JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do ponedjeljka, 03. srpnja 2023. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1. (5 bodova) Izračunajte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(3+\cos x)^2}\,dx,$$

Rješenje. Primjenjujemo univerzalnu supstituciju: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, granice za varijablu t idu od $\operatorname{tg} 0 = 0$ do $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Dobijemo:

$$\int_0^1 \frac{2}{\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{(t^2+2)^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2+t^2}{(t^2+2)^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}(I_1+I_2).$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatim I_2 rješavamo parcijalnom integracijom $u = t$, $dv = \frac{t}{(t^2+2)^2}\,dt$ iz čega je $du = dt$, a $v = \frac{-1}{2(t^2+2)}$ pa je

$$I_2 = \frac{-t}{2(t^2+2)}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2}I_1,$$

Zato je traženi integral jednak:

$$\frac{3}{4}I_1 - \frac{1}{12} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{12}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 2.

a) (4 boda) Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s $f(x) = x \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Dokažite da postoji njena primitivna funkcija koja je neprekidna u točki 1.

b) (3 boda) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala i, ako konverira, odredite mu vrijednost:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} e^{\frac{1}{x-1}} \, dx.$$

Rješenje.

a) Kako je zadana funkcija f neprekidna na $\langle 0, +\infty\rangle$, prema teoremu s predavanja znamo da ima primitivnu funkciju $F(x)$ na tom otvorenom intervalu, tj. postoji funkcija $F : \langle 0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$. Definiramo $F(0)$ tako da je $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$ pa je $F(x)$ neprekidna na $[0, +\infty\rangle$. Budući da je primitivna funkcija također derivabilna, slijedi da je i neprekidna.

b) Uočavamo da integral funkcije $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ neće konvergirati, pa ćemo danu funkciju usporediti s integralom te funkcije. Dakle, vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Kako je $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$, slijedi da je za dovoljno veliki x $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geq \frac{1}{2}$, čiji integral divergira pa po usporednom kriteriju divergira i $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

Konačno, po graničnom kriteriju slijedi da divergira i početni integral.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 3. (3+3 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n^2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{-n^2}$$

Rješenje.

a) Usporedimo dani red s divergentnim redom $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n\frac{\sqrt{1+2/n+3/n^2}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \implies \text{Red divergira.}$$

b) Koristimo Cauchyev kriterij

$$\left[\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{-n}{n+3}} \longrightarrow \quad e^{-2} < 1$$

Red konvergira.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 4.

a) (4 boda) Razvijte u Maclaurinov red funkciju

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2}$$

te odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

b) (3 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3-n}{n5^n}$$

Rješenje.

a) Znamo da je

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}, \quad |x| < 1,$$

pa imamo

$$\frac{x}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(\frac{x^2}{2}+1)^2} = \frac{x}{4}\sum_{n\geq 1} n\left(-\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n+1}} x^{2n-1}$$

gdje je $\frac{x^2}{2} < 1$, odnosno $R = \sqrt{2}$.

b)

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{3-n}{n5^n} &= 3\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n5^n} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{5^n} = -3\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(-5)^n} - (-1 + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^n}) \\ &= -3\ln(1-\frac{1}{5}) - (-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{5}}) \\ &= -3\ln\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do ponedjeljka, 03. srpnja 2023. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1. (5 bodova) Izračunajte:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{3+\sin^2 x},$$

Rješenje. Primjenjujemo univerzalnu supstituciju: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, granice za varijablu t idu od $\operatorname{tg}\frac{-\pi}{4}=-1$ do $\operatorname{tg} 0 = 0$. Dobijemo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{3+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int_{-1}^{0} \frac{1+t^2}{(3t^2+1)(t^2+3)}\,dt$$
$$= 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{4}\frac{1}{3t^2+1}\,dt + 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{4}\frac{1}{t^2+3} = \frac{1}{2}(I_1+I_2),$$

pri čemu smo u drugom koraku koristili rastav na parcijalne razlomke.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}t\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Zato je traženi integral jednak:

$$\frac{1}{2}(I_1+I_2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 2.

a) (4 boda) Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s $f(x) = x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. Dokažite da postoji njena primitivna funkcija koja je neprekidna u točki 1.

b) (3 boda) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala i, ako konverira, odredite mu vrijednost:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} e^{\frac{1}{x+1}}\, dx.$$

Rješenje.

a) Kako je zadana funkcija f neprekidna na $\langle 0, +\infty\rangle$, prema teoremu s predavanja znamo da ima primitivnu funkciju $F(x)$ na tom otvorenom intervalu, tj. postoji funkcija $F : \langle 0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$. Definiramo $F(0)$ tako da je $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$ pa je $F(x)$ neprekidna na $[0, +\infty\rangle$. Budući da je primitivna funkcija također derivabilna, slijedi da je i neprekidna.

b) Zadatak se može riješiti na više načina, jedan način opisan je u prvoj grupi. Drugi način:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} e^{\frac{1}{x+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} e^{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

Kako $\int_1^{+\infty} 1\, dx$ integral divergira. po graničnom kriteriju divergira i početni integral.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 3. (3+3 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n^2}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+8}{n+5}\right)^{-n^2}$$

Rješenje.

a) Usporedimo dani red s divergentnim redom $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n\frac{\sqrt{1+3/n+1/n^2}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \implies \text{Red divergira.}$$

b) Koristimo Cauchyev kriterij

$$\left[\left(\frac{n+8}{n+5}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{3}{n+5}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{3}{n+5}\right)^{n+5}\right]^{\frac{-n}{n+5}} \longrightarrow \quad e^{-3} < 1$$

Red konvergira.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 28. lipnja 2023.

Zadatak 4.

a) (4 boda) Razvijte u Maclaurinov red funkciju

$$f(x) = \frac{x}{(x^3+3)^2}$$

te odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

b) (3 boda) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n\geq 1} \frac{5-n}{n7^n}$$

Rješenje.

a) Znamo da je

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}, \quad |x| < 1,$$

pa imamo

$$\frac{x}{(x^3+3)^2} = \frac{x}{9(\frac{x^3}{3}+1)^2} = \frac{x}{9}\sum_{n\geq 1} n\left(-\frac{x^3}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n+1}}x^{3n-2}$$

gdje je $\frac{x^3}{3} < 1$, odnosno $R = \sqrt[3]{3}$.

b)

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{5-n}{n7^n} &= 5\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n7^n} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{7^n} = -5\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(-7)^n} - (-1 + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{7^n}) \\ &= -5\ln(1-\frac{1}{7}) - (-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{7}}) \\ &= -5\ln\frac{6}{7} + \frac{1}{6}\end{aligned}$$