2.7 Primjene određenih integrala

2.7.1 Računanje površina

Poŕsina lika omeđenog pravcima $x = a$ i $x = b$ te krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ je

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Zadatak 2.61 Odredite površinu lika oomedjenog krivuljama:

$$y = 4 - x^2 \quad \text{i } y = x^2 - 2x.$$

Rješenje. Prvo pronađemo presjek krivulja:

$$4 - x^2 = x^2 - 2x \implies (x+1)(x-2) = 0 \implies x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Stoga iz slike vidimo da je

$$P = \int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x)\, dx = \ldots = 9.$$

△

Zadatak 2.62 Odredite površinu lika oomedjenog krivuljom

$$y = x^2 - x - 6,$$

osi apscisom i pravcima $x = -3$ i $x = -2$.

Rješenje. Iz slike se vidi da je

$$P = \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2 - 0)\, dx + \int_{-2}^{1} (0 - (x^2 - x - 6))\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 + x - 2 - 0)\, dx = \ldots = \frac{49}{6}.$$

△

U polarnim koordinatama krivulju zadajemo s

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Tada je površina sektora jednaka

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Zadatak 2.63 Izračunajte površinu omeđenu prvim i drugm zavojem **Arhimedove spirale**:

$$r = a\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje.

$$P = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} (a\varphi)^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a\varphi)^2\, d\varphi = \ldots = 8a^2\pi^3.$$

△

Zadatak 2.64 Odredite površinu **Bernoullijeve lemniskate**:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Rješenje. Koristeći formule za prijelaz iz pravokutnih koordinata u polarne,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

dobijemo

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = r^4 \\ a^2(x^2 - y^2) &= a^2r^2(\cos^2\varphi \sin^2\varphi) = a^2r^2\cos 2\varphi, \end{aligned}$$

pa je jednadžba lemniskate u polarnim koordinatama

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

$$\cos 2\varphi \geq 0, \text{ za } \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$$

Iz slike vidimo da je

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = \ldots = a^2.$$

△

U parametarskim koordinatama krivulju zadajemo s:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]\ .$$

Tada je površina omeđena krivuljom

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

i pravcima $x = x(t_1)$ i $x = x(t_2)$ da na formulom:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt,$$

gdje je $\cdot = \dfrac{d}{dt}$ (derivacija po t).

Zadatak 2.65 Odredite parametarsku jednadžbu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i izračunajte joj površinu.

Rješenje.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Iz slike vidimo da je

$$\begin{aligned} 0 = x(t_1) = a\cos t_1 &\implies t_1 = \frac{\pi}{2} \\ a = x(t_2) = a\cos t_2 &\implies t_2 = 0 \end{aligned}$$

pa je

$$P = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)\dot{x}(t)\,dt = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt = \ldots = ab\pi.$$

△

2.7.2 Računanje duljine luka krivulje

Ako je $y = f(x)$, onda je duljina luka krivulje koja je dio grafa funkcije $y = f(x)$ između točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, gdje je $a < b$ jednaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Zadatak 2.66 Odredite duljinu **astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

gdje je $a > 0$.

Rješenje. Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$\begin{aligned} x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3} && \Big/ \frac{d}{dx} \\ \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' &= 0 \\ \Longrightarrow y' &= \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx \\ &= 4a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}\, dx = \ldots = 6a. \end{aligned}$$

△

U polarnim koordinatama je duljina luka krivulje

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$$

dana formulom

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\, d\varphi,$$

tj. kraće

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi.$$

Zadatak 2.67 Odredite ukupnu duljinu **kardioide**

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje. Sa slike vidimo da je

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (\dot{r})^2}, d\varphi = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 8a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

△

Duljina krivulje zadana parametarskim koordinatama

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. , \ t \in [t_1, t_2]$$

je dana s

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt.$$

Zadatak 2.68 Odredite duljinu jednog svoda **cikloide**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right. , \ t \in [0, 2\pi] , \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = \ldots = 8a. \end{aligned}$$

△

2.7.3 Računanje volumena i oplošja rotacijskih tijela

Ako dio krivulje $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ rotira oko:

- x-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

- y-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Zadatak 2.69 Odredite volumen kugle radijusa $r > 0$.

Rješenje. Kuglu radijusa r dobijemo ako zarotiramo krivulju $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ oko x-osi pa je volumen kugle

$$V_x = \pi \int_{-r}^{r} y^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi(r^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^r$$
$$= 2\pi(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

△

Zadatak 2.70 Odredite volumen **torusa** nastalog rotacijom kružnice

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2$$

oko y-osi.

Rješenje. Iz slike se vidi da je

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - y^2})^2\, dy - \pi \int_{-r}^{r} (R - \sqrt{r^2 - y^2})^2\, dy$$
$$= 2\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \ldots = 2R\pi \cdot r^2 \pi$$

△

Ako dio krivulje $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ rotira oko x-osi, onda je površina nastale rotacijske plohe dana formulom:

$$V_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Zadatak 2.71 Nađite oplošje kugle radijusa $r > 0$.

