3

Infimum i supremum

Definicija. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$ **supremum** skupa A ako je

(i) M **gornja međa** skupa A, tj.

$$a \leq M, \ \forall a \in A.$$

(ii) M **najmanja gornja međa** skupa A, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \ \text{ takav da je } \ a > M - \varepsilon.$$

Može se pokazati da je supremum (ako postoji) jedinstven pa uvodimo oznaku $\sup A$.

Ako je još $M \in A$, onda kažemo da je M **maksimum** skupa A i M označavamo s $\max A$.

Definicija. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$ **supremum** skupa A ako je

(i) m **donja međa** skupa A, tj.

$$a \geq m, \ \forall a \in A.$$

(ii) m **najveća donja međa** skupa A, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \ \text{ takav da je } \ a < m + \varepsilon.$$

Može se pokazati da je infimum (ako postoji) jedinstven pa uvodimo oznaku $\inf A$.

Ako je još $m \in A$, onda kažemo da je m **minimum** skupa A i m označavamo s $\min A$.

Realni brojevi se zadaju aksiomatski. Izdvajamo dva aksioma:

(A15) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup u $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

(**aksiom potpunosti**)

(A16) Ako su $a, b > 0$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$b < n \cdot a.$$

(**Arhimedov aksiom**)

Primjer 3.1 Skup racionalnih brojeva nije potpun. Npr. skup

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \colon r^2 < 3\}$$

nema supremum u $\mathbb{Q}$.

Neka je $r \in A$. Tada je $r^2 < 3$ pa je $r < \sqrt{3}$. Dakle, $\sqrt{3}$ je gornja međa skupa A.

Dokažimo da je $\sqrt{3}$ najmanja gornja međa skupa A. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz činjenice da između svaka dva različita realna broja postoji neki racionalni broj(sjetite se da svaki realni broj možemo aproksimirati nizom racionalnih brojeva), zaključujemo da postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$\sqrt{3} - \varepsilon < r < \sqrt{3}.$$

Primijetite da je $r \in A$, odakle slijedi tvrdnja.

Dakle $\sup A = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Zadatak 3.1 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{2n-2}{n+3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.2 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup takav da postoji $\sup A$. Definirajmo

$$-A = \{-a \colon a \in A\}.$$

Dokažite da postoji $\inf(-A)$ i da je

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Rješenje. Trebamo pokazati da je:

(i) $-\sup A$ donja međa skupa $-A$:

Iz

$$a \leq \sup A, \ \forall a \in A$$

vidimo da je

$$-a \geq -\sup A, \ \forall a \in A.$$

(ii) $-\sup A$ najveća donja međa skupa $-A$:

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $a \in A$ takav da je

$$a > \sup A - \varepsilon$$

pa je

$$-a < -\sup A + \varepsilon.$$

Dakle, $-\sup A$ je najveća donja međa skupa $-A$ pa zbog jedinstvenosti infimuma slijedi

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Zadatak 3.3 Dokažite da svaki neprazan i odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.

Rješenje. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen. Tada je $-A$ neprazan i odozgo omeđen pa po aksiomu potpunosti postoji $\sup(-A) \in \mathbb{R}$. Po prethodnom zadatku postoji $\inf(-(-A)) = \inf A$.

Zadatak 3.4 Neka je $A \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je $\inf A > 0$. Definirajmo

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\}.$$

Dokažite da je

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Rješenje. Za $a \in A$ vrijedi

$$a \geq \inf A > 0$$

pa je

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf A},$$

odakle zaključujemo da je $\frac{1}{\inf A}$ gornja međa skupa $\frac{1}{A}$. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\varepsilon' > 0$ takav da je

$$\frac{\varepsilon'}{\inf A(\inf A + \varepsilon')} = \varepsilon.$$

Tada postoji $a \in A$ takav da je $a < \inf A + \varepsilon'$, odakle je

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{\inf A + \varepsilon} = \frac{1}{\inf A} - \frac{\varepsilon}{\inf A(\inf A + \varepsilon)} = \frac{1}{\inf A} - \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je $\frac{1}{\inf A}$ najmanja gornja međa skupa A pa je zbog jedinstvenosti supremuma

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Zadatak 3.5 Odredite infimum i supremum skupova:

