običnom" Riemannovom integralu funkcije f na $[a,b]$.

(c) Za nepravi integral na ograničenom području vrijede analogni teoremi kao i za nepravi integral na neograničenom području.

Zadatak 2.52 Izračunajte neprave integrale

$$\text{(a)}\ \int_0^{\to 1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(b)}\ \int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\sqrt[3]{\sin x}\,dx \qquad \text{(c)}\ \int_0^{\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int_0^{1\leftarrow}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1-}\int_0^{\xi}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x=\sin t\Rightarrow x=\arcsin t & 0\mapsto 0\\ dx=\cos t\,dt & \xi\mapsto\arcsin\xi\end{bmatrix} = \lim_{\xi\to 1-}\int_0^{\arcsin\xi}\sin t\,dt = \lim_{\xi\to 1-}(-\cos t)\Big|_0^{\arcsin\xi} = \lim_{\xi\to 1-}(1-\cos\arcsin\xi) = \lim_{\xi\to 1-}(1-\sqrt{1-\xi^2}) = 1.$

(b) $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} x\sqrt[3]{\sin x}\,dx\ \lim_{\xi\to 0+}\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}\cos x\,dx = \begin{bmatrix} t=\sin x & \xi\mapsto\arcsin\xi\\ dt=\cos x\,dx & \frac{\pi}{2}\mapsto 1\end{bmatrix} = \lim_{\xi\to 0+}\int_{\arcsin\xi}^{1} t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \lim_{\xi\to 0+}\left(3\cdot t^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{\arcsin\xi}^{1} = 3\lim_{\xi\to 0+}(1-\sqrt[3]{\arcsin\xi}) = 3.$

(d) Uzmimo $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ i stavimo

$$I_\varepsilon := \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Po definiciji je $\displaystyle\int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon$. Koristeći supstituciju $t = \frac{\pi}{2} - x$, imamo

$$I_\varepsilon = \begin{bmatrix} t = \frac{\pi}{2} - x & 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \\ dt = -dx & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \mapsto \varepsilon \end{bmatrix} = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx.$$

Neka je

$$J_\varepsilon := \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x})\, dx.$$

Tada je $\displaystyle J_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}\, dx = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (1 - 2\sin x \cos x)}}\, dx$

$\displaystyle = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x - \cos x & \varepsilon \mapsto \sin\varepsilon - \cos\varepsilon \\ du = (\cos x + \sin x)\, dx & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \mapsto \cos\varepsilon - \sin\varepsilon \end{bmatrix} =$

$\displaystyle \sqrt{2} \int_{\sin\varepsilon - \cos\varepsilon}^{\cos\varepsilon - \sin\varepsilon} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\sqrt{2} \arcsin(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon).$

Stoga je

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(2\sqrt{2} \arcsin(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon)\Big) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi.$$

Kako je

$$J_\varepsilon = 2I_\varepsilon - \int_0^\varepsilon \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx,$$

te kako je $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^\varepsilon \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = 0$ i $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx = 0$, to je

$$\int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

△

Zadatak 2.53 U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_{0\leftarrow}^a \frac{dx}{x^p}, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje. Po definiciji, nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^a \frac{dx}{x^p}$ konvergira ako postoji konačan limes

$$L := \lim_{\xi\to 0+} \int_\xi^a \frac{dx}{x^p}.$$

Promatramo slučajeve.

(i) Ako je $p = 1$, onda je za $0 < \xi < a$ $\displaystyle\int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{\xi}^{a} = \ln a - \ln \xi$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to 0+} (\ln a - \ln \xi) = +\infty,$$

pa nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x}$ divergira.

(ii) Ako je $p \neq 1$, onda je za $0 < \xi < a$ $\displaystyle\int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{\xi}^{a} = \frac{1}{1-p}(a^{1-p} - \xi^{1-p})$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\xi \to 0+} (a^{1-p} - \xi^{1-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{za } p > 1 \\ \frac{a^{1-p}}{1-p} & \text{za } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Dakle, nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $0 < p < 1$, a divergira za $p \geq 1$.

△

Zadatak 2.54 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

(a) $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\to 1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1-\cos x}$ (d) $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{\to 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\, dx$

Rješenje.