Rješenje. Kuglu radijusa r dobijemo ako zarotiramo krivulju $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ oko x-osi pa je oplošje kugle

$$S_x = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 4r^2\pi$$

△

Ako krivulja zadana u polarnim koordinatama

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

rotira oko polarne osi, onda je volumen dobivenog tijela jednak

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Zadatak 2.72 Izračunajte volumen tijela koji nastaje rotacijom krivulje

$$r = a \sin 2\varphi$$

oko polarne osi.

Rješenje.

$$\sin 2\varphi \geq 0, \quad \text{za } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} V = 2V_1 &= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} (a \sin 2\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{32\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{32\pi}{3} a^3 \int_0^1 t^4 (1 - t^2) \, dt = \ldots = \frac{64\pi}{105} a^3 \end{aligned}$$

△

Ako krivulja zadana u polarnim koordinatama

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

rotira oko polarne osi, onda je oplošje dobivenog rotacijskog tijela jednak

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin\varphi \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} \, d\varphi.$$

Zadatak 2.73 Odredite površinu koja nastaje rotacijom kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

oko polarne osi.

Rješenje.

$$S = 2\pi \int\limits_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi$$
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_0^\pi (1+\cos\varphi)^{3/2}\sin\varphi\,d\varphi = \ldots = \frac{32}{5}a^2\pi$$

△

Ako parametarski zadana krivulja

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [t_1, t_2]$$

rotira oko

- x-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_x = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \dot{x}(t)\,dt$$

- y-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_y = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)^2 \dot{y}(t)\,dt$$

Zadatak 2.74 Izračunajte volumen **elipsoida** nastalog rotacijom elipse

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

oko x-osi.

Rješenje. Iz slike vidimo da je

$$-a = x(t_1) = a\cos t_1 \implies t_1 = -\pi$$
$$a = x(t_2) = a\cos t_2 \implies t_2 = \pi$$

pa je

$$V_x = \pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} (b\sin t)^2(-a\sin t)\,dt = ab^2\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} sin^3 t\,dt = \ldots = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

△

Napomena. Ako je $a = b = r$, onda je elipsoid zapravo kugla radijusa r pa je njen volumen jednak $\frac{4}{3}r^3\pi$. Ako parametarski zadana krivulja

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

rotira oko

- x-osi, onda je oplošje nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

- y-osi, onda je oploqv sje nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$S_y = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

Zadatak 2.75 Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom **astoride**

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Rješenje. Sa slike se vidi da je

$$\begin{aligned} S_x &= 2\cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt \\ &= 12a^2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\, dt = 12a^2\pi \int_0^1 s^4\, ds = 12a^2\pi\pi \frac{s}{5}\bigg|_0^1 = \frac{12a^2\pi}{5} \end{aligned}$$

△

Zadaci za vježbu

2.76 Odredite površinu lika omeđenog parabolom

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

i njenim tangentama povučenim u točkama $A(0, -3)$ i $B(3, 0)$.

(Rj. $\frac{9}{4}$)

2.77 Nađite površinu između krivulja

$$y = 2 - x^2 \quad \text{i } y^3 = x^2.$$

(Rj. $\frac{32}{15}$)

2.78 Nađite površinu između krivulja

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{i } y = \frac{x^2}{2}.$$

(Rj. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$)

2.79 Izračunajte površinu omeđenu "ružom s 3 latice":

$$r = a \sin 3\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $\frac{a^2\pi}{4}$)

2.80 Izračunajte površinu omeđenu **kardioidom**:

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $\frac{3a^2\pi}{2}$)

2.81 Odredite površinu omeđenu jednim lukom **cikloide**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \geq 0\,, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

i osi apscisa.

(Rj. $3a^2\pi$)

2.82 Nađite duljinu luka krivulje

$$y = \ln \cos x,$$

za $x \in [0, a]$, gdje je $a \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

(Rj. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$)

2.83 Odredite duljinu prvog zavoja **Arhimedove spirale**

$$r = a\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$)

2.84 Izračunajte duljinu prvog zavoja **logaritamske spirale**

$$y = e^{\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi].$$

(Rj. $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$)

2.85 Odredite parametarsku jednadžbu **astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

i izračunajte joj diljinu.

(Rj. $8a$)

2.86 Izračunajte duljinu luka parabole $y = \frac{x^2}{2}$ od točke $(0,0)$ do točke $(2,2)$.

(Rj. $\frac{1}{2}(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))$)

2.87 Odredite površinu omeđenog krivuljama $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$ te osi apscisa.(Uputa: integrirajte po varijabli y)

(Rj. $\sqrt{2} - 1$)

2.88 Odrete površinu lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$, ali izvan kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

(Rj. π)

2.89 Odrete površinu lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$ i unutar kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

(Rj. $\frac{5\pi}{4}$)

2.90 Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ i x-osi oko y-osi.

(Rj. $2\pi^2$)

2.91 Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = x^4$ i pravcem $y = 1$ oko osi y.

(Rj. $\frac{2\pi}{3}$)

2.92 Odredite volumen **rotacijskog paraboloida** koji nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $x = y^2$ i pravcem $x = a$, za $a > 0$ oko x-osi.

(Rj. $\frac{a^2\pi}{2}$)

2.93 Odredite volumen tijela nastalog rotacijom kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

oko polarne osi.

(Rj. $\frac{8}{3}\pi a^3$)

2.94 Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom dijela krivulje $y = \frac{x^3}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y.

(Rj. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$)