

## TRIKOVI IZ LINEARNE ALGEBRE

Matija Bašić  
10. ožujka 2023.

Na početku ćemo riješiti nekoliko zadataka koristeći pojmove s kolegija *Linearna algebra 1*, poput *linearno nezavisan skup vektora*, *rang matrice*, *invertibilni linearni operator* itd. Nakon toga ćemo govoriti o invarijantama sličnosti i kako ih koristiti u zadacima. Teoremi koje ćemo koristiti se dokazuju na kolegijima *Linearna algebra 2* i *Vektorski prostori*.

### Invarijante sličnosti

Neka je  $V$  konačnodimenzionalni vektorski prostor nad nekim poljem  $k$  i  $A: V \rightarrow V$  linearni operator. Ako je  $e = (e_i)$  neka baza prostora  $V$ , onda operatoru  $A$  možemo pridružiti matricu  $A_e = (a_{ij})$ , pri čemu je

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

Ako su  $e$  i  $f$  dvije baze prostora  $V$  onda su matrice  $A_e$  i  $A_f$  *slične*, tj. postoji invertibilna matrica  $P$  takva da je  $A_f = P^{-1}A_eP$ . Slične matrice imaju isti trag i istu determinantu. Kažemo da su trag i determinanta *invarijante sličnosti*.

Trag linearnog operatora  $A$  možemo definirati kao trag matrice  $A_e$  za bilo koju bazu  $e$ . Ta definicija je dobra jer za bilo koje dvije matrice  $X$  i  $Y$  vrijedi  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ , pa posebno

$$\text{tr}(A_f) = \text{tr}(P^{-1}A_eP) = \text{tr}(A_e).$$

Slično, koristeći *Binet-Cauchyev teorem* vidimo da je dobro definiran pojam determinante linearnog operatora  $A$ . U nastavku ćemo proučavati još neke invarijante.

### Minimalni i karakteristični polinom

Za svaki polinom  $p \in k[x]$  definiran je linearni operator  $p(A): V \rightarrow V$ .

**Definicija.** Polinom  $p$  *poništava*  $A$  ako je  $p(A) = 0$ . *Minimalni polinom* linearnog operatora  $A: V \rightarrow V$  je normirani polinom najmanjeg stupnja koji poništava  $A$ .

**Propozicija 1.** Ako je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor, onda za svaki linearni operator  $A: V \rightarrow V$  postoji jedinstveni minimalni polinom  $m_A \in k[x]$ .

**Propozicija 2.** Neka je  $p \in k[x]$ . Polinom  $p$  poništava linearni operator  $A: V \rightarrow V$  ako i samo ako minimalni polinom  $m_A$  dijeli polinom  $p$ .

**Definicija.** *Karakteristični polinom* linearnog operatora  $A: V \rightarrow V$  definiramo formulom  $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ . Nultočke karakterističnog polinoma  $k_A$  su *svojtvene vrijednosti* operatora  $A$ . Skup  $\sigma(A)$  svih svojstvenih vrijednosti nazivamo *spektar* operatora  $A$ . Kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda \in \sigma(A)$  nazivamo *algebarska kratnost* od  $\lambda$ .

**Propozicija 3.** Karakteristični polinom matrice je invarijanta sličnosti.

**Teorem 4 (Hamilton-Cayley).** Karakteristični polinom  $k_A$  poništava operator  $A$ .

**Korolar 5.** Minimalni polinom  $m_A$  dijeli karakteristični polinom  $k_A$ .

**Propozicija 6.** Svaka nultočka karakterističnog polinoma  $k_A$  je i nultočka minimalnog polinoma  $m_A$ . Linearni operator  $A$  je dijagonalizabilan ako i samo ako je kratnost svake nultočke minimalnog polinoma  $m_A$  jednaka 1.

## Jordanova forma i teorem o preslikavanju spektra

**Definicija.** *Jordanova klijetka*  $J_\lambda^{(d)}$  je kvadratna matrica reda  $d$  kojoj je na glavnoj dijagonali  $\lambda$ , neposredno iznad glavne dijagonale 1, a svi ostali elementi su 0.

**Teorem 7 (Jordanova forma).** Neka je  $k$  **algebarski zatvoreno polje** (npr.  $\mathbb{C}$ ). Za svaku matricu  $A \in M_n(k)$  postoji jedinstvena matrica  $J_A$  oblika

$$J_A = J_{\lambda_1}^{(d_1)} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_m}^{(d_m)}$$

slična matrici  $A$ .

**Korolar 8.** Matrice  $A$  i  $B$  su slične ako i samo ako su im pripadne Jordanove forme  $J_A$  i  $J_B$  jednake (do na poredak klijetki). Svakom linearnom operatoru  $A$  jednoznačno je (do na poredak elemenata) priručena baza  $e$  vektorskog prostora takva da je matrica  $A_e$  u Jordanovoj formi.

