5

Opća svojstva atomskih jezgara

5.1 Polumjer

Određivanje veličine i oblika atomske jezgre posve je netrivijalan problem, osobito za nestabilne jezgre i pobuđena stanja svih jezgara. Stabilne se jezgre mogu pripremiti u obliku mete pa im se polumjer standardno određuje elektronskim raspršenjem. De Broglieva valna duljina elektrona mora biti manja od tipičnog polumjera ($\lambda <$ 10 fm), što znači da elektroni moraju imati energiju blisku ili veću od 1 GeV.

Kutna raspodjela za raspršene elektrone dana je s (vidi npr. *Povh*, str. 57):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{V^2 E^2}{(2\pi)^2(\hbar c)^4} \left|\langle\psi_f|H_{\mathrm{int}}|\psi_i\rangle\right|^2 \quad . \tag{5.1}$$

Operator interakcije za raspršenje elektrona je $H_{\mathrm{int}}{=}e\phi$ (gdje je ϕ električni potencijal), a budući da elektroni imaju brzine bliske brzini svjetlosti, njihovo početno i konačno stanje je dobro opisano ravnim valom; imamo, dakle:

$$\langle\psi_f|H_{\mathrm{int}}|\psi_i\rangle = \frac{e}{V}\int e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}/\hbar}\phi(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}\mathrm{d}V \quad ,$$

gdje je $\boldsymbol{p}$ impuls elektrona prije, a $\boldsymbol{p}'$ impuls elektrona nakon raspršenja. Definiramo li preneseni impuls $\boldsymbol{q}$ kao:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' \quad , \tag{5.2}$$

imamo:

$$\langle\psi_f|H_{\mathrm{int}}|\psi_i\rangle = \int \phi(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar}\mathrm{d}V \quad .$$

Ovdje treba iskoristiti jedan od Greenovih teorema, koji kaže da za dva skalarna polja (koja brzo padaju na velikim udaljenostima) vrijedi:

$$\int \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)\mathrm{d}V = 0 \quad .$$

U našem slučaju Greenov teorem daje:

$$\int \left[\phi(\boldsymbol{r})\left(\nabla^2 e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar}\right)\right]\mathrm{d}V = \int \left[\left(\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\right)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar}\right]\mathrm{d}V \quad .$$

a budući da vrijedi:

$$e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar} = \frac{-\hbar^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\nabla^2 e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar} \quad ,$$

traženi matrični element postaje:

$$\langle\psi_f|H_{\mathrm{int}}|\psi_i\rangle = \frac{-e\hbar^2}{V|\boldsymbol{q}|^2}\int\left(\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\right)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}/\hbar}\mathrm{d}V \quad .$$

Potencijal ϕ i gustoća naboja vezani su Poissonovom jednadžbom (pretpostavljamo neovisnost o vremenu):

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{-\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \quad ,$$

odakle se dobiva:

$$\langle\psi_f|H_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{e\hbar^2}{\epsilon_0 V|\boldsymbol{q}|^2}\int \rho(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{qr}/\hbar}\mathrm{d}V \quad .$$

Definiramo li:

$$\rho = Ze\rho_{\rm ch} \quad ,$$

uz normalizaciju:

$$1 = \int \rho_{\rm ch}\mathrm{d}V \quad ,$$

dobiva se:

$$\langle\psi_f|H_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{Ze^2\hbar^2}{\epsilon_0 V|\boldsymbol{q}|^2}\int \rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{qr}/\hbar}\mathrm{d}V \quad .$$

Fourierov transformat gustoće naboja:

$$F(\boldsymbol{q}) = \int \rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{qr}/\hbar}\mathrm{d}V \tag{5.3}$$

naziva se **form-faktor** i posve definira kutnu raspodjelu (izraz 5.1) elektronskog raspršenja (na visokim energijama):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{V^2E^2}{(2\pi\hbar)^2c^4}\frac{Ze^2}{\epsilon_0 V|\boldsymbol{q}|^2}|F(\boldsymbol{q})|^2 \quad .$$

Za form-faktor vrijedi da za $q\rightarrow 0$ teži k 1, a za $q\rightarrow\infty$ nestaje. Za točkasti je naboj form-faktor jednak konstanti.

