Rast i pad funkcije, minimum i maksimum

1. Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije zadane formulom:

   a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2 - 4}\,,$

   b) $f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) - 2\,\mathrm{arctg}(x^2 - 3)\,.$

2. Odredite broj realnih rješenja svake od sljedećih jednadžbi:

   a) $x^7 + x^5 + x^3 - 3 = 0\,,$

   b) $x + \cos x - 5 = 0\,,$

   c) $(x^2 - 3)e^x = a$ (u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$).

3. Dokažite da vrijede sljedeće nejednakosti:

   a) $5x + \dfrac{1}{x^5} \geq 6,$ za svaki $x > 0,$

   b) $\mathrm{arctg}\, x > \arcsin \dfrac{x^2}{x^2 + 1},$ za svaki $x > 0,$

   c) $\ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b^2 - a^2}{2ab},$ za svake $0 < a < b,$

   d) $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{8}{3}} \geq 9\sqrt[3]{\frac{9}{2}},$ za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

4. Odredite globalne ekstreme funkcije:

   a) $f\colon [-2, -\frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{x^2 + 6x + 1}{x}}\,,$

   b) $f\colon [\frac{1}{2}, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1}\,.$

5. Rastavite broj 1 na dva nenegativna pribrojnika tako da im zbroj korijena bude najveći.

6. U polukružnicu polumjera 1 upisan je trapez čija osnovica je promjer polukružnice. Odredite kut uz osnovicu trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

7. U stožac s polumjerom baze 4 cm i visinom 6 cm upišite valjak najvećeg volumena. Koliki je taj volumen?

8. Na krivulji $y = \mathrm{ch}\, x$ nađite točku najbližu pravcu $y = \frac{3}{4}x$.

9. U zemlji *MathLand* davno je uveden koordinatni sustav. Na obali rijeke $y = 0$ nalazi se grad $A(-2, 0)$, a dalje od obale je grad $C(0, 1)$. Odredite na kojem mjestu treba izgraditi pristanište $B(b, 0)$, $-2 \leq b \leq 0$ da bi transport od A do C preko B bio najjeftiniji. Pritom je još poznato da je cijena transporta kopnom dva puta veća nego cijena transporta rijekom.

10. Na krivulju $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x > 1$ povucite tangentu takvu da površina pravokutnog trokuta omeđenog tom tangentom i koordinatnim osima bude minimalna. Kolika je najmanja vrijednost te površine?

11. Dva hodnika širine 320 cm i 135 cm sijeku se pod pravim kutom. Odredite najveću duljinu tankog nesavitljivog štapa koji se može (u horizontalnom položaju) prenijeti iz jednog hodnika u drugi.

12. Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da minimum funkcije

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$$

na segmentu $[0, 2]$ bude jednak 1.

13.* Polinom P stupnja n s realnim koeficijentima zadovoljava $P(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da tada vrijedi i

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

[*Uputa*: Označimo lijevu stranu s $f(x)$. Primijetite da je $f(x) = P(x) + f'(x)$.]

Konveksnost i konkavnost, infleksija

1. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije zadane formulom:

   a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$,

   b) $f(x) = e^{-2x^2+x+1}$.

2. Dokažite da na grafu funkcije $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ postoje tri točke infleksije i da sve one leže na jednom pravcu. Koji je to pravac?

3. Koliko najviše nultočaka može imati neprekidna strogo konveksna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Obrazložite.

4.* Neka je I otvoreni interval te $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija. Dokažite da za svake $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Ako je pak f konkavna, onda vrijedi obratna nejednakost.

[*Uputa*: Matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

5.* Dokažite da vrijede sljedeće nejednakosti:

a) $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leq \dfrac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}$, za $p > 1$ i za svake $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$,

b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, ako su α, β, γ kutovi nekog trokuta,

c) $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ \geq 44 \cdot (\sqrt{2} - 1)$,

[*Uputa*: $\sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg} 22.5^\circ$.]

d) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \leq (\sqrt{2} - 1)^{44}$.

[*Uputa*: Promatrajte funkciju $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$.]