3.3 Redovi potencija i Taylorovi redovi

Definicija. **Red potencija** oko točke $c \in \mathbb{R}$ je red oblika

$$\sum a_n(x-c)^n, \tag{3.1}$$

gdje je $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ niz realnih brojeva. Kod redova potencija je uobičajeno da indeksi n osim prirodnih brojeva uključuju i 0.

U daljnjem ćemo sa $\mathcal{I}$ označavati skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red realnih brojeva $\sum a_n(x-c)^n$ konvergira. $\mathcal{I}$ je neprazan skup, jer red potencija (3.1) konvergira za $x = c$ i suma mu je a_0.

Definicija. Za niz funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, definiranih na intervalu I kažemo da konvergira **lokalno uniformno** na I ako niz $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergira uniformno na svakom podsegmentu $J \subseteq I$.

Teorem. **(Prvi Abelov teorem)** Ako red potencija (3.1) konvergira za $\alpha \neq c$, onda taj red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na čitavom otvorenom intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$, gdje je $r := |\alpha - c|$.

Iz provg Abelovog teorema slijedi da je $\mathcal{I}$ interval simetričan s obzirom na točku c. Taj interval zovemo **interval konvergencije** reda potencija (3.1).

Radijus konvergencije R reda potencija (3.1) definiramo kao polovicu duljine intervala $\mathcal{I}$. Preciznije,

$$R := \sup\{|c-\alpha| : \ \alpha \in \mathcal{I}\} \in [0, +\infty].$$

O tome hoće li red (3.1) konvergirati u rubovima intervala $\mathcal{I}$ (tj. u točkama $c-R$ i $c+R$) ovist će o samom redu.

Rezimirajmo,

Korolar. Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i neka je R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi

(a) Red (3.1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle c-R, c+R\rangle$.

(b) Red (3.1) divergira za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x-c| > R$.

Sljedeći teorem nam daje jednostavnu formulu za računanje radijusa konvergencije reda (3.1).

Teorem. Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi tzv. **Cauchy-Hadamardova formula**:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.2}$$

pri čemu dogovorno uzimamo $R := 0$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, a $R := +\infty$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Primjer.

(a) Promotrimo geometrijski red

$$\sum x^n. \tag{3.3}$$

Ovdje je $c = 0$ i $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Stoga red (3.3) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ prema funkciji $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, tj. vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Kako u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ red (3.3) ne konvergira (opći član ne teži prema 0), zaključujemo da je njegov interval konvergencije $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$.

(b) Promotrimo red potencija

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n. \tag{3.4}$$

Ovdje je $c = 1$ i $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}} = 1,$$

jer je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Stoga red (3.4) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Provjerimo konvergenciju reda (3.4) i u rubnim točkama intervala $\langle 0, 2\rangle$.

Za $x = 0$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

koji divergira (usporedni kriterij sa harmonijskim redom).

Za $x = 2$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.4) je $\mathcal{I} = \langle 0, 2]$.

Napomena. Ukoliko postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in [0, +\infty]$, tada postoji limes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

U tom slučaju je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pa radijus konvergencije R reda potencija $\sum a_n(x-c)^n$ možemo računati koristeći formulu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{3.5}$$

Zadatak 3.21 Odredite radijus konvergencije i intervale konvergencije redova potencija

(a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ $\qquad$ (*b*) $\sum \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n x^n$ $\qquad$ (c)* $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$.

Rješenje.

(a) za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(n+1)!^2(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4,$$

kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n \tag{3.6}$$

jednak je $R = 4$. Stoga red (3.6) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -3, 5 \rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -3, 5 \rangle$ riječ je o redovima

$$\sum (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \ (x = -3) \quad \text{te} \quad \sum \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \ (x = 5),$$

divergiraju, jer je
$$\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$
pa specijalno nije zadovoljen nužan uvjet za konvergenciju reda.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.6) je interval $\mathcal{I} = \langle -3, 5 \rangle$.