Raspodjela naboja može se dobiti iz form faktora pomoću inverzne Fourierove transformacije:

$$\rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int F(\boldsymbol{q})e^{-i\boldsymbol{qr}/\hbar}\mathrm{d}^3\boldsymbol{q} \quad . \tag{5.4}$$

Idealno bi bilo izmjeriti potpunu kutnu raspodjelu za raspršenje jer tada bi se form-faktor direktno dobio iz:

$$|F(\boldsymbol{q})|^2 = \frac{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\rm exp}}{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\rm point}} \quad . \tag{5.5}$$

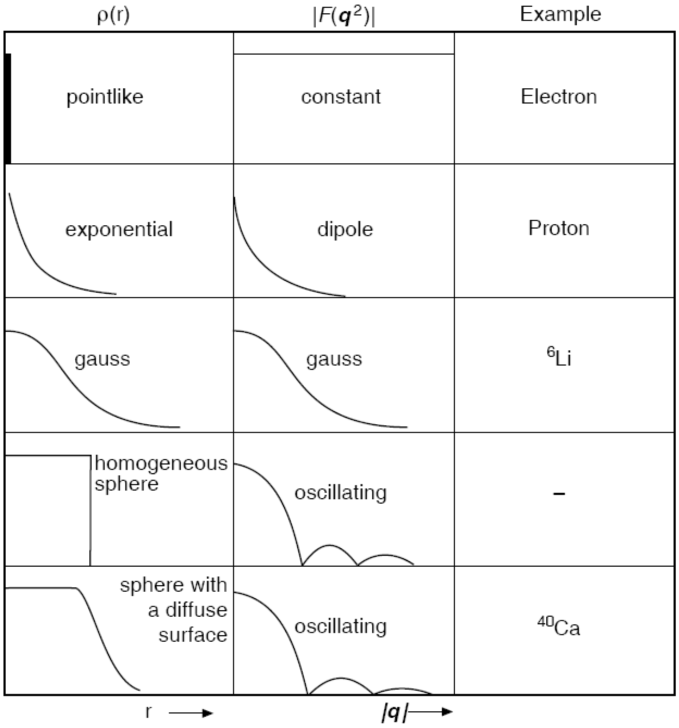
Za sfernosimetrične slučajeve ($\rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r}) = \rho_{\rm ch}(r)$) vrijedi:

$$F(\boldsymbol{q}) = 4\pi\int \rho_{\rm ch}(r)\frac{\sin(|\boldsymbol{q}|r/\hbar)}{|\boldsymbol{q}|r/\hbar}r^2\mathrm{d}r \quad .$$

U praksi se mjerenja rade samo za neke $\boldsymbol{q}$, dovoljno da se nađe položaj prvog minimuma oscilirajućeg form-faktora (vidi sliku 5.1); iz njega se tada direktno očitava polumjer jezgre.

Druga metoda bazirana je na prvoj Bornovoj aproksimaciji, uz $\boldsymbol{qr}/\hbar \ll 1$:

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{q}) &= \int \rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{qr}/\hbar}\mathrm{d}V \approx \\
&\approx \int \rho_{\rm ch}(r)\left[1 + \frac{1}{2}(i\boldsymbol{qr}/\hbar)^2\right]\mathrm{d}V = \\
&= \int \rho_{\rm ch}(r)\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int \rho_{\rm ch}(r)(\boldsymbol{qr}/\hbar)^2\mathrm{d}V = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int \rho_{\rm ch}(r)q^2r^2/\hbar^2 2\pi r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \\
&= 1 - \frac{1}{6}\frac{\boldsymbol{q}^2}{\hbar^2}4\pi\int_0^\infty r^2\rho_{\rm ch}(r)r^2\mathrm{d}r \quad .
\end{aligned} \tag{5.6}$$



Slika 5.1: Veza između raspodjele naboja ρ_{ch} i form-faktora.

Definiramo li srednji kvadratični polumjer kao:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho_{\mathrm{ch}}(r) r^2 \mathrm{d}r \tag{5.7}$$

za form-faktor dobivamo:

$$F(\boldsymbol{q}) = 1 - \frac{1}{6}\frac{\boldsymbol{q}^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} \quad ,$$

odnosno za polumjer:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q})}{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^2}|_{\boldsymbol{q}^2=0} \quad . \tag{5.8}$$

Sistematična mjerenja elektronskih raspršenja na stabilnim jezgrama rezultirala su u jednostavnj relaciji između srednjeg kvadratičnog polumjera i broja nukleona:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94\,\mathrm{fm} \;\cdot A^{1/3} \quad . \tag{5.9}$$