(a) $A = \left\{3\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) : x \in [0, 3\pi\rangle\right\}$ (b) $A = \left\{\frac{x^2 - 2}{x^2 + 4} : x \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $A = \left\{x + \frac{4}{x} : x > 0\right\}.$

Zadatak 3.6 Odredite infimum i supremum skupova:

$$\text{(a)}\quad A=\left\{\frac{n^2+4m^2}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}\qquad \text{(b)}\quad A=\left\{\frac{m^2-5mn+6m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}, m<4n\right\}$$

Zadatak 3.7 Odredite infimum i supremum skupa

$$A=\left\{\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

Rješenje. Očito je

$$\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}>0,\ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Primijetimo da je za $n=1$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m^2+m+5}=0$$

pa je $\inf A=0$. S druge strane je

$$\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}\le\frac{n^2}{5n^2}\le\frac{1}{5},\ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Za $m=1$ slijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2+5n^2}=\frac{1}{5}$$

pa je $\sup A=\frac{1}{5}$.

Zadatak 3.8 Odredite infimum i supremum skupa

$$A=\left\{\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+3}: n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rješenje. Neka je

$$x_n=\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+3}=-\frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Lako se provjeri da je (x_n) rastući niz. Također je

$$x_n\le 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

pa je (x_n) konvergentan. Tada je

$$\begin{aligned}\inf A&=x_1=-\frac{1}{20}=\min A,\\ \sup A&=\lim_{n\to+\infty}x_n=0.\end{aligned}$$

Zadatak 3.9 Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo

$$A + B = \{a + b \colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Rješenje. Vrijedi

$$a + b \leq \sup A + \sup B,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

pa je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A + B$. Dokažimo da je to i najmanja gornja međa. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je

$$a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$$

pa je

$$a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Napomena. Analogno se dokaže da za odozdo omeđene i neprazne podskupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Zadatak 3.10 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{m - n - 1}{mn + 4m + 3n + 12} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.11 Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje. Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $\sup A > 0$ i $\sup B > 0$. Tada je za $a \in A, b \in B$

$$a \cdot b \leq \sup A \cdot \sup B$$

pa je $\sup A \cdot \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$. Dokažimo da je i najmanja gornja međa. Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \cdot \sup B$. Tada za

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0$$

postoje $a \in A$ i $B \in B$ takvi da je

$$a > \sup A - \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad b > \sup B - \varepsilon_1,$$

odakle je

$$\begin{aligned} a\cdot b &> (\sup A-\varepsilon_1)(\sup B-\varepsilon_1) = \sup A\cdot\sup B-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4\sup A\cdot\sup B}\\ &> \sup A\cdot\sup B-\varepsilon. \end{aligned}$$

Napomena. Analogno se dokaže da je za neprazne $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$

$$\inf(A\cdot B) = \inf A\cdot\inf B.$$

Općenito, ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni, onda je

$$\sup(A\cdot B) = \max\{\sup A\cdot\sup B, \sup A\cdot\inf B, \inf A\cdot\sup B, \inf A\cdot\inf B\}$$
$$\inf(A\cdot B) = \min\{\sup A\cdot\sup B, \sup A\cdot\inf B, \inf A\cdot\sup B, \inf A\cdot\inf B\}$$

Zadatak 3.12 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}\cdot\frac{m^2+1}{3m^2+m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Rješenje. Primijetimo da je

$$S = A\cdot B,$$

gdje su

$$A = \left\{\frac{n-\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{m^2+1}{3m^2+m} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

i

$$A, B \subseteq [0, +\infty\rangle.$$

Odredimo prvo infimum i supremum skupa A:

Zbog $n \geq \sqrt{n}$ vrijedi

$$\frac{n-\sqrt{n}}{n+1} \geq 0,\ foralln \in \mathbb{N}$$

pa je 0 donja međa skupa A. Ako uzmemo $n = 1$, onda vidimo da je $0 \in A$ pa je

$$\inf A = \min A = 0.$$

S druge strane je

$$\frac{n-\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{n}{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

pa je 1 gornja međa skupa A. Zbog

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}=1$$

slijedi da je

$$\sup A = 1.$$

Odredimo infimumu i supremum skupa B:

Neka je $x_m = \frac{m^2+1}{3m^2+m}$. Tada je

$$x_m \le x_{m+1} \iff \ldots \iff m \ge 6$$

pa je

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 \le x_7 \le x_8 \le x_9 \le \ldots.$$

