MATEMATIČKA ANALIZA 1
9. 12. 2005.
Zadaci za vježbu: Infimum i supremum

(1) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \frac{m^2 + 3\cos(mn\pi)mn + 2n^2}{n^2} \;:\; m, n \in \mathbb{N}, m \le 2n \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite.

(2) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \left\lfloor \sqrt[|n|]{\frac{7}{3}} \right\rfloor \cdot \frac{n^2 - 2n - 4}{n^2 - n - 6} \;:\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 3\} \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite ($\lfloor\cdot\rfloor$ označava funkciju "najveće cijelo").

(3) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ 1 - \frac{9n(m-2n)^2}{(2m-3n)^3} \;:\; m, n \in \mathbb{N}, 3n < 2m \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite.

(4) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite ($\lfloor\cdot\rfloor$ označava funkciju "najveće cijelo").

(5) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \frac{n}{n+3} \cdot (2 + \cos(n\pi)) \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite.

(6) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \frac{m^2 + 5mn \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 9n^2}{mn} \;:\; n \in \mathbb{N},\ x \in \langle \pi, 5\pi \rangle \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite.

(7) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa S zadanog sa

$$S := \left\{ \left[\cos\big((m^2 + n)\pi\big) + \cos\big((m^2 - n)\pi\big) \right] \cdot \frac{2 - 3m + 2n - 3mn}{2n + 2mn} \;:\; m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sve tvrdnje dokažite.

(8) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i omeđen skup (dakle, odozdo i odozgo omeđen) i neka je $S' \subseteq S$ *gust podskup* od S, tj. takav podskup od S za kojeg vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in S)(\exists x' \in S')(|x - x'| < \varepsilon).$$

(Primijetimo da takav podskup uvijek postoji, npr. S je gust u S). Dokažite da je S' neprazan i omeđen skup, te da vrijedi

$$\sup S = \sup S' \quad \text{i} \quad \inf S = \inf S'.$$

I. G.