(b) Prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) za radijus konvergencije R reda potencija
$$\sum \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n (x + 2)^n \tag{3.7}$$
vrijedi
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} = \frac{3}{4},$$
pa je $R = \dfrac{4}{3}$. Stoga red potencija (3.7) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3} \rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3} \rangle$ riječ je o redovima
$$\sum (-1)^n \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n \ (x = -\frac{10}{3}) \quad \text{te} \quad \sum \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n \ (x = -\frac{2}{3}),$$
koji divergiraju, budući da nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju reda:
$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n = 1.$$
Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.7) je $\mathcal{I} = \langle -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3} \rangle$.

(c) Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \dfrac{n!}{n^n}$. Tada je
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)! n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \longrightarrow \frac{1}{e},$$
kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija
$$\sum \frac{n^n}{n!} x^n \tag{3.8}$$
jednak je $R = \dfrac{1}{e}$, pa red potencija (3.8) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e} \rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e} \rangle$ riječ je o redovima
$$\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} \ (x = -\frac{1}{e}) \quad \text{te} \quad \sum \frac{n^n}{e^n n!} \ (x = \frac{1}{e}).$$

Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$b_n := \frac{n^n}{e^n n!}.$$

Tada je

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa je niz $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}+}$ strogo padajuć. Nadalje, nejednakosti

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0,$$

dobivamo

$$-\frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa je

$$e^{-\frac{1}{2n}} < \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Iteriranjem nejednakosti (3.9) dobivamo

$$b_1 e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < b_1 e^{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

gdje je $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj. Prema Cauchyjevom integralnom kriteriju red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan i njegovu sumu označimo sa C. Kako je $b_1 = e^{-1}$, iz (3.10) dobivamo

$$\frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Kako je

$$\ln(1+n) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

imamo

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < e^{-\frac{1}{2}H_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa iz nejednakosti (3.11) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{e^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Napokon, iz (3.12) slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pa red $\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum (-1)^n b_n$ konvergira (Leibnizov kriterij). Također, (3.12) povlači da red $\sum \frac{n^n}{e^n n!} = \sum b_n$ divergira (usporedni kriterij s redom $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$). Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.8) je $\mathcal{I} = \langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$.

$\triangle$

Ako je (3.1) red potencija sa radijusom konvergencije R, iz Cauchy-Hadamardove formule slijedi da redovi potencija

$$\sum na_n(x-c)^{n-1}, \tag{3.13}$$

$$\sum \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \tag{3.14}$$

imaju radijus konvergencije također jednak R. Za red potencija (3.13) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **deriviranjem član po član**, a za red potencija (3.14) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **integriranjem član po član**.

Teorem. Neka red potencija $\sum a_n(x-c)^n$ ima radijus konvergencije $R > 0$ i stavimo $\mathcal{J} := \langle c-R, c+R\rangle$. Tada je funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

derivabilna na $\mathcal{J}$ i vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.15}$$

Nadalje, vrijedi

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.16}$$

Korolar. Neka je f definirana kao u prethodnom teoremu. Funkcija f je klase $C^\infty(\mathcal{J})$ i za svako $m \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-c)^{n-m}, \quad \forall x \in \mathcal{J}.$$

Odavde za $x = c$ dobivamo

$$a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Definicija. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $c \in I$. Red potencija

$$T[f,c] := \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f oko točke c.

Ako je $c = 0$, onda se Taylorov red $T[f, 0]$ zove **Maclaurinov red** od f i označava s $T[f]$. Dakle,

$$T[f] := T[f, 0] = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Općenito Taylorov red $T[f, c]$ funkcije $f \in C^\infty(I)$ može divergirati za svako $x \neq c$, odnosno konvergirati prema nekoj drugoj funkciji.

