4

Neprekidnost i limes

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Funkcija

$$f \colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$$

ima **limes u točki** c jednak $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki niz (x_n) u $I \setminus \{c\}$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Može se pokazati da je, u slučaju da postoji, limes funkcije jedinstven pa pišemo

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Vrijedi:

Teorem. (Cauchyeva definicija limesa)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f \colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ u točki $c \in I$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ td. } \ x \in I, 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

■

Primjer 4.1 (a) Dokažimo po Cauchyevoj definiciji limesa da je

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$ i $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - 2| < \delta$ vrijedi

$$|x + 2| \le |x - 2| + 4 < \delta + 4 \le 1 + 4 = 5$$

pa je

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5\delta \le \varepsilon.$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}(x^2+4)=4+4=8.$$

Napomena. Ako funkcije $f\colon I\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ i $g\setminus\{c\}\colon I\to\mathbb{R}$ imaju limese u točki $c\in I$ i ako su $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, onda

· funkcija $\lambda f+\mu g$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda\lim_{x\to c}f(x)+\mu\lim_{x\to c}g(x);$$

· funkcija $f\cdot g$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}f(x)g(x)=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x);$$

· u slučaju da je $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$ i funkcija $\frac{f}{g}$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}.$$

Definicija. Neka je $I\subset\mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f\colon I\to\mathbb{R}$ je **neprekidna** u $c\in I$ ako za svaki niz (x_n) u I vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=c\implies\lim_{f(x_n)}=f(c).$$

Teorem. (Cauchyeva definicija neprekidnosti)

Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f\colon I\to\mathbb{R}$ je neprekidna u točki $c\in I$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\text{ td. }\ x\in I,|x-c|<\delta\implies|f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

■

Napomena. Na predavanjima ste pokazali da su sve elementarne funkcije neprekidne na njihovim prirodnim domenama.

Zadatak 4.1 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ (b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1},\ n\in\mathbb{N}$ (c) $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h},\ a\in\mathbb{R}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (e) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (f) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1},\ m,n\in\mathbb{N}$

(g) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

Definicija. Kažemo da $f\colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ima limes u točki $c \in I$ jednak $+\infty$ ako

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0) \ \text{ td. } \ x \in I, 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > M.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty.$$

Analogno definiramo limes jednak $-\infty$.

Primjer 4.2 Dokažimo po definiciji da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Neka je $M > 0$ proizvoljan. Za $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ vrijedi

$$0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}} \implies \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M.$$

Definicija. Kažemo da $f\colon \langle -\infty, a\rangle \to \mathbb{R}$ ima limes u $-\infty$ jednak $L \in \mathbb{R}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) \ \text{ td. } \ x < -M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Analogno definiramo limes u $+\infty$.

Primjer 4.3 (a) $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ i $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

(b) Dokažimo po definiciji da je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$ vrijedi

$$x > M \implies \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{M}} = \varepsilon.$$

Zadatak 4.2 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-5)}{3x^3 + x^2 - x + 1}$ (b) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ (c) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{100x}{x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ (e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$ (f) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 8x + 1}{3x + 1}$

(g) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ (h) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 5 + 6} + x)$.

Napomena. Vrijedi analogon teorema o sendviču: ako je

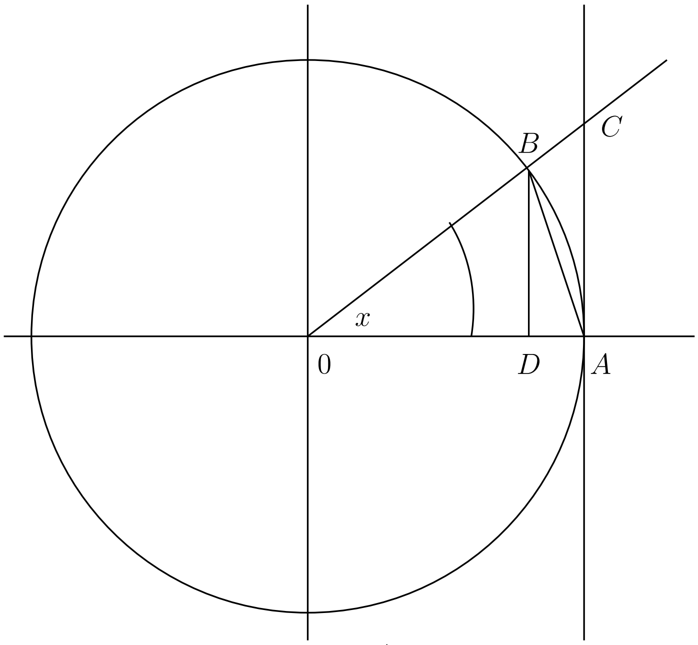
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \forall x \in I \setminus \{c\},$$

i ako je

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x),$$

onda i g ima limes u c i vrijedi

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x).$$



Primjer 4.4 (a) Izračunajmo $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Vrijedi

$$-\frac{\pi}{2}x \leq x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}x$$

pa je po teoremu o sendviču

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0.$$

(b) Dokažimo da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tada iz slike vidimo da se za

$$O = (0,0), \ A = (1,0), \ B = (\cos x, \sin x), \ C = (0, \operatorname{tg} x), \ D = (\cos x, 0)$$

površina kružnog isječka OAB nalazi između površina trokuta $\triangle OAB$ i $\triangle OAC$:

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} \leq \frac{1 \cdot x}{2} \leq \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2},$$

odakle je

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tada tvrdnja slijedi po teoremu o sendviču.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Zadatak 4.3 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(13x)}{\sin(21x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \sin \dfrac{\pi}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{1 - 2\cos x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi \sqrt{x})}{\sin(\pi x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(1-\cos x)}{\sin^2 x}$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^3}$.

