JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do petka, 05. svibnja 2023. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je

$$f(x) = \sin(x^3).$$

Izračunajte $f^{(18)}(0)$. Uputa: nađite neku jednakost koja povezuje f, f' i f''.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y &= f \\
y' &= \cos(x^3)3x^2 \\
y'' &= -\sin(x^3)9x^4 + \cos(x^3)6x \quad / \quad x \\
xy'' &= -9x^5y + 2y' \quad / \quad ^{(n-2)} \\
\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{(k)} y^{n-k} &= -9 \sum_{k=0}^{n-2} (x^5)^{(k)} y^{n-2-k} + 2y^{(n-1)} \quad / \quad x = 0 \\
(n-4)y^{(n-1)}(0) &= -9\binom{n-2}{5} 5! y^{(n-7)}(0) \\
y^{(n)} &= c_n y^{(n-6)}(0) \\
y^{(18)}(0) &= cy(0) = 0
\end{aligned}$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 2. (6 bodova) Odredi parametre a i b tako da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x < 1; \\ \operatorname{arctg} x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

diferencijabilna.

Rješenje.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$$

$$a + b = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{ax^2 + b - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{ax^2 - a}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{2x \frac{1}{1+x^4}}{1}$$

$$2a = 1$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = (x+1)e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje.

Domena funkcije je $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, a nultočka točka $x_0 = -1$.

Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 0$. Provjerimo:

$$\lim_{x\to 0+}(x+1)e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = e^{\frac{\pi}{2}},$$
$$\lim_{x\to 0-}(x+1)e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

pa funkcija nema vertikalnu asimptotu.

Provjerimo ima li funkcija kosu asimptotu:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left((x+1)e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{x+1}{x}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x+1}{x}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$
$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} + \frac{x+1}{x}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

Dakle, pravac $y = x + 2$ je kosa asimptota.

Izračunajmo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x}{x^2+1}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$$

pa funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ i na $[1, +\infty\rangle$, a pada na na $\langle 0, 1]$. Funkcija ima lokalni minimum u točki $x = 1$ i iznosi $f(1) = 2e^{\frac{\pi}{4}}$.

Druga derivacija:

$$f''(x) = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$$

pa je funkcija konveksna na intervalu $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, 0\rangle$ i na $\left\langle 0, \frac{1}{3}\right]$ te ima jednu točku infleksije $x = \frac{1}{3}$ za koju je $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}e^{\operatorname{arctg}(3)}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 4. (3+3 boda) Točka A se nalazi na pozitivnom dijelu x-osi, a točka B se nalazi u prvom kvadrantu, na pravcu koji prolazi ishodištem i zatvara s x-osi kut veličine θ, $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Zbroj njihovih udaljenosti od ishodišta je jednak 10.

(a) Odredite poziciju (koordinate) točaka A i B u slučaju kada je udaljenost između njih najmanja.

(b) Za točke A i B iz (a) dijela, odredite kružnicu sa središtem u ishodištu čija tangenta je upravo pravac AB.

Rješenje.

(a) Označimo udaljenost točke A od ishodišta s a, a udaljenost točke B od ishodišta s b. Tada je

$$a + b = 10 \;\Rightarrow\; b = 10 - a.$$

Napisat ćemo udaljenost između točaka kao funkciju po varijabli a, tj. promatramo funkciju $d : \langle 0, 10\rangle \to [0, +\infty\rangle$ i tražimo minimum te funkcije.

Promatramo trokut OAB i visinu v povučenu iz vrha B. Označimo sjecište visine v i dužine $\overline{OA}$ s T. Tada je

$$\begin{aligned}\overline{OT} &= b\cos\theta,\\ \overline{BT} &= b\sin\theta.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}d(a)^2 &= v^2 + \overline{TA}^2\\ &= b^2\sin^2(\theta) + (a - b\cos(\theta))^2\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)\\ &= 2(1-\cos(\theta))a^2 + 20(\cos(\theta) - 1)a + 100\end{aligned}$$

Jedan način je da deriviranjem $d(p) = \sqrt{(2(1-\cos(\theta))a^2 + 20(\cos(\theta)-1)a + 100}$ pronađemo stacioniranu točku $a = 5$ uočimo da je to ujedno i globalni minimum (d pada prije točke 5 i raste poslije).

