MATEMATIČKA ANALIZA 2

priprema za 1. natjecanje, 30.4.2008.

1. Neka je $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ i pretpostavimo da su nam poznati brojevi

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=0}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako je funkcija $g : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$g(x) := f(x^2),$$

dokažite da za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\left(\frac{d^n g}{dx^n}\right)_{x=0} = \begin{cases} \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{x=0} & \text{za } n = 2k \\ 0 & \text{za } n = 2k+1 \end{cases}$$

Pokušajte sada ponovo riješiti (1a) zadatak iz kolokvija.
(`http://web.math.hr/nastava/analiza/kol/ma2-0708-kol1.pdf`)

2. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ definiranu na (konačnom ili beskonačnom) intervalu I kažemo da je *Lipschitzova*, ako vrijedi

$$(\exists L \geq 0)(\forall x, y \in I)(|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|).$$

U tom slučaju za najmanju konstantu L sa gornjim svojstvom kažemo da je *Lipschitzova konstanta* od f i označavamo ju s $\|f\|_L$.

   (a) Dokažite da je svaka Lipschitzova funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna, ali da obrat općenito ne vrijedi.

   (b) Pretpostavimo da je $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Ako je derivacija f' omeđena na I, dokažite da je f Lipschitzova funkcija i da vrijedi

$$\|f\|_L = \sup_{x\in I} |f'(x)|.$$

   Vrijedi li i obrat te tvrdnje?

   (c) Dokažite i (naoko) općenitiju tvrdnju:
   Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ n-puta derivabilna funkcija takva da je n-ta derivacija $f^{(n)}$ omeđena na I, tada je f Lipschitzova funkcija.

   (d) Ispitajte uniformnu neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako je

      (i) $f(x) := \sin(x^2)$,

      (ii) $f(x) := \ln(1 + x^2)$.

3. (a) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija koja je ograničena odozgo. Dokažite da je f konstantna funkcija.

   (b) Mora li nužno konveksna i ograničena funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ biti konstantna funkcija?

4. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da li je nužno f konveksna funkcija?

5. Dokažite da postoje jedinstvene funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x)^3 + 3x^2 f(x) - x^3 + 2x + 3f(x) = 0,$$

$$e^{g(x)} + (1+e^x)g(x)^3 - x^2 = 1$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Pokušajte dokazati da su f i g derivabilne na $\mathbb{R}$. Nadalje, izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

6. Odredite broj realnih nultočki polinoma

$$P(x) := x^4 - \sqrt{7}x^3 + 4x^2 - \sqrt{22}x + 15.$$

7. Neka su $n \in \mathbb{N}$ te $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da jednadžba

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(k\pi x) = 0$$

ima barem dva rješenja u intervalu $[0, 2\rangle$.

8. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija takva da vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Dokažite da je nužno i $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

9. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Pretpostavimo da f na intervalu $\langle a, b\rangle$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1+x^2)y'' + e^{-x}y' + 1 = 0.$$

Dokažite da f svoj minimum poprima na rubu segmenta $[a, b]$.

10. Pretpostavimo da je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija za koju vrijedi

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to b-} f(x) = -\infty \quad \text{te} \quad f'(x) + f^2(x) + 1 \geq 0, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Dokažite da je $b - a \geq \pi$.

11. Što je veće: e^π ili π^e ? Pokušajte formulirati i dokazati nešto općenitiju tvrdnju.

12. Odredite broj rješenja jednadžbe $\cos x + \ln\cos x + x^2 = 0$ u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

13. (a) Dokažite verziju *Rolleovog teorema* za neograničeni interval:
Ako je funkcija $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ neprekidna na $\mathbb{R}_{\geq 0}$ i derivabilna na $\mathbb{R}_+$ te ako je $f(0) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, onda postoji $c \in \mathbb{R}_+$ takav da je $f'(c) = 0$.

    (b) Neka je $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija za koju vrijedi

$$|g(x) - 1| \leq x \quad \text{i} \quad |g(x)| \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Dokažite da postoji $c \in \mathbb{R}_+$ takav da je $g'(c) = -e^{-c}$.

14. Dokažite *Darbouxov teorem*:
Ako je funkcija f derivabilna na otvorenom intervalu koji sadrži točke a i b, onda za svaki broj d između $f'(a)$ i $f'(b)$ postoji točka c između a i b takva da je $f'(c) = d$.
(*Ukratko*: Derivacija funkcije poprima sve međuvrijednosti.)

15. Pretpostavimo da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na $[0,1]$ takva da je $f(0) = f(1) = 0$. Nadalje, pretpostavimo da f'' postoji na $\langle 0,1\rangle$, te da vrijedi $|f''(x)| \leq M$, za sve $x \in \langle 0,1\rangle$. Dokažite da tada vrijedi

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

16. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}} & \text{za } x \in \langle a,b\rangle \\ 0 & \text{za } x \notin \langle a,b\rangle. \end{cases}$$

klase C^∞ na $\mathbb{R}$.

17. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:
Za svaki par derivabilnih funkcija $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji derivabilna funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $h'(x) = f'(x)g'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

18. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je za svako $d \in \mathbb{R}$ funkcija $\Delta_d f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$\Delta_d f(x) := f(x+d) - f(x)$$

klase C^∞ na $\mathbb{R}$. Dokažite da je i f klase C^∞ na $\mathbb{R}$.

19. Postoji li derivabilna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čija derivacija ima gust skup prekida?

20. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ takva da postoji $M \geq 0$ sa svojstvom

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako je $f(\frac{1}{n}) = 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$, dokažite da je $f(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$.