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Kako je $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, f je neprekidna u 0. Nadalje, f je očito klase C^∞ na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažimo da postoje sve n-te derivacije $f^{(n)}(0)$, da su sve funkcije $f^{(n)}$ neprekdine u 0 i da vrijedi

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.17}$$

Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.18}$$

Naime, iz (3.18) će tada slijediti da je za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ funkcija $f^{(n)}$ derivabilna u 0, pa stoga i neprekidna u 0.

Podsjetimo se da za svaki polinom p stupnja $\deg p \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0, \tag{3.19}$$

što se može jednostavno dokazati primijenjujući L'Hospitalovo pravilo $(\deg p + 1)$-puta. Indukcijom dokažimo da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ postoji polinom p_n takav da vrijedi

$$f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1}) f(x), \quad \forall x > 0. \tag{3.20}$$

Za $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da (3.20) vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}[p_n(x^{-1}) f(x)] = [-p_n'(x^{-1}) + p_n(x^{-1})] x^{-2} f(x) = p_{n+1}(x^{-1}) f(x), \quad \forall x > 0.$$

gdje je p_{n+1} polinom definiran s $p_{n+1}(x) := x^2(p_n(x) - p_n(x)')$.

Stoga je

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f^{(n)}(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{1}{h}p_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{xp_n(x)}{e^x}=0,\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (3.19). Time smo dokazali tvrdnju (3.17), pa je $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Tvrdimo da Maclaurinov red $T[f]=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ od f ne konvergira prema f ni na kojem otvorenom intevralu I oko 0. Pretpostavimo suprotno. Tada možemo naći $\delta>0$ takav da vrijedi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad \forall x\in\langle-\delta,\delta\rangle. \tag{3.21}$$

Prema dokazanom je $f^{(n)}(0)=0$, za sve $n\in\mathbb{Z}_+$. Iz (3.21) slijedi $f(x)=0$, za sve $x\in\langle-\delta,\delta\rangle$, što je kontradikcija s činjenicom da je $f(x)>0$, za sve $x>0$.

Definicija. Za funkciju $f\in C^\infty(I)$ definiranu na otvorenom intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$ kažemo da je **analitička u točki** $c\in I$, ako njen Taylorov red

$$T[f,c]=\sum\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ima radijus konvergencije $R>0$ i ako postoji $0<\delta\leq R$ takav da vrijedi

$$f(x)=T[f,c](x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,\quad \forall x\in\langle c-\delta,c+\delta\rangle\cap I.$$

Ukoliko je f analitička u svakoj točki $c\in I$, onda kažemo da je f **analitička** na I. Skup svih analitičkih funkcija na I označavamo s $C^\omega(I)$.

Napomena. Skup svih analitičkih funkcija $C^\omega(I)$ je dosta "siromašniji" od skupa svih funkcija klase $C^\infty(I)$. Npr. u prethodnom primjeru smo vidjeli da za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x):=\begin{cases}0 & \text{za } x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x>0\end{cases}$$

vrijedi $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, ali da f nije analitička u točki 0. Štoviše, može se dokazati da postoji funkcija $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ čiji Taylorov red $T[f,c]$ ima radijus konvergencije jednak 0, za svaku točku $c\in\mathbb{R}$.

Teorem. Neka je $\sum a_n(x-c)^n$ red potencije sa radijusom konvergencije $R>0$ i stavimo $\mathcal{J}:=\langle c-R,c+R\rangle$. Tada je funkcija $f:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$ definirana s

$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

analitička na čitavom intervalu $\mathcal{J}$. Štoviše, za svako $\alpha \in \mathcal{J}$ Taylorov red

$$T[f, \alpha] = \sum \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ima radijus konvergencije $\rho \geq R - |c - \alpha|$ i vrijedi

$$f(x) = T[f, \alpha](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \quad \forall x \in \langle \alpha - \rho, \alpha + \rho \rangle.$$

Korolar. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako je f analitička u točki $c \in I$ tada postoji otvoreni interval J oko c sadržan u I takav da je f analitička na J.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija $f \in C^\infty(I)$ bila analitička na I.