Alternativni način je uočiti da je funkcija $x \mapsto x^2$ rastuća funkcija na $\langle 0, +\infty\rangle$ pa pa tamo gdje funkcija d poprima minimum, također i funkcija $a \mapsto d(a)^2$ poprima minimum. Zato ćemo minimizirati funkciju $d^2(a)$.

To je kvadratna funkcija pa se minimum poprima u točki

$$a_{\min} = -\frac{20(\cos(\theta)-1)}{4(1-\cos(\theta))} = 5 \;\Rightarrow\; b_{\min} = 5$$

pa su koordinate točaka $A = (5, 0)$ i $B = (5\cos\theta, 5\sin\theta)$.

(b) Tražimo kružnicu određenu formulom $x^2 + y^2 = r^2$, odnosno, tražimo $r > 0$. Neka je točka $T(x_0, y_0)$ točka na kružnici u kojoj je povučena tangenta na kružnicu upravo pravac AB. Implicitnim deriviranjem jednadžbe kružnice vidimo da je jednadžba tangente povučene u točki T jednaka

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

Iz uvjeta da se točke A i B nalaze na tangenti i da je T točka na kružnici, dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} 5x_0 &= r^2 \\ 5\cos(\theta)x_0 + 5\sin(\theta)y_0 &= r^2 \\ x_0^2 + y_0^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ubacivanjem prve dvije jednadžbe u treću, dobijemo

$$x_0^2 \left(\frac{2}{1 + \cos(\theta)} \right) - 5x_0 = 0.$$

Dakle, rješenja su $x_0 = 0$ i $x_0 = \frac{5(1+\cos(\theta))}{2}$. Kako je $r > 0$, slijedi da je $r^2 = \frac{25(1+\cos(\theta))}{2}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do petka, 05. svibnja 2023. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je

$$g(x) = \cos(x^3).$$

Izračunajte $g^{(19)}(0)$. Uputa: nađite neku jednakost koja povezuje g, g' i g''.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y &= g \\
y' &= -\sin(x^3)3x^2 \\
y'' &= -\cos(x^3)9x^4 - \sin(x^3)6x \quad / \quad x \\
xy'' &= -9x^5y + 2y' \quad / \quad ^{(n-2)} \\
\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{(k)} y^{n-k} &= -9 \sum_{k=0}^{n-2} (x^5)^{(k)} y^{n-2-k} + 2y^{(n-1)} \quad / \quad x = 0 \\
(n-4)y^{(n-1)}(0) &= -9\binom{n-2}{5} 5! y^{(n-7)}(0) \\
y^{(n)} &= c_n y^{(n-6)}(0) \\
y^{(19)}(0) &= cy'(0) = 0
\end{aligned}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 2. (6 bodova) Odredi parametre c i d tako da je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x^2, & x \leq 1; \\ cx^2 - d, & x > 1. \end{cases}$$

diferencijabilna.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1+} f(x) \\ \frac{\pi}{4} &= c - d \\ \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ \lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arcctg} x^2 - \frac{\pi}{4}}{x-1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{cx^2 - d - \frac{\pi}{4}}{x-1} \\ \lim_{x\to 1-} \frac{2x\frac{-1}{1+x^4}}{1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{cx^2 - c}{x-1} \\ -1 &= 2c \end{aligned}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = xe^{\frac{x}{2(x-2)}}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Domena funkcije je $\mathbf{R}\backslash\{2\}$, a nultočka točka $x_0 = 0$.

Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 2$. Provjerimo:

$$\lim_{x\to 2+} xe^{\frac{x}{2(x-2)}} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2-} xe^{\frac{x}{2(x-2)}} = 0,$$

pa je $x = 2$ vertikalna asimptota zdesna.

Provjerimo ima li funkcija kosu asimptotu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{2(x-2)}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(xe^{\frac{x}{2(x-2)}} - e^{\frac{1}{2}}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{x}{2(x-2)}} - e^{\frac{1}{2}}}{x}$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{e^{\frac{x}{2(x-2)}}}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Dakle, pravac $y = \sqrt{e}(x+1)$ je kosa asimptota.

Izračunajmo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} e^{\frac{x}{2(x-2)}}$$

pa funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, 1]$ i na $[4, +\infty\rangle$, a pada na $[1, 2\rangle$ i na $\langle 2, 4]$. Funkcija ima lokalni maksimum u točki $x = 1$ i iznosi $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ i lokalni minimum u točki $x = 4$ koji iznosi $f(4) = 4e$.