Dakle,

$$\inf B = \min B = x_6 = \frac{37}{114}$$

i

$$\sup B = \max\{x_1, \lim_{m\to+\infty} x_m\} = \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{2} = \max B.$$

Konačno, zbog $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$ je

$$\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\inf S = \inf A \cdot \inf B = 0 \cdot \frac{37}{114} = 0 = \min S.$$

Zadatak 3.13 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{\frac{4n-13}{n+2}\cdot\frac{12-5m}{m+3} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zadatak 3.14 Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni neprazni skupovi. Dokažite da je

$$\inf(A\cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $\inf A \le \inf B$ (inače zamijenimo uloge skupova A i B). Tada je $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf A$.

Ako je $x \in A\cup B$, onda je $x \in A$ ili $x \in B$ pa je $x \ge \inf A$ ili $x \ge \inf B \inf A$. Dakle, $\inf A$ je donja međa skupa $A\cup B$. Dokažimo da je to najveća donja međa. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $a \in A \subseteq A\cup B$ takav da je $a < \inf A + \varepsilon$ pa je $\inf A$ i najveća donja međa skupa $A\cup B$. Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti infimuma.

Napomena. Analogno se dokaže da je za odozgo omeđene i neprazne podskupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Općenitije, vrijedi:

(i) ako su $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni i neprazni, onda je

$$\sup(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \max\{\sup A_1, \ldots, \sup A_n\};$$

(ii) ako su $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni i neprazni, onda je

$$\inf(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \min\{\inf A_1, \ldots, \inf A_n\};$$

Zadatak 3.15 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.16 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \left\lfloor (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\rfloor + \left(\frac{1 + (-1)^n \cdot 2}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.17 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.18 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ -\frac{n + (-1)^n}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{-2 + \operatorname{th} x \colon x > 0\}.$$

Napomena. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća i neprekidna funkcija onda je za omeđeni skup $A \subset \mathbb{R}$

$$\inf f(A) = f(\inf A), \quad \sup f(A) = f(\sup A).$$

U slučaju padajuće funkcije vrijedi

$$\inf f(A) = f(\sup A), \quad \sup f(A) = f(\inf A).$$

Zadatak 3.19 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ -\operatorname{arctg}\left((-1)^n \left(-2 + \cos \frac{1}{4n} \right) \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.20 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadaci za vježbu

3.21 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{7n-4}{2n+1} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.22 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo i odozgo ograničen. Dokažite da je

$$A \subseteq [\inf A, \sup A]$$

3.23 Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite:

(a) $\sup[a, b\rangle = b$;

(b) $\inf\langle a, b\rangle = a$.

3.24 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ 2\sin(3x+\pi) \colon x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \right\rangle \right\}.$$

3.25 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup takav da postoji $\inf A$. Dokažite da postoji $\sup(-A)$ i da je

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

3.26 Odredite infimum i supremum skupa (koristeći nizove)

$$A = \left\{ \frac{10-3n}{n+3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.27 Neka je $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni podskupovi takvi da je A odozgo omeđen .i B odozdo omeđen. Definiramo

$$A - B = \{a - b \colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

3.28 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{2n+m+mn+2}{2n+18m-4mn-9} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.29 Odredite infimum i supremum skupova:

(a) $A = \left\{ \dfrac{m}{m+n} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}$ (b) $A = \left\{ \dfrac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{N}, m < 3n \right\}$

3.30 Odredite infimum i supremum skupa
$$A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}, m < 10n \right\}.$$

3.31 Odredite infimum i supremum skupa
$$A = \left\{ \log_{1/e} \frac{n^2+n}{n^2+4} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.32 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2-3m}{m+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.33 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \frac{2n^2+n}{n^2+1} \cdot \frac{5m+1}{1+(-1)^m \cdot 9m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.34 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \cos(n\pi) \frac{n^2+1}{3n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.35 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \sin \frac{4n^2+1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.36 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \frac{(m+n)^2}{2^{mn}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.37 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \frac{n^2-9}{5n^2+3n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.38 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} : a, b, c > 0 \right\}.$$

3.39 Odredite infimum i supremum skupa
$$S = \left\{ \sqrt{3n} - \lfloor \sqrt{3n} \rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}.$$