Teorem. Neka je $f \in C^\infty(I)$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Tada je $f \in C^\omega(I)$ ako i samo ako za svaki $c \in I$ postoji $\delta > 0$ i konstante $C > 0$ i $r > 0$ takve da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\frac{n!}{r^n}, \quad \forall x \in J := \langle c - \delta, c + \delta \rangle \cap I. \tag{3.22}$$

U tom slučaju vrijedi

$$f(x) = T[f, c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J \cap \langle c - r, c + r \rangle. \tag{3.23}$$

Korolar. Neka je $f \in C^\infty(I)$, gdje je I otvoren interval. Ako za za svaki $c \in I$ postoje $\delta > 0$ i $C > 0$ takvi da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(c)| \leq C \quad \forall x \in J := \langle c - \delta, c + \delta \rangle \cap I, \tag{3.24}$$

tada je $f \in C^\omega(I)$ i vrijedi

$$f(x) = T[f, c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.25}$$

Zadatak 3.22 Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitička na $\mathbb{R}$ i odredite njen Maclaurinov red $T[f]$, ako je

(a)$f(x) := e^x$ (b)$f(x) := \sin x$ (c)$f(x) := \operatorname{ch} x$.

Rješenje. Kako bi dokazali da je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$, dovoljno je dokazati da Maclaurinov red $T[f]$ od f konvergira prema f u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

(a) Imamo $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je $f^{(n)}(0) = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^n}{n!}$$

dan Maclaurinov red funkcije f.

Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljni $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = e^x < e^\delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = e^{x_0}$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Imamo $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{ako } n \equiv 0, 2 \pmod 4 \\ 1 & \text{ako } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{ako } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Kako za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| = |\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)| \leq 1 =: C, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{ako } 2 \mid n \\ \operatorname{sh} x & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ako } 2 \mid n \\ 0 & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljan $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq \operatorname{ch} x < \operatorname{ch} \delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = \operatorname{ch} x_0$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\triangle$

Slično bismo pokazali da su funkcije $x \mapsto \cos x$ i $x \mapsto \operatorname{sh} x$ analitičke na $\mathbb{R}$ i da vrijedi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{i} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Napomena. Primijetimo da Maclaurinov red svake od spomenutih funkcija

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

konvergira prema pripadnoj funkciji za sve $x \in \mathbb{R}$. To ne mora nužno vrijediti za svaku funkciju $f \in C^\omega(\mathbb{R})$. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}$$

je analitička na $\mathbb{R}$, dok njen Maclaurinov red

$$T[f] = \sum (-1)^n x^{2n}$$

ima radijus konvergencije $R = 1$. Potpuno objašnjenje tog fenomena dobit ćete na kompleksnoj analizi.

Teorem. Neka su $f, g \in C^\omega(I)$ analitičke funkcije na otvorenom intervalu I i neka su $c \in I$, $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \quad \forall x \in J_1 := \langle c - \delta, c + \delta \rangle \cap I,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n, \quad \forall x \in J_2 := \langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle \cap I,$$

gdje su

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Stavimo $J := J_1 \cap J_2$. Tada vrijedi

(a) Funkcija $\alpha f + \beta g$ je analitička na J za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.26}$$

(b) Funkcija $f \cdot g$ je analitička na J i vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n, \quad \forall x \in J, \tag{3.27}$$

gdje su koeficijenti c_n dani s

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorem. (Drugi Abelov teorem) Pretpostavimo da red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira prema L za neko $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada

(a) Red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira

- uniformno na $[0, r]$, ako je $r > 0$,
- uniformno na $[r, 0]$, ako je $r < 0$

(b) Vrijedi

- $\displaystyle\lim_{x \to r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, ako je $r > 0$,
- $\displaystyle\lim_{x \to r+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, ako je $r < 0$.