Aproksimiramo li jezgru kao homogeno nabijenu kuglu (što je dobra aproksimacija za stabilne jezgre), tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho_{\mathrm{ch}}(r) r^2 \mathrm{d}r = \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \\ &= \frac{4\pi \int_0^R r^4 \mathrm{d}r}{4\pi \int_0^R r^2 \mathrm{d}r} = \\ &= \frac{3}{5}R^2 \quad , nonumber \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$R^2 = \frac{5}{3}\langle r^2 \rangle \quad ,$$

pa relacija 5.9 postaje:

$$R = 1.21\,\mathrm{fm} \cdot A^{1/3} \quad . \tag{5.11}$$

Zadatak 5.1

Za neke jezgre (npr. ^{4}He ili ^{6}Li) gustoća naboja dobro je opisana s:

$$\rho(r) = eCe^{-r^2/\sigma^2}$$

gdje su σ i C konstante.
(a) Izrazite σ preko C i Z;
(b) Izračunajte $\langle r^2 \rangle$ za tu raspodjelu naboja;
(c) Nađite form-faktor $F(q^2)$ za tu raspodjelu naboja i izrazite ga preko $\langle r^2 \rangle$.

Rješenje 5.1

(a)

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathrm{d}^3 r \rho(r)/e = \\ &= C \int \mathrm{d}^3 r e^{-r^2/\sigma^2} = \\ &= C \int_0^\infty \mathrm{d}r 4\pi r^2 e^{-r^2/\sigma^2} = \\ &= C \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{4}\sigma^3 \quad . \end{aligned}$$

Dakle:

$$\sigma^3 = \frac{Z}{k\pi^{3/2}} \quad .$$

Kasnije će nam trebati:

$$C = \frac{Z}{\pi^{3/2}\sigma^3} \quad .$$

(b)

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathrm{d}^3 r r^2 \rho(r)/e = \\ &= \frac{C}{Z}\int \mathrm{d}^3 r r^2 e^{-r^2/\sigma^2} = \\ &= \frac{Z}{Z\pi^{3/2}\sigma^3}\int_0^\infty \mathrm{d}r 4\pi r^4 e^{-r^2/\sigma^2} = \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}\sigma^3}\frac{4\pi 3\sqrt{\pi}}{8}\sigma^5 = \\ &= 3/2\sigma^2 \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

(c) Koristit ćemo zamjene:

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r}/\sigma \quad ,$$

$$\boldsymbol{r''} = \boldsymbol{r'} + \frac{i\sigma \boldsymbol{q}}{2} \quad ,$$

Krećući od definicije form-faktora:

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \frac{1}{Z}\int \mathrm{d}^3 r e^{-i\boldsymbol{qr}}\rho(r)/e = \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 r' e^{(-i\sigma \boldsymbol{qr'} - r'^2)} = \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 r' \exp\left(-(\boldsymbol{r'} + \frac{i\sigma\boldsymbol{q}}{2})^2 - \frac{\sigma^2 q^2}{4}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{\sigma^2 q^2}{4}\right)\int \mathrm{d}^3 r'' \exp\left(-r''^2\right) = \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{\sigma^2 q^2}{4}\right)\pi^{3/2} = \\
&= \exp\left(-\frac{\sigma^2 q^2}{4}\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\langle r^2\rangle q^2}{6}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 5.2

a) Odredite elektrostatsku energiju naboja Q jednoliko raspodijeljenog po kugli polumjera R.

b) Budući da su ^{27}Si i ^{27}Al zrcalne atomske jezgre, njihova osnovna stanja su identična do na naboj. Znajući da je razlika njihovih masa jednaka 6 MeV-a, te da je razlika u masi neutrona i protona 1.29 MeV, odredite njihov polumjer.

Rješenje 5.2

a) Električno polje ravnomjerno nabijene kugle polumjera R dobiva se Gaussovim zakonom:

$$\int E(r)\mathrm{d}A = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad ,$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad ;$$

za polje van kugle ($r>R$) dobivamo:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ,$$

a za polje unutar kugle ($r<R$):

$$E(r) = \frac{Q}{4/3R^3\pi}4/3r^3\pi\frac{1}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad .$$