**Definicija.** *Geometrijska kratnost* svojstvene vrijednosti  $\lambda \in \sigma(A)$  operatora  $A$  je dimenzija  $A$ -invarijantnog potprostora  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  od  $V$ .

**Korolar 9.** Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda \in \sigma(A)$  je broj klijetki  $J_\lambda^{(d)}$ , a kratnost u minimalnom polinomu  $m_A$  je jednaka maksimalnoj veličini  $d$  klijetke  $J_\lambda^{(d)}$  koja se pojavljuje u Jordanovoj formi  $J_A$ .

**Teorem 10 (o preslikavanju spektra).** Neka je  $p \in k[x]$ . Tada je

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Štoviše, kratnosti su očuvane, tj. ako je  $\lambda$  nultočka polinoma  $k_A$  kratnosti  $n$ , onda je  $p(\lambda)$  nultočka polinoma  $k_{p(A)}$  kratnosti  $n$ .

*Ideja dokaza.* Možemo koristiti matricu  $A_e$  u Jordanovoj formi jer vrijedi  $P^{-1}p(A_e)P = p(P^{-1}A_eP)$ . Na dijagonali od  $p(A_e)$  dobivamo upravo  $p(\lambda)$  za  $\lambda \in \sigma(A)$ .

*Napomena.* Bitno je primjetiti da iako polinomijalna preslikavanja čuvaju svojstvene vrijednosti (dijagonalu), ona općenito ne čuvaju strukturu invarijantnih potprostora! Promotrite primjer  $\dim V = 4$ ,  $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0)$ ,  $m_A(x) = x^4$ ,  $p(A) = A^2$ ,  $m_{p(A)}(x) = x^2$ .

*Napomena.* Teorem o preslikavanju spektra vrijedi i nad poljima koja nisu algebarski zatvorena jer vektorski prostor  $V$  možemo promatrati i kao prostor nad algebarski zatvorenim proširenjem početnog polja kako bismo dobili matricu  $A_e$  u Jordanovu formi.

## Hermitske i unitarne matrice

**Definicija.** Ako je  $A = (a_{ij})$  kompleksna matrica, onda kažemo da je matrica  $A^* = (\overline{a_{ji}})$  *adjungirana* matrici  $A$ . Ako je  $A = A^*$ , kažemo da je  $A$  *hermitska matrica*. Ako je  $A^* = A^{-1}$ , kažemo da je  $A$  *unitarna matrica*.

**Propozicija 11.** Za  $\lambda \in \mathbb{C}$  i vektor  $v$  vrijedi  $Av = \lambda v$  ako i samo ako vrijedi  $A^*v = \overline{\lambda}v$ .

**Propozicija 12.** Hermitska matrica  $A$  se može dijagonalizirati i  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

**Propozicija 13.** Sve svojstvene vrijednosti unitarne matrice imaju modul 1.

**Definicija.** Za  $w, v \in \mathbb{R}^n$ , označavamo

$$w^t v = [w_1 \ \dots \ w_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = w_1 v_1 + \dots + w_n v_n.$$

Kažemo da su  $w$  i  $v$  ortogonalni ako je  $w^t v = 0$ . Ortogonalni komplement  $W^\perp$  vektorskog potprostora  $W \leq \mathbb{R}^n$  je

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : w^t v = 0 \text{ za sve } w \in W\}.$$

Skup  $W^\perp$  je vektorski potprostor i ako je  $\dim W = k$ , onda je  $\dim W^\perp = n - k$ . Također vrijedi  $(W^\perp)^\perp = W$ . Dokažite ove tvrdnje!

**Lema 14.** Ako  $Z$  nije oblika  $\lambda I$ , onda postoji invertibilna matrica  $P$  takva da matrica  $P^{-1} Z P$  ima 0 na mjestu  $(1, 1)$ .

*Dokaz.* Neka je  $Z \neq 0$  i pretpostavimo da ne postoji invertibilna matrica  $P$  takva da matrica  $P^{-1} Z P$  ima 0 na mjestu  $(1, 1)$ .

Neka je  $w \in \mathbb{R}^n$  takav vektor da je  $w^t Z \neq 0$ . Neka je  $W = [\{w\}]$  i  $Z = [\{(w^t Z)^t\}]$ .