Zadatak 3.23 Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$ ako je

(a) $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$	$(b) f(x) := \sin^2 x$	(c) $f(x) := \ln(1+x)$
(d) $f(x) := \operatorname{arctg} x$	(e) $f(x) := \ln(1+x+x^2)$	(f) $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

Odredite interval konvergencije $\mathcal{I}$ reda $T[f]$ i ispitajte vrijedi li $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

Rješenje.

(a) Kako je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Imamo

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(c) Krenimo od reda $\sum (-1)^n t^n$. Njegov radijus konvergencije je $R = 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum(-1)^n x^n$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = -1$ riječ je o redu

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

koji divergira, jer harmonijski red $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergira

Za $x = 1$ riječ je o redu

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I} = \langle -1, 1]$.

Ostaje još provjeriti vrijedi li $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = T[f](1) = f(1) = \ln 2$. No to slijedi iz drugog Abelovog teoerema, budući da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \lim_{x\to 1-}\ln(1+x) = \ln 2.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f] = \sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(d) Krenimo od reda $\sum(-1)^n t^{2n}$. Njegov radijus konvergencije je $R = 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt = \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Dakle, imamo

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum (-1)^n x^{2n}$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = -1$ i $x = 1$ riječ je redom o redovima

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \quad \text{i} \quad \sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

koji konvergiraju prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I} = [-1, 1]$.

Pozivajući se na drugi Abelov teorem, zaključujemo da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} = \lim_{x \to -1+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to -1+} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2n+1} = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \to -1+} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = [-1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(e) Za $x \neq 1$ imamo

$$1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x},$$

pa je

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln \frac{1 - x^3}{1 - x} = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x), \quad \forall x < 1.$$

Prema (c) je

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

pa je

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{i} \quad \ln(1 - x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.26) je

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{ako } 3 \mid n, \\ \frac{1}{n} & \text{ako } 3 \nmid n \end{cases} \tag{3.28}$$

Odredimo radijus konvergencije R reda $T[f] = \sum a_n x^n$. Očito je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pa je $R = (\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = 1$. Dokažimo da red $T[f]$ konvergira i u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = 1$ riječ je o redu $\sum a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Želimo dokazati da je niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dovoljno je dokazati da je podniz $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}.$$

Stoga je

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako red $\sum \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}$ konvergira (granični kriterij s $\sum n^{-3}$), zaključujemo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n}$. Dakle, red $\sum a_n$ je uistinu konvergentan. Iz drugog Abelovog teorema slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-} \ln(1 + x + x^2) = \ln 3.$$

Slično bismo pokazali da red $T[f]$ konvergira i za $x = -1$, te da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to -1+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to -1+} \ln(1 + x + x^2) = \ln 1 = 0.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f] = \sum a_n x^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s (3.28), njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = [-1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(f) Imamo

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Odredimo Maclaurinove redove funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ i $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$. Imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.15) je

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (2n) x^{2n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.29) i (3.26) slijedi

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (1+n) x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n}$ je jednak 1. Nadalje, kako red $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ divergira, njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$.

Sve zajedno, imamo

$$T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

$\triangle$

Zadatak 3.24 Funkciju f razvijte Taylorov red $T[f, c]$ oko točke c, ako je

$$\text{(a)} f(x) := \frac{1}{(1-x)^2},\ c = -2 \quad (b) f(x) := \frac{x+3}{x^2+3x+2},\ c = -4 \quad \text{(c)} f(x) := \frac{e^x}{x},\ c = 1.$$

Rješenje.

