3

Red

3.1 Osnovna svojstva

Definicija. **Red** je uređeni par $((a_n),(S_n))$ niza (a_n) i niza (S_n) **parcijalnih suma** definiranih sa

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Red označavamo sa $\sum a_n$. Kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (S_n), čiji limes zovemo **suma reda** i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_n S_n.$$

Ako niz parcijalnih suma reda nije konvergentan, onda kažemo da red **divergira**.

Primjer.

(a) Neka je $q \in \mathbb{R}^d$. Red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ zovemo **geometrijski red** i on konvergira za $q \in \langle -1, 1\rangle$.

Zaista,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Dakle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zovemo **harmonijski red** i on divergira, točnije $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Clanoce niza parcijalnih suma harmonijskog reda se ponekad označavaju s (H_n) i zovu se

harmonijski brojevi. Može se pokazati da je

$$\lim_n (H_n - \ln n) = \lim_n (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = \gamma \approx 0.57721.$$

γ se zove Euler-Mascheronijeva konstanta.

Teorem. (**Nužni uvjet konvergencije reda**) Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda je $\lim_n a_n = 0$. ■

Napomena.

(a) Obrat u prethodnom teoremu ne vrijedi. Npr. harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{n}$ divergira, ali je $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

(b) Ako niz (a_n) nije konvergentan ili ako je $\lim_n a_n \neq 0$, onda iz gornjeg teorema slijedi da red $\sum a_n$ divergira.

Primjer. Geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty}$ divergira za $|q| \geq 1$;

- za $q \leq -1$ niz (q^n) nije konvergentan,
- za $q = 1$ je $\lim_n q^n = 1$,
- za $q > 1$ je $\lim_n q^n = +\infty$,

jer ni u jednom od ovih slučajeva nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije reda.

Zadatak 3.1 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, gdje je $m \in \mathbb{N}$

Rješenje.

(a) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1}$$

pa je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Stoga je

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

pa je red konvergentan i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(b) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$

pa je za $n \geq 3$

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2} \right) = 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-1} - 3\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$$
$$= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}$$
$$= 2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} - 3\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k}$$
$$= \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} \to -4, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Dakle, red je konvergentan i $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = -4.$

(c) $\lim_n (-1)^n$ ne postoji (niz ima 2 gomilišta: -1 i 1) pa nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije $\Longrightarrow$ red je divergentan

(d) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{m+n}} = \frac{2}{3^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^m} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{m-1}}.$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.2 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \text{gdje je } \alpha \in \langle 0, \pi\rangle$

3.3 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), \quad \text{gdje je } a > 0$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$