Pretpostavimo da postoji vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  takav da je  $w^t v \neq 0$  i  $w^t Z v = 0$ . Neka je  $\{p_2, p_3, \dots, p_n\}$  baza za  $W^\perp$ . Označimo  $\alpha = w^t v$  i  $v' = \frac{1}{\alpha} v$ . Tada je matrica  $P$  kojoj su stupci  $v', p_2, \dots, p_n$  invertibilna. Zbog  $w^t v' = 1$  i  $w^t p_j = 0$  za  $j = 2, \dots, n$  prvi redak inverza  $P^{-1}$  je  $w^t$ . Slijedi da je na prvom mjestu matrice  $P^{-1} Z P$  upravo element  $w^t Z v' = \frac{1}{\alpha} w^t Z v = 0$ , što je kontradikcija. Dakle, za svaki vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  vrijedi implikacija:

$$w^t Z v = 0 \implies w^t v = 0.$$

Ovo pokazuje da je  $Z^\perp$  sadržan u potprostoru  $W^\perp$ . Budući da ti potprostori imaju istu dimenziju  $(n - 1)$ , zaključujemo da su oni jednaki. No, tada je

$$[\{w\}] = (W^\perp)^\perp = (Z^\perp)^\perp = [\{(w^t Z)^t\}]$$

iz čega zaključujemo da su  $w^t$  i  $w^t Z$  kolinearni.

Pokazali smo da za svaki vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  vrijedi  $w^t Z = 0$  ili  $w^t Z = \mu_w w^t$  za neki  $\mu_w \in \mathbb{R}$ . Ova tvrdnja primijenjena na vektore kanonske baze na  $\mathbb{R}^n$  povlači da je  $Z$  dijagonalna matrica. Neka je  $e_i^t Z = z_{ii} e_i^t$ . Budući da je

$$(e_i - e_j)^t Z = z_{ii} e_i^t - z_{jj} e_j^t = \mu_{e_i - e_j} (e_i^t - e_j^t)$$

zbog jedinstvenosti zapisa u bazi slijedi  $z_{ii} = \mu_{e_i - e_j} = z_{jj}$  za svaki par  $i, j$ . Dakle, svi elementi na dijagonali su jednaki, tj.  $Z$  je oblika  $\lambda I$ .

**Lema 15.** Neka je  $Z = AB - BA \in M_{n-1}(\mathbb{R})$  i  $Z' \in M_n(\mathbb{R})$  matrica oblika

$$Z' = \begin{bmatrix} 0 & w^t \\ v & Z \end{bmatrix}$$

za neke vektore  $w, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Tada postoje  $A', B' \in M_n(\mathbb{R})$  takve da je  $Z' = A'B' - B'A'$ .

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A$  invertibilna matrica jer inače možemo odabrati  $\alpha \in \mathbb{R}$  takav da su sve svojstvene vrijednosti od  $A + \alpha I$  različite od 0, tj. da je  $A + \alpha I$  invertibilna, te vrijedi

$$(A + \alpha I)B - B(A + \alpha I) = AB - BA = Z'.$$

Sada definiramo

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0^t \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & -w^t A^{-1} \\ A^{-1}v & B \end{bmatrix}.$$

**Teorem 16.** Matrica  $Z \in M_n(\mathbb{R})$  ima trag 0 ako i samo ako postoje matrice  $A$  i  $B$  takve da je  $Z = AB - BA$ .

*Dokaz.* Znamo da je  $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ . Obrat dokazujemo indukcijom po dimenziji matrice  $Z \in M_n(\mathbb{R})$ . Za  $n = 1$ , tvrdnja očito vrijedi jer je  $Z = 0$  i možemo staviti  $A = B = 0$ . Neka je  $k \in \mathbb{N}$  i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve  $n < k$ . Neka je  $Z' \in M_k(\mathbb{R})$  matrica traga 0. Tada prema Lemi 14 postoji invertibilna matrica  $P \in M_k(\mathbb{R})$ , te vektori  $w, v \in \mathbb{R}^{k-1}$  i matrica  $Z \in M_{k-1}(\mathbb{R})$  takvi da je

$$P^{-1}Z'P = \begin{bmatrix} 0 & w^t \\ v & Z \end{bmatrix}.$$

Budući da je  $\text{tr} Z' = 0$ , slijedi  $\text{tr}(P^{-1}Z'P) = 0$  i  $\text{tr} Z = 0$ . Prema pretpostavci indukcije postoje matrice  $A$  i  $B$  takve da je  $Z = AB - BA$ . Prema Lemi 2 postoje matrice  $A'$  i  $B'$  takve da je  $P^{-1}Z'P = A'B' - B'A'$ . Konačno zaključujemo da je

$$Z' = (PA'P^{-1})(PB'P^{-1}) - (PB'P^{-1})(PA'P^{-1}).$$

Time je dokaz završen.

