3.2 Kriteriji konvergencije reda

3.2.1 Leibnizov kriterij

Teorem. (**Leibnizov kriterij**) Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takvih da

- postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n+1} < a_n$, za sve $n \geq m$,
- $\lim\limits_n a_n = 0$.

tada red $\sum(-1)^n a_n$ konvergira. ∎

Zadatak 3.4 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$$

Rješenje.

(a) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Vrijedi:

- $a_{n+1} < a_n$, za $n \geq 1$,
- $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

Leibnizov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

(b) $a_n = \dfrac{1}{n - \ln n}$
Vrijedi:

- $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x(x-\ln x)^2} < 0, \quad \text{za } x > 1$$

Dakle, f je strogo padajuća na $[1, +\infty\rangle$ pa je $a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}$, za sve $n \geq 1$

- $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \dfrac{1}{n - \ln n} = \lim\limits_n \dfrac{1}{\ln \frac{e^n}{n}} = 0$,

Leibnizov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

△

Definicija. Kažemo da red $\sum a_n$ **apsolutno konvergira** ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Teorem. Apsolutno konvergentan red je konvergentan. ■

Definicija. Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali red $\sum |a_n|$ divergira, onda kažemo da red $\sum a_n$ **uvjetno konvergira**.

Zadatak 3.5 Ispitajte apsolutnu i uvjetnu konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$$

Rješenje.

(a) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira po Leibnizovom kriteriju, dok je red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonijski pa divergira. Dakle, zadani red je uvjetno konvergentan.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$ pa red apsolutno konvergira (pa onda i konvergira).

(c) $\displaystyle\lim_n \frac{(-1)^{n-1}}{6n-5}$ ne postoji, jer pripadni niz ima dva gomilišta $-\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{6}$. Dakle, nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije pa red divergira.

△

3.2.2 D'Alembertov kriterij

Teorem. (**D'Alembertov kriterij**) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. ■

Korolar. Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ red $\sum a_n$ apsolutno konvergira
- $L > 1$ (može i $L = +\infty$) $\implies$ red $\sum a_n$ divergira
- $L = 1 \implies$ nema odluke ∎

Primjer.

(a) Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergira, ali

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1.$$

(b) Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergira, ali

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Zadatak 3.6 Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$

Rješenje.

(a)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

D'Alembertov kriterij $\implies$ red konvergira

(b)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}}{\frac{n!}{2^n+1}} = (n+1)\frac{2^n}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \to +\infty > 1$$

D'Alembertov kriterij $\Longrightarrow$ red divergira

(c)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}}{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1$$

D'Alembertov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

$\triangle$

3.2.3 Cauchyev kriterij

Teorem. (**Cauchyev kriterij**) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q,\ \forall n \ge m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1,\ \forall n \ge m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. $\blacksquare$

Korolar. Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji

$$L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ red $\sum a_n$ apsolutno konvergira
- $L > 1$ (može i $L = +\infty$) $\implies$ red $\sum a_n$ divergira
- $L = 1 \implies$ nema odluke $\blacksquare$

Napomena. Ako D'Alembertov kriterij daje odluku, onda odluku daje i Cauchyev kriterij. Drugim riječima, Cauchyev kriterij je jači.

Zadatak 3.7 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$$

Rješenje.

(a)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{-2} \to e^{-2} < 1$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

(b)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red divergira

(c)

$$\begin{aligned}\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_n \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}} = \lim_n \frac{e^{\frac{\ln 2n-1}{n}}}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln 2x-1}{x}}}{\sqrt{2}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{2n-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\end{aligned}$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

$\triangle$

Napomena. Ako je za neki $q \in \langle 0, 1\rangle$

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

onda za $0 < \varepsilon < \frac{1-q}{2}$ po definiciji limesa superiora postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q + \varepsilon < \frac{1+q}{2} < 1$$

pa red apsolutno konvergira po Cauchyevom kriteriju. Slično se pokaže da ako vrijedi

$$\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q,$$

onda red također apsolutno konvergira.

Zadatak 3.8 Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum a_n,$$

ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^{1-k}, & n = 2k-1 \\ -3^{1-2k}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Rješenje. Primijetimo da se ne može primijeniti Lebnizov kriterij, jer pripadni niz nije strogo padajući.
Niz $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ima 2 konvergentna podniza:

- $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 2^{\frac{1-k}{2k-1}} \to 2^{-\frac{1}{2}}$.
- $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 3^{\frac{1-2k}{2k}} \to 3^{-1}$

pa je $\limsup\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{2^{-\frac{1}{2}}, 3^{-1}\} = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, odakle zaključujemo da red apsolutno konvergira.

△

3.2.4 Integralni kriterij konvergencije reda

Teorem. (**Cauchy**) Neka je $f\colon [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija, gdje je $a > 0$. Tada

$$\text{red } \sum f(n) \text{ konvergira} \iff \text{nepravi integral } \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ konvergira .}$$

■

Zadatak 3.9 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Rješenje.

