Derivacija implicitno zadane funkcije

1. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x)$ implicitno zadane

   a) jednadžbom $ye^y = e^{x+1}$, u točki $x = 0$, $y = 1$,
   b) jednadžbom $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$, u točki $x = 1$, $y = 1$.

2. Funkcija $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava
$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$
   Izračunajte f' i f'' (tj. izrazite ih pomoću f). Specijalno, koliko je $f'(0)$ i $f''(0)$?

Derivacije višeg reda

1. Odredite $f^{(n)}(x)$ ako je

   a) $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$,
   b) $f(x) = (1-2x)^{\frac{2}{3}}$,
   c) $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x}$,
   d) $f(x) = (2x^2 - 1)\cos 2x$,
   e) $f(x) = x^2 \sin(3x+1)$.

2. Odredite $f^{(100)}(0)$ ako je

   a) $f(x) = (3x^2 + 2x)\cos\dfrac{x}{3}$,
   b) $f(x) = (x\cos 3x)^2$,
   c) $f(x) = e^{x+\ln(1+x^2)}$,
   d) $f(x) = \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x$,
   e) $f(x) = e^{-x^2}$.

3. Neka je
$$g(1) = 1\,,\ g'(1) = 2 \ \text{ i } \ g''(1) = -1\,.$$
   Odredite $f''(1)$, pri čemu je f zadana s

   a) $f(x) = x^3 g(x)$,
   b) $f(x) = g(x)^3$.

4.* Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku n puta derivabilnu funkciju f vrijedi jednakost
$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$
[*Uputa*: Matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

Tangenta i normala na krivulju

1. Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu $xy = a^2$ pod pravim kutem.
2. Zadana je krivulja
$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$
Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.
3. Odredite sve vrijednosti parametra b takve da je pravac $y = x+b$ tangenta krivulje
$$y = \frac{x}{x+4}.$$
4. Pokažite da se tangente na krivulju
$$y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$$
povučene u točkama kojima je ordinata jednaka 1 sijeku u ishodištu.
5. Na krivulji $xy^2 = 2a^3$, $a > 0$ nađite sve točke u kojima normala na tu krivulju prolazi ishodištem.
6. Dana je krivulja $y = xe^{\frac{1}{x}}$. Nađite jednadžbu tangente na tu krivulju u točki s apscisom $a > 0$. Što se događa s tangentom kada $a \to +\infty$? Nađite jednadžbu kose asimptote iste krivulje.
7. Uz koji parametar a parabola $y = ax^2$ dira krivulju $y = \ln x$.
8. Dokažite da se hiperbole
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ xy &= b \end{aligned}$$
sijeku pod pravim kutem.

Derivabilnost i neprekidna derivabilnost

Označimo:

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \textit{lijeva derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \textit{desna derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

1. Neka je f neprekidna na $\langle a,b\rangle$ te derivabilna na $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, za neki $c\in\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka postoje $\lim\limits_{x\to c-} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to c+} f'(x)$. Koristeći L'Hospitalovo pravilo dokažite tvrdnje:

   a) $f'_-(c)$ postoji i vrijedi $f'_-(c)=\lim\limits_{x\to c-} f'(x)$,

   b) $f'_+(c)$ postoji i vrijedi $f'_+(c)=\lim\limits_{x\to c+} f'(x)$.

   U slučaju da još vrijedi $f'_-(c)=f'_+(c)$, postoji čak $f'(c)$ i f' je neprekidna u c, tj. funkcija f je *neprekidno derivabilna* u c.

2. Dokažite da za funkciju zadanu s

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$$

   ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (niti jednostrani limesi), ali f ima derivaciju u 0. Dakle, ne možemo primijeniti postupak za ispitivanje derivabilnosti iz Zadatka 1.

3. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x)=\begin{cases} 4x-8\,, & x\leq 3\\ x^2-2x+1\,, & x>3\,.\end{cases}$$

   Je li f klase $C^1(\mathbb{R})$?

4. Ispitajte neprekidnost funkcije f definirane na $[-1,+\infty\rangle$ formulom

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\,, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}\,, & x=0\,.\end{cases}$$

   U kojim točkama je f derivabilna, a u kojim neprekidno derivabilna?

5. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{\frac{1}{x}}\,, & x<0\\ \sin x\,, & x\geq 0\,.\end{cases}$$

   Je li f klase $C^2(\mathbb{R})$?

6. Neka je $f(x)=|x|^3$. Dokažite da je $f\in C^2(\mathbb{R})$, ali da $f'''(0)$ ne postoji.

7. Navedite primjer funkcije f neprekidne na $[-1,1]$ za koju vrijedi

$$f(0)=0\,,\ f'_-(0)=0 \ \text{ i } \ f'_+(0)=1.$$

   Skicirajte njen graf i zapišite formulu.

8. Skicirajte primjer grafa funkcije f neprekidne na $[-2,2]$, koja zadovoljava uvjete

$$f(-2)=1\,,\ f(0)=0\,,\ f'(0)=0\,,\ f'_-(1)=-1\,,\ f'_+(1)=1 \text{ i } f'_-(2)=-1.$$

9. Je li f definirana s

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^{\frac{2}{3}}\,, & x\le 0\\ (x+1)^{\frac{2}{3}}\,, & x>0\end{cases}$$

derivabilna u 0?

10. Za

$$f(x)=(1-x)^{\frac{3}{2}}$$

odredite $f'_-(1)$, ako postoji.

11.* Neka je f derivabilna na nekoj okolini točke c i dva puta derivabilna u c. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}=f''(c)\,.$$

Nadalje, pokažite primjerom da gornji limes može postojati i kad $f''(c)$ ne postoji.

[*Uputa*: Iskoristite L'Hospitalovo pravilo.]