**Zadaci**

1. Neka su  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  takve da je  $AB + A + B = 0$ . Dokažite da je  $AB = BA$ .
2. Neka su  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  takve da je  $A^2B + BA^2 = 2ABA$ . Dokažite da postoji prirodni broj  $k$  takav da je  $(AB - BA)^k = 0$ .
3. Neka su  $A$  i  $B$  realne  $3 \times 3$  matrice. Dokažite

$$3 \det(AB - BA) = \operatorname{tr}((AB - BA)^3).$$

4. Neka je  $A \in M_n(\mathbb{C})$  hermitska matrica takva da vrijedi  $A^5 + A^3 + A = 3I$ . Dokažite da je  $A = I$ .
5. Neka su  $A$  i  $B$  unitarne kompleksne matrice. Dokažite  $|\det(A + B)| \leq 2^n$ .
6. Neka su  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Dokažite da vrijedi  $\det(I + AB) = \det(I + BA)$ .
7. Neka su  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$  pri čemu su  $A$  i  $C$  regularne takve da vrijedi  $A^k B = C^k D$  za svaki prirodan broj  $k$ . Dokažite da je  $B = D$ .

**Domaća zadaća**

Treba točno riješiti barem 8 zadataka. Zadaće predajte do petka 24. ožujka 2023.

1. Neka je  $A$  linearni operator,  $x$  vektor i  $m$  prirodni broj takav da je  $A^m x = 0$  i  $A^{m-1} x \neq 0$ . Dokažite da je tada skup  $\{x, Ax, \dots, A^{m-1}x\}$  linearno nezavisan.

2. Postoje li polinomi  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(y)$ ,  $d(y)$  takvi da za sve  $x$  i  $y$  vrijedi

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y) ?$$

3. Neka je  $S = \{AB - BA : A, B \in M_n(\mathbb{R})\}$ . Dokažite da je  $S$  potprostor do  $M_n(\mathbb{R})$  i odredite mu dimenziju.

4. Neka je  $A = (a_{ij})$  matrica dimenzija  $n \times n$  takva da vrijedi

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

za sve  $1 \leq i \leq n$ . Dokažite da je  $A$  invertibilna matrica.

5. Neka su  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  pri čemu je  $A$  invertibilna matrica. Ako je  $(A - B)C = BA^{-1}$ , dokažite da je  $C(A - B) = A^{-1}B$ .

6. Odredite jedan maksimalan skup nesličnih matrica  $A$  za koje je  $k_A(x) = (x - 1)^5(x + 1)$  i  $m_A(x) = (x - 1)^2(x + 1)$ .

7. Neka je  $A \in M_n(\mathbb{R})$  takva da vrijedi  $A^3 - 4A^2 + 8A - 8I = 0$ . Odredite  $\det A$ .

8. Neka su  $A, B$  i  $A + B$  regularne kompleksne matrice takve da vrijedi  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ . Dokažite da je tada  $\det^3(A) = \det^3(B)$ .

9. Neka je  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} > 0$  takva da vrijedi  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  za sve  $1 \leq i \leq n$ . Dokažite da za svaki  $\lambda \in \sigma(A)$  vrijedi  $|\lambda| \leq 1$ .

10. Neka su  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  takve da  $A^{2016} = B^{2017} = I$  i  $AB = BA$ . Dokažite da je  $A + B + I$  invertibilna matrica.

11. Neka je  $n$  neparan prirodni broj i  $A$  realna  $n \times n$  matrica takva da je  $A^2 = 0$  i  $A^2 = I$ . Dokažite da je

$$\det(A + I) \geq \det(A - I).$$

12. Neka su  $A$  i  $B$  cjelobrojne  $n \times n$  matrice takve da su matrice

$$A, A + B, A + 2B, \dots, A + 2nB$$

invertibilne i inverzi imaju cjelobrojne koeficijente. Dokažite da je i  $A + (2n + 1)B$  invertibilna matrica te da joj inverz ima cjelobrojne koeficijente.

13. Neka su  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  i pretpostavimo da postoje različiti realni brojevi  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  takvi da su matrice  $A + t_i B$  nilpotentne za sve  $1 \leq i \leq n + 1$ . Dokažite da su matrice  $A$  i  $B$  također nilpotentne.

Kažemo da je matrica  $A$  nilpotentna ako postoji prirodni broj  $k$  takav da je  $A^k = 0$ .

14. Neka je  $A = (a_{ij})$  matrica dimenzija  $n \times n$  s pozitivnim elementima takva da je

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = n.$$

(a) Dokažite da je  $|\det A| \leq 1$ .

(b) Ako je  $|\det A| = 1$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$  je proizvoljna svojstvena vrijednost matrice  $A$ , dokažite da vrijedi  $|\lambda| = 1$ .

15. Dana je matrica  $A = (a_{jk})$  pri čemu je

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako } |j - k| = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokažite da je spektar  $\sigma(A)$  centralosimetričan skup obzirom na ishodište u kompleksnoj ravnini.