(a) Stavimo $y := x + 2$. Tada je $x = y - 2$, pa je

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-(y-2)^2} = \frac{1}{(3-y)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2}. \tag{3.30}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad \forall t\in\langle -1,1\rangle,$$

prema (3.15) je

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n,\quad \forall t\in\langle -1,1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{y}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n,\quad \forall y\in\langle -3,3\rangle.$$

Iz (3.30) slijedi

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n,\quad \forall x\in\langle -5,1\rangle.$$

Dakle,

$$T[f,-2]=\sum\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n.$$

(b) Stavimo $y := x+4$. Tada je $x = y-4$. Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2}=\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{y-3}-\frac{1}{y-2}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{y}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{y}{2}}. \tag{3.31}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad \forall t\in\langle -1,1\rangle,$$

to je

$$\frac{1}{1-\frac{y}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n,\quad \forall y\in\langle -3,3\rangle,$$

$$1-\frac{y}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n,\quad \forall y\in\langle -2,2\rangle.$$

Iz (3.31) i (3.26) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2+3x+2}&=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)y^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,\quad \forall x\in\langle -2,2\rangle.\end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f,-4]=\sum\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$

(c) Stavimo $y := x - 1$. Tada je $x = y + 1$. pa je

$$e^x = e^{y+1} = e \cdot e^y = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} y^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.27) je

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{y+1} \cdot e^{y+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!} \cdot (-1)^{n-k} \right) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) y^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n, \quad \forall x \in \langle 0, 2\rangle.$$

Dakle,

$$T[f, 1] = \sum_{n \geq 0} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n$$

△

Teorem. Za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $f : \langle -1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

je analitička na $\langle -1, +\infty\rangle$. Njen Macalaurinov red je tzv. **binomni red** i dan je s

$$T[f] = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{3.32}$$

gdje su $\binom{\alpha}{n}$ tzv. **binomni koeficijenti** i dani su s

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{i} \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Radijus konvergencije reda (3.32) jednak je 1 i vrijedi

$$T[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.33}$$

Napomena. Istaknimo neke binomne koeficijente koji se često javljaju:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \tag{3.34}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \tag{3.35}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \tag{3.36}$$

Zadatak 3.25 Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$, ako je

$$\text{(a)} f(x) := \sqrt{1+x} \qquad (b) f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \qquad \text{(c)} f(x) := \operatorname{Arsh} x.$$

Rješenje.

(a) Iz (3.32) i (3.35) slijedi

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

(b) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \forall x \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \binom{2n}{n} x^n.$$

(c) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Prema (3.16) je

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}.$$

Zadatak 3.26 Izračunajte sume redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Rješenje.

(a) Definirajmo funkciju $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \tag{3.37}$$

Kako red $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = f(-1).$$

Prema (3.15) je

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.38}$$

Istim argumentom dobivamo

$$f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.37) i (3.38) slijedi $f(0) = f'(0) = 0$. Stoga je

$$f'(y) = f'(y) - f'(0) = \int_0^y f''(t)\,dt = \int_0^y \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-y), \quad \forall y \in \langle -1, 1\rangle,$$

te

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(y)\,dy = \int_0^x (-\ln(1-y))\,dy \\
&= \begin{bmatrix} u = -\ln(1-y) & du = \frac{dy}{1-y} \\ dv = dy & v = y \end{bmatrix} = [-y\ln(1-y)]\Big|_0^x - \int_0^x \frac{y\,dy}{1-y} \\
&- x\ln(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\
&= (1-x)\ln(1-x) + x, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Prema drugom Abelovom teoremu je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} &= f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} [-x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x] \\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

(b) Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1).$$

Za $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot [(2n+1)-1]}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

(c) Definirajmo funkciju $f : \langle -1, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 1) x^n.$$

Primijetimo da je f dobro definirana funkcija. Naime, prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) radijus konvergencije reda potencija jednak 1. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Iz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle \tag{3.39}$$

te (3.15) slijedi

$$\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\frac{x}{(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{3.40}$$

Ako deriviramo jednakost (3.40) i ponovo iskoristimo (3.15), imamo

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Odavde slijedi

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.41}$$

Iz (3.39), (3.40), (3.41) te (3.26) slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{4x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

Napokon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

(d) Najprije primijetimo da je red $\sum \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}$ konvergentan. Zaista, definirajmo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n!!)}$$

i provjerimo jesu li ispunjeni uvjeti Leibnizovog kriterija.

– Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očito padajuć niz.
– Također vrijedi i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. To slijedi iz nejednakosti

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

koja se lako pokaže indukcijom.

Dakle, dani red je usitinu konvergentan. Iz prvog Abelovog teorema slijedi da je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

dobro definirana na intervalu $\langle -1, 1]$. Prema (3.32) , (3.33) i (3.36) je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \\ &= 1 + f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz drugog Abelovog teorema slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

△

Zadatak 3.27 Izračunajte $f^{(2008)}(0)$ ako je

$$\text{(a)} f(x) := \cos(x^2) \qquad (b) f(x) := xe^{-x^3} \qquad \text{(c)} f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rješenje.

(a) Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$f(x) = \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $2008 = 4 \cdot 502$, koeficijent uz x^{2008} jedank je $a_{2008} = \frac{(-1)^{502}}{(2\cdot 502)!} = \frac{1}{1004!}$

Stoga je

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = \frac{2008!}{1004!}$$

(b) Kako je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$f(x) = xe^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008} = \frac{(-1)^{669}}{669!} = -\frac{1}{669!}$. Dakle,

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = -\frac{2008!}{669!}.$$

(c) Kako je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

to je

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Budući da je $2008 = 2 \cdot 1003 + 2$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008} = \dfrac{2005!!}{2006!!}$. Dakle,

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = \frac{2008! \cdot 2005!!}{2006!!} = 2008 \cdot 2007 \cdot 2005!!^2.$$

$\triangle$

Zadatak 3.28 * Izračunajte sumu reda

$$\frac{0!}{4!} + \frac{4!}{8!} + \frac{8!}{12!} + \frac{12!}{16!} + \cdots$$

Rješenje. Primijetimo da je opći član a_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) gornjeg reda oblika

$$a_n = \frac{(4n)!}{(4(n+1))!} = \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}.$$

Kako je $(k+1)(k+2) - k(k+3) = 2$, $(k+3) - k = 3$ i $(k+2) - (k+1) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ to je

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Primijetimo da je

$$\frac{1}{4n+j} = \int_0^1 x^{4n+j-1}\, dx, \quad \forall 1 \leq j \leq 4, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

te da red polinoma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{6} x^{4n} - \frac{1}{2} x^{4n+1} + \frac{1}{2} x^{4n+2} - \frac{1}{6} x^{4n+3} \Big)$$

uniformno konvergira na segmentu $[0, 1]$ prema funkciji

$$f(x) := \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}.$$

Naime, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [0, 1]$ imamo

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \Big(\frac{1}{6} x^{4n} - \frac{1}{2} x^{4n+1} + \frac{1}{2} x^{4n+2} - \frac{1}{6} x^{4n+3} \Big) - \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)} \right| =$$

$$\frac{1}{6}\left|\frac{(1-x^{4m})(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)}-\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\right|=\frac{1}{6}\frac{x^{4m}(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)}\leq$$

$$\frac{1}{6}x^{4m}(1-x)^2\overset{(\triangle)}{\leq}\frac{1}{6}\Big(\frac{2m}{2m+1}\Big)^{4m}\cdot\frac{1}{(2m+1)^2}\leq\frac{1}{6}\Big(\frac{2}{3}\Big)^4\cdot\frac{1}{(2m+1)^2},$$

pri čemu nejednakost ($\triangle$) vrijedi zato što funkcija $x\mapsto(1-x)^2x^{4m}$ postiže maksimum na $[0,1]$ u točki $x_0:=\dfrac{2m}{2m+1}$ sa iznosom $\Big(\dfrac{2m}{2m+1}\Big)^{4m}\cdot\dfrac{1}{(2m+1)^2}$. Kako zadnja nejednakost ne ovisi o izboru $x\in[0,1]$, te kako je $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}=0$, zaključujemo da je konvergencija reda uniformna.
Napokon, računamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4n+4}\Big)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)\,dx=$$

[Red polinoma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)$ uniformno konvergira na $[0,1]$ prema funkciji $x\mapsto\dfrac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}$, pa suma i integral komutiraju.]