(a) Uzmimo $0 < \varepsilon < 1$. Tada je $\displaystyle\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\ln x} = \left[\begin{array}{ll} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 & 1+\varepsilon \mapsto \varepsilon \\ dx = dt & 2 \mapsto 1 \end{array}\right] =$ $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\ln(t+1)}$. Iz nejednakosti

$$\ln(t+1) < t, \quad \forall t > 0$$

slijedi

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\ln(t+1)} > \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{t}.$$

kako je $0 < \varepsilon < 1$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{x}$ divergira, iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ također divergira.

(b) Uzmimo $0 < \varepsilon < 1$. Kako je

$$\left|\cos\frac{1}{1-x}\right| \leq 1, \quad \forall x \neq 1,$$

imamo

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\left|\cos\frac{1}{1-x}\right|}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} \leq \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} = \begin{bmatrix} t = 1-x & 0 \mapsto 1 \\ dt = -\,dx & 1-\varepsilon \mapsto \varepsilon \end{bmatrix} = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}.$$

Kako je $0 < \varepsilon < 1$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}$ konvergira, iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_0^{\to 1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$ apsolutno konvergira, pa stoga i konvergira.

(c) Uzmimo $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Iz nejednakosti

$$\sin x < x, \quad \forall x > 0,$$

slijedi

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \leq 1 - \cos^2 x = \sin^2 x < x^2, \quad \forall x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}],$$

jer je $1 + \cos x \geq 1$, za sve $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga je

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\cos x} > \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2} = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}.$$

Kako je $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ divergira ($p = \frac{3}{2}$), iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\cos x}$ također divergira.

(d) Tvrdimo da nepravi integral konvergira. Dokažimo da oba neprava integrala

$$\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx \quad \text{i} \quad \int_2^{\to 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx$$

konvergiraju. Ocjenjujemo:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} < \frac{5}{\sqrt{x-1}}, \quad \forall x \in \langle 1, 2],$$

jer je

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{3-x}} < \frac{5}{1} = 5, \quad \forall x \in \langle 1, 2].$$

Slično bismo dobili i ocjenu

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} < \frac{10}{\sqrt{3-x}}, \quad \forall x \in [2, 3\rangle.$$

Uzmimo proizvoljne $0 < \varepsilon, \delta < 1$. Zbog prethodnih nejednakosti imamo

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx < 5\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \begin{bmatrix} t = x-1 & 1+\varepsilon \mapsto \varepsilon \\ dx = dt & 2 \mapsto 1 \end{bmatrix} = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

te

$$\int_{2}^{3-\delta} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx < 10\int_{2}^{3-\delta} \frac{dt}{\sqrt{3-t}} = \begin{bmatrix} t = 3-x & 2 \mapsto 1 \\ dx = -dt & 3-\delta \mapsto \delta \end{bmatrix} = 10\int_{\delta}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Kako su $0 < \varepsilon, \delta < 1$ bili proizvoljni, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ konvergira ($p = \frac{1}{2}$), iz usporednog kriterija slijedi da oba neprava integrala

$$\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx \quad \text{i} \quad \int_{2}^{\rightarrow 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx$$

također konvergiraju.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.55 Izračunajte neprave integrale:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(x^3+x)\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx.$$

2.56 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

$$\text{(a)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\ln x} \qquad \text{(b)} \int_e^{+\infty} \frac{\cos x^2 \cdot \ln x}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx \qquad \text{(c)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

2.57 Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ za kojeg nepravi integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{\alpha}{3x+2}\right) dx$$

konvergira, te za taj α izračunajte gornji integral.

2.58 Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna nenegativna funkcija. Pretpostavimo da nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

konvergira.

(a) Mora li nužno vrijediti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

(b) Ako je f uniformno neprekidna na $[a, +\infty\rangle$, dokažite da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.59 Izračunajte neprave integrale:

$$\text{(a)} \int_0^{\to 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{a\leftarrow}^{\to b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad (a<b) \qquad \text{(c)} \int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx.$$

2.60 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

$$\text{(a)} \int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \qquad \text{(b)} \int_0^{1\leftarrow} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(c)} \int_0^{\to\pi} \frac{\sqrt{\pi-x}}{1+\cos x}\,dx \qquad \text{(d)} \int\limits_{0\leftarrow}^{1} \frac{\operatorname{tg} x \ln(1+x)}{\sqrt{x^5}}\,dx.$$