(a) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

$\cdot$ $f'(x) = -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0$, za $x \geq 2 \implies f$ pada na $[2, +\infty\rangle$

$$\cdot \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{2}^{r} \frac{dx}{x\ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & r \mapsto \ln r \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln r} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln r} = \lim_{r\to+\infty} (\ln\ln r - \ln\ln 2) = +\infty$$

integralni kriterij $\Longrightarrow$ red divergira

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

$$\cdot\ f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} < 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > \sqrt{e}$$

$\Longrightarrow$ f pada na $[2, +\infty\rangle$

$$\cdot \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{2}^{r} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & r \mapsto \ln r \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln r} te^{-t}\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-t}\,dt & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} (-te^{-t}\Big|_{\ln 2}^{\ln r} + \int_{\ln 2}^{\ln r} e^{-t}\,dt) =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} (-\frac{\ln r}{r} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}) = \frac{1+\ln 2}{2}$$

integralni kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

△

Zadatak 3.10 Ispitajte konvergenciju **Dirichletovog reda**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

u ovisnosti o parametru $p > 0$.

Rješenje. $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$

$f'(x) = -\dfrac{'}{x^p + 1} < 0$, za $x \geq 1 \Longrightarrow f$ pada na $[1, +\infty\rangle$

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$

integralni kriterij $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

△

Napomena. Ako stavimo $p = 1$, onda je ovo jos jedan dokaz da harmonijski red divergira.

3.2.5 Usporedni kriterij

Teorem. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoje $m \in \mathbb{N}$ i $K > 0$ takvi da je

$$a_n \leq K \cdot b_n, \ \forall n \geq m.$$

(a) Ako $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum a_n$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(b) Ako $\sum a_n$ divergira, onda divergira i $\sum b_n$. ■

Korolar. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty].$$

(a) Ako je $L \in [0, +\infty\rangle$ i ako red $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$.

(b) Ako je $L \in \langle 0, +\infty]$ i ako red $\sum b_n$ divergira, onda divergira i red $\sum a_n$.

■

Zadatak 3.11 Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum \frac{1}{2n-1}$ (b) $\sum \frac{\ln n}{n^3+n+1}$ (c) $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$

(d) $\sum (\ln(n+1) - \ln n)$ (e) $\sum \sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$ (f) $\sum \operatorname{arctg} 2^{-n}$

(g) $\sum \frac{\sqrt{2n + \sqrt{n^2+1}}}{n^2}$

Rješenje.

(a) $\lim_n \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$
$\sum \frac{1}{n}$ divergira $\Longrightarrow$ red divergira po usporednom kriteriju

(b) $\frac{\ln n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, za $n \geq 1$
$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira $\Longrightarrow$ red konvergira po usporednom kriteriju

(c) $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, za $n \geq 1$
$\sum \frac{1}{2^n}$ konvergira $\Longrightarrow$ red konvergira po usporednom kriteriju

(d) $\sum(\ln(n+1) - \ln n) = \sum \ln(1+\frac{1}{n})$

$$\lim_n \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n}$ divergira $\implies$ red divergira po usporednom kriteriju

(e) $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \frac{n^3+1-n^3}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}$

$$\lim_n \frac{\sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

(f) $$\lim_n \frac{\operatorname{arctg} 2^{-n}}{2^{-n}} = 1$$

$\sum 2^{-n}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

(g) $$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \sqrt{2+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{3}$$

$\sum \sqrt{1} n^{3/2}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

△

Zadaci za vježbu

3.12 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$$

(Rj. (a) K, (b) K)

3.13 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n+1}} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \ (a>0)$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$$

(Rj. (a) K, (b) K, (c) K, (d) K, (e) K, (f) K, (g) K)

3.14 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{sh}\frac{1}{n} \cos n \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

(Rj. (a) K, (b) D, (c) K, (d) D, (e) K, (f) K, (g) D)

3.15 Ispitajte uvjetnu i apsolutnu konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}} \qquad \text{(b)} \sum \frac{(-1)^n n^3}{3^n} \qquad \text{(c)} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(d)} \sum \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}} \qquad \text{(e)} \sum (\sin \sin n)^n$$

3.16 Pretpostavimo da je $\sum a_n$ konvergentni red s pozitivnim članovima. Koji od sljedećih redova nužno konvergiraju? (U svakom podzadatku ili dokažite da novi red mora konvergirati ili nađite primjer reda $\sum a_n$ za kojeg novi red divergira.)

(a) $\sum \frac{a_n}{n}$ (b) $\sum \frac{1}{n^{100} a_n}$ (c) $\sum \operatorname{sh} a_n$

(d) $\sum a_n \sin n$ (e) $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ (f) $\sum \sqrt{\frac{a_n}{n}}$

3.17 Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan konvergentan red. Dokažite da je tada konvergentan i red $\sum a_n^2$. Vrijedi li obrat?

3.18 Neka je $\sum a_n$ konvergentan red takav da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n > a_{n+1} > 0, \ \forall n \geq m.$$

Dokažite da je $\lim\limits_{n} n\, a_n = 0$.

3.19 Neka je (a_n) pozitivan strogo padajući niz. Dokažite Cauchyev kondenzacijski test:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergira}$$

3.20 Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergentni redovi. Može li red $\sum (a_n - b_n)$ biti konvergentan?