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\,dx=$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1\Big(\frac{2}{1+x}-\frac{x+1}{1+x^2}\Big)\,dx=\frac{1}{3}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{12}\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{24}.$$

$\triangle$

Koliko je zapravo klasa analitičkih funkcija $C^\omega(I)$ istaknuta među funkcijama klase $C^\infty(I)$, zorno dočarava sljedeći teorem:

Teorem. (Teorem o jedinstvenosti analitičke funkcije) Neka su $f,g\in C^\omega(I)$ dvije analitičke funkcije definirane na otvorenom intervalu I. Pretpostavimo da postoji konvergentni i injektivni niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u I takav da vrijedi $x_0:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in I$, te

$$f(a_n)=g(a_n),\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Tada je $f=g$, tj. vrijedi

$$f(x)=g(x),\quad\forall x\in I.$$

Zadatak 3.29 * Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(I)$ defininrana na nekom otvorenom intervalu I oko 0 takva da vrijedi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+(-1)^n}{n^3}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ takve da je } \frac{1}{n} \in I?$$

Rješenje. Pretpostavimo da takva funkcija f postoji. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} \in I$, za sve $n \geq n_0$. Za $n \in \mathbb{N}$ Stavimo

$$a_n := \frac{1}{2(n_0+n)+1}.$$

Primijetimo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i injektivan niz u I s $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \in I$. Iz pretpostavke zadatka slijedi

$$f(a_n) = \frac{1+(-1)^{2(n_0+n)+1}}{[2(n_0+n)+1]^3} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorem o jednistvenosti analitičke funkcije povlači

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je $2n_0 \in I$ i

$$f\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \frac{1+(-1)^{2n_0}}{[2n_0]^3} = \frac{1}{4n_0^3} \neq 0.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.30 Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije redova potencija

(a) $\sum 2^{n^2} x^{n!}$ (b) $\sum \frac{(n!)^5}{(5n)!}(x-2)^n$ (c) $\sum_{n\geq 2} \frac{(x+1)^n}{n\ln(n!)}$

(d) $\sum \frac{(x-1)^n}{(2+(-1)^n)^n}$ (e) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$ (f) $\sum_{n\geq 1} (2\sqrt[n]{2}-1)^n x^n$.

3.31 Funkciju f razvijte u Taylorov red $T[f,c]$ oko točke c, odredite njegov interval konvergencije, te izračunajte $f^{(2008)}(c)$ ako je

(a)$f(x) := \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ c=0$ (b)$f(x) := \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ c=0$ (c)$f(x) := \ln(x^2+x-6),\ c=2$

(d)$f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x,\ c=1$ (e)$f(x) := \frac{\cos x}{x},\ c=1$ (f)$f(x) := \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3,\ c=0.$

3.32 Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n[(n-1)!]^2}{(2n)!} x^{2n}$$

dobro definirana funkcija $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ i odredite eksplicitnu formulu od f.

3.33 Izračunajte sume redova

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^3}{(2n+1)!}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 3^n}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2^n}$.

3.34 Nađite sve analitičke funkcije $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koje Maclaurinov red $T[f]$ konvergira uniformno prema f na čitavom $\mathbb{R}$.

3.35 Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{e^n}$$

dobro definirana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nadalje dokažite da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, te da Maclaurinov red $T[f]$ od f divergira za sve $x \neq 0$.

3.36 Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koju vrijedi

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} :\ f^{(n)}(x) = 0\} = \mathbb{R}_+?$$