Zadatak 4.4 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdots \cos nx - 1}{x^2}.$$

Napomena. Sljedeći oblici su neodređeni:

$$(\pm\infty) \cdot 0, \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, (\pm\infty) - (\pm\infty), (\pm\infty) + (\mp\infty), 1^{\pm\infty}.$$

Napomena. Određeni i neodređeni oblici:

DEFINIRANO	NIJE DEFINIRANO
$x + (\pm\infty) = \pm\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$	
$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$	$(\pm\infty) + (\mp\infty)$
$-(+\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = +\infty$	
$x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & x > 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$	$0 \cdot (+\infty)$
$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & x > 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$	$0 \cdot (-\infty)$
$\dfrac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty},\ \dfrac{0}{0}$
$x^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$	$1^{+\infty}$
$x^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$	$1^{-\infty}$

Na predavanju je dokazano

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Napomena. Vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Stoga je i

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

Napomena. Ako su f i g funkcije takve da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty,$$

onda je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to c}(1+(f(x)-1))^{g(x)}\\ &= \lim_{x\to c}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim_{x\to c}(f(x)-1)g(x)}.\end{aligned}$$

Zadatak 4.5 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x},\ a\in\mathbb{R}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Primjer 4.5 (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{bmatrix} t=e^x-1 & x=\ln(t+1)\\ x\to 0 & t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,}\quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.}$$

Zadatak 4.6 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\ a>0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2x)}e^{3x^2}-1}{x\operatorname{th}(4x)}$.

Zadatak 4.7 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a},\ a\in\mathbb{R}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Zadatak 4.8 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\pi}(\pi x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos^3 x}-1}{x^3\operatorname{ctg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

Zadaci za vježbu

4.9 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ (c) $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

4.10 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}$ (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$

4.11 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3-x+2}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$ (c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

4.12 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ (b) $\lim_{x\to3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ (c) $\lim_{x\to1} \frac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{N}$

4.13 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (c) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

4.14 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\in\mathbb{R}$ (b) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$

4.15 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ (b) $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a},\ a\in\mathbb{R}$ (c) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

4.16 Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ (c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)$

4.17 Odredite parametar a takav da funkcija

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ a, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$$

bude neprekidna.

4.18 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

4.19 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[n]{\cos\beta x}}{x^2}$, $m\in\mathbb{N}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$

4.20 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

4.21 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\pi x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^x-5^x}{4^x-3^x}$

4.22 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x+\frac{2\pi}{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+5}}{2-\sqrt{x+1}}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$

4.23 Je li moguće proširiti funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$$

do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$?

4.24 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-\cos x}{3^x-\operatorname{ch} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{tg} x-\sin x)^2}{x^2\operatorname{tg}(x^2)\sin(x^2)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 2x}\cdot e^{2x^2}-1}{\ln(1+2x)\cdot\ln(1+2\arcsin x)}$

4.25 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}-e^{\arcsin x}}{1-\cos^3 x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)^{\operatorname{ctg}(\pi\sin x)}$

4.26 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+3x+4)}{\ln(x^2+2x+3)}\right)^{x\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

4.27 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$

4.28 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)^2+x^2}{\cos x - 1 - \frac{1}{2}x^2} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$$

4.29 Može li se funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

proširiti do neprekidne funkcije na $[-1, +\infty\rangle$?

4.30 Neka je $f\colon \langle -a, a\rangle \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Koje su od sljedećih tvrdnji istinite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = l$?

Dokažite.

4.31 Dokažite da za $f\colon \langle -a, a\rangle \setminus \{0\} \to \langle 0, +\infty\rangle$ takvu da je

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2$$

vrijedi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

4.32 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \sin x \cos\frac{1}{x^2} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 2} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}$$

4.33 Dokažite da je

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor 3e^x \rfloor + 2}{\lfloor 2e^x \rfloor + 1} = \frac{3}{2} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} x^3 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to +\infty} \left[\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right] = 0$$

♣ ♡ ♠ ◊

4.34 Neka je $f\colon [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija. Dokažite da f ima **fiksnu točku**, tj. da postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $f(x_0) = x_0$.(Uputa: Bolzano-Weierstrassov teorem)

4.35 Dokažite da svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

4.36 Dokažite da jednadžba $x^5 - 3x - 1 = 0$ ima barem jedno realno rješenje na segmentu $[1,2]$.

4.37 Neka su $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ funkcije takve da je $f \circ g = g \circ f$. Dokažite da postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $f(x_0) = g(x_0)$.

4.38 Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i periodična s periodom $\tau > 0$. Dokažite da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(x_0 + \frac{\tau}{2}) = f(x_0).$$

4.39 Neka je $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoje $x, y \in [0,2]$ takvi da je

$$y - x = 1, \quad f(y) - f(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

4.40 Nađite sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju Cauchyevu funkcionalnu jednadžbu:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

4.41 Nađite sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(1) > 0$ i

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$