GRUPE I KOMBINATORIKA

Matija Bašić

29. ožujka 2024.

Pojmovi s predavanja - video predavanje

simetrije trokuta, pojam grupe, rotacije - ciklička grupa, permutacije S_n, simetrije sfere, grupe $GL(n)$, $O(n)$, $SL(n)$,..., homomorfizam, simetrije kvadrata, prezentacija grupe, diedarska grupa, Cayley, podgrupa, Lagrange, red elementa, klasa konjugacije, djelovanje, orbita, stabilizator, Burnsideova lema

Zadaci s predavanja

1. Odredite grupu simetrija kocke.

2. Neka je p prost broj i neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Dokažite da p dijeli $F_{2p(p^2-1)}$.

3. Na kružnicu stavljamo crvene i plave kuglice. Na početku se na kružnici nalaze samo dvije crvene kuglice. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

   i) dodati jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica (crvenu u plavu i obratno);

   ii) maknuti jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica.

   Možemo li nizom takvih poteza postići da na kružnici budu samo dvije plave kuglice?

4. Na koliko načina možemo obojati strane kocke u n boja, pri čemu dva bojanja smatramo identična ako se jedno iz drugog može dobiti rotacijom kocke?

Domaću zadaću treba predati do petka 12. travnja 2024.
Potrebno je riješiti barem 7 zadataka.

Domaća zadaća

1. Neka je G grupa čiji generatori a i b zadovoljavaju $a^{-1}b^2a = b^3, \quad b^{-1}a^2b = a^3$. Mora li G biti trivijalna?

2. Neka je A neprazan skup, te $f\colon A^3 \to A$ preslikavanje koje zadovoljava:

   - $f(x,y,y) = x = f(y,y,x)$ za sve $x,y \in A$;
   - $f(f(x_1,x_2,x_3), f(y_1,y_2,y_3), f(z_1,z_2,z_3)) = f(f(x_1,y_1,z_1), f(x_2,y_2,z_2), f(x_3,y_3,z_3))$ za sve $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3 \in A$.

   Dokažite da za proizvoljan fiksan $a \in A$ operacija $x + y := f(x,a,y)$ definira strukturu komutativne grupe $(A,+)$.

3. Koristeći teorem o orbiti i stabilizatoru dokažite **Cauchyevu lemu**: Neka je G konačna grupa i p prost broj koji dijeli red grupe $|G|$. Tada G ima element reda p.

4. Neka je p prost broj i G konačna grupa s točno n elemenata reda p. Dokažite da je $n = 0$ ili p dijeli $n+1$.

5. Neka je G podgrupa grupe permutacija S_n i pretpostavimo da za svaki $\pi \in G$, $\pi \neq id$ postoji jedinstveni $k \in \{1, 2, ..., n\}$ takav da $\pi(k) = k$. Dokažite da postoji $k \in \{1, 2, ..., n\}$ takav da je $\pi(k) = k$ za sve $\pi \in G$ (tj. da je taj k isti za sve π).

6. Dokažite Burnsideovu lemu: Ako grupa G djeluje na konačnom skupu X, onda je

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

pri čemu je $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ skup invarijanti od g.

7. Odredite broj bojanja ploče $k \times k$ u n boja pri čemu identična smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.

8. Svako od 9 polja 3×3 ploče želimo obojati u n boja. Odredite ukupan broj bojanja ako identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti permutacijom redaka i permutacijom stupaca.

9. Na ploči 8×8 svako polje je obojeno crno ili bijelo tako da svaki red i svaki stupac imaju paran broj crnih polja. Dva bojanja smatramo identičnima ako se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče. Odredite broj različitih bojanja.

10. Uspon permutacije $\sigma \in S_n$ je svaki indeks $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ takav da je $\sigma(j) < \sigma(j+1)$. Neka je $E(n, k)$ broj permutacija $\sigma \in S_n$ koje imaju točno k uspona.

    Kombinatorno dokažite rekurziju $E(n, k) = (k+1)E(n-1, k) + (n-k)E(n-1, k-1)$.

    Usput, nije dio zadaće: prisjetite se definicija Stirlingovih brojeva prve i druge vrste i pripadnih rekurzija (dokažite ih kombinatorno!).

11. Dokažite da su konjugacijske klase u S_n određene rastavom permutacija na cikluse, tj. dvije permutacije su konjugirane ako i samo ako imaju iste ciklusne tipove (tj. multiskupove duljina ciklusa).

Teži zadaci

12. Odredite grupu simetrija tetraedra, dodekaedra i ikozaedra, te odredite sve konačne podgrupe grupe izometrija 3-dimenzionalnog euklidskog prostora (pazite na simetrije prizmi koje nisu Platonova tijela!).

13. Postoji li konačna grupa G s normalnom podgrupom H takvom da za pripadne grupe automorfizama vrijedi $|Aut(H)| > |Aut(G)|$?

14. Dokaži da postoji konstanta $c > 0$ takva da u svakoj netrivijalnoj konačnoj grupi G postoji niz duljine najviše $c \ln |G|$ sa svojstvom da je svaki element od G produkt elemenata nekog podniza tog niza.