Druga derivacija:

$$f''(x) = \frac{5x - 8}{(x-2)^4} e^{\frac{x}{2(x-2)}}$$

pa je funkcija konveksna na intervalu $\left[\frac{8}{5}, 2\right\rangle$ i na $\langle 2, +\infty\rangle$, a konkavna na $\left\langle -\infty, \frac{8}{5}\right]$ te ima jednu točku infleksije $x = \frac{8}{5}$ za koju je $f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5}e^{-2}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2023.

Zadatak 4. (3+3 boda) Točka P nalazi se na negativnom dijelu x-osi, a točka Q se nalazi u drugom kvadrantu (njena x koordinata je negativna, a y koordinata je pozitivna), na pravcu koji prolazi ishodištem i zatvara s x-osi kut veličine θ, $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$. Zbroj njihovih udaljenosti od ishodišta je jednak 100.

(a) Odredite poziciju (koordinate) točaka P i Q u slučaju kada je udaljenost između njih najmanja.

(b) Za točke P i Q iz (a) dijela, odredite kružnicu sa središtem u ishodištu čija tangenta je upravo pravac PQ.

Rješenje.

(a) Označimo udaljenost točke P od ishodišta s p, a udaljenost točke Q od ishodišta s q. Tada je

$$p + q = 100 \;\Rightarrow\; p = 100 - q.$$

Napisat ćemo udaljenost između točaka kao funkciju po varijabli p, tj. promatramo funkciju $d : \langle 0, 100 \rangle \to [0, +\infty\rangle$ i tražimo minimum te funkcije. Neka je $\alpha = \pi - \theta$.

Promatramo trokut OQP i visinu v povučenu iz vrha Q. Označimo sjecište visine v i dužine $\overline{OP}$ s T. Tada je

$$\begin{aligned} \overline{OT} &= q\cos\alpha, \\ \overline{QT} &= q\sin\alpha. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} d(p)^2 &= v^2 + \overline{TP}^2 \\ &= q^2\sin^2(\alpha) + (p - q\cos(\alpha))^2 \\ &= p^2 + q^2 - 2pq\cos(\alpha) \\ &= 2(1-\cos(\alpha))p^2 + 200(\cos(\alpha) - 1)p + 100^2 \end{aligned}$$

Jedan način je da deriviranjem $d(p) = \sqrt{2(1-\cos(\alpha))p^2 + 200(\cos(\alpha)-1)p + 100^2}$ pronađemo stacioniranu točku $a = 50$ uočimo da je to ujedno i globalni minimum (d pada prije točke 50 i raste poslije).

Alternativni način je uočiti da je funkcija $x \mapsto x^2$ rastuća funkcija na $\langle 0, +\infty\rangle$ pa tamo gdje funkcija d poprima minimum, također i funkcija $p \mapsto d(p)^2$ poprima minimum. Zato ćemo minimizirati funkciju $d^2(p)$.

To je kvadratna funkcija pa se minimum poprima u točki

$$a_{\min} = -\frac{200(\cos(\alpha) - 1)}{4(1-\cos(\alpha))} = 50 \;\Rightarrow\; b_{\min} = 50$$

pa su koordinate točaka $A = (-50, 0)$ i $B = (-50\cos\alpha, 50\sin\alpha) = (50\cos(\theta), 50\sin(\theta))$.

(b) Tražimo kružnicu određenu formulom $x^2 + y^2 = r^2$, odnosno, tražimo $r > 0$. Neka je točka $T(x_0, y_0)$ točka na kružnici u kojoj je povučena tangenta na kružnicu upravo pravac PQ. Implicitnim deriviranjem jednadžbe kružnice vidimo da je jednadžba tangente povučene u točki T jednaka

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

Iz uvjeta da se točke P i Q nalaze na tangenti i da je T točka na kružnici, dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} -50x_0 &= r^2 \\ -50\cos(\alpha)x_0 + 50\sin(\alpha)y_0 &= r^2 \\ x_0^2 + y_0^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ubacivanjem prve dvije jednadžbe u treću, dobijemo

$$x_0^2 \left(\frac{2}{1 + \cos(\alpha)} \right) + 50x_0 = 0.$$

Dakle, rješenja su $x_0 = 0$ i $x_0 = \frac{-50(1+\cos(\alpha))}{2}$. Kako je $r > 0$, slijedi da je $r^2 = \frac{2500(1+\cos(\alpha))}{2}$.