Elektrostatska energija dana je s:

$$
\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 \mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0 \left[\int_0^R {\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty {\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \right] = \\
&= \frac{Q^2}{2\cdot 4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 \mathrm{d}r + \int_R^\infty r^{-2} \mathrm{d}r \right] = \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^6}\frac{R^5}{5} + \frac{1}{R} \right) = \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{6}{5R} = \\
&= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad .
\end{aligned}
$$

b) Pripiše li se razlika u masi u potpunosti razlici u elektrostatskoj energiji (te razlici u masi protona i neutrona), dobiva se (uz Q=Ze):

$$\Delta Mc^2 = \Delta W_e - (m_n - m_p)c^2 \quad , \tag{5.13}$$

$$\Delta W_e = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\left(Z_1^2 - Z_2^2\right) \quad , \tag{5.14}$$

$$\Delta Mc^2 + (m_n - m_p)c^2 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}(Z_1^2 - Z_2^2) \quad , \tag{5.15}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0}\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)}{\Delta Mc^2 + (m_n - m_p)c^2} = \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0}\frac{1}{6\ \text{MeV}\ + 1.29\ \text{MeV}}\left(14^2 - 13^2\right) = \\
&\approx 3.2\cdot 10^{-15}\ \text{m}\ = 3.2\ \text{fm} \quad .
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Dobivena vrijednost bliska je vrijednosti koja se dobiva upotrebom izraza R=$r_0A^{1/3}$ (3.5 fm).

Zadatak 5.3

Treći način određivanja polumjera atomskih jezgara je putem preciznog proučavanja atomskih prijelaza. Izvedite izraz za razliku atomskih energija K-prijelaza (elektronskih prijelaza $2p\rightarrow 1s$) između dva susjedna izotopa nekog elementa (ta se razlika naziva "izotopni pomak"). Pokažite kako se iz eksperimentalno određenog izotopnog pomaka može odrediti polumjer jezgre.

Rješenje 5.3

Pri rješavanju Schrödingerove jednadžbe za atom vodika prvoj se aproksimaciji pretpostavlja da se elektron giba u kulonskom potencijalu točkastog naboja. No, jezgra nije točkasta - udio vremena koje elektron provodi unutar jezgre direktno ovisi o njenoj veličini.

Unutar jezgre potencijal je dan s:

$$V'(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad . \tag{5.17}$$

Očekivana vrijednost potencijalne energije dana je s:

$$\langle V\rangle = \int \psi_n^* V \psi_n \mathrm{d}V \quad .$$

Elektronska valna funkcije nije bitnije promijenjena - razlika u energiji posljedica je razlike između točkastog potencijala (V) i potencijala koji uzima u obzir dimenziju jezgre (V'):

$$\langle V'\rangle = \int_{r<R} \psi_n^* V' \psi_n \mathrm{d}V + \int_{r>R} \psi_n^* V' \psi_n \mathrm{d}V \quad .$$

Upotrebom vodikove $1s$ valne funcije:

$$R(r) = 2(Z/a_0)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad , \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad , \tag{5.18}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E' - E \approx \\ &\approx \langle V'\rangle - \langle V\rangle = \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^4}{a_0^3}\int_0^R e^{-2Zr/a_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3}\right] r^2 \mathrm{d}r \quad . \end{aligned}$$

Budući da vrijedi:

$$R \ll a_0 \quad ,$$

tj.:

$$e^{-2Zr/a_0} \approx 1 \quad ,$$

za r u području integracije, integral se može pojednotaviti:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^4}{a_0^3}\int_0^R \left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3}\right] r^2 \mathrm{d}r = \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^4}{a_0^3}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{3r^3}{2R\cdot 3} + \frac{1}{2R^3}\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^4}{a_0^3}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{10}\right] = \\ &= \frac{2}{5}\frac{Z^4e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2}{a_0^3} \quad . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dobiveni izraz je razlika između energija atomskog $1s$-stanja za "točkastu" i realnu jezgru, a to nije veličina koja se može mjeriti.
Da bi dobili takvu mjerljivu veličinu, potrebno je usporediti energiju K-prijelaza K-prijelaza ($2p \rightarrow 1s$) u bliskim izotopima s masama A i A'. Valna funkcija p-elektrona nestaje za r=0 (dakle, p-elektron ne provodi iole značajan dio vremena u jezgri) pa se može zanemariti taj utjecaj na razliku:

$$E_K(A) - E_K(A') = E_{2p}(A) - E_{1s}(A) - E_{2p}(A') + E_{1s}(A') \approx -E_{1s}(A) + E_{1s}(A') \quad ,$$

Pokazali smo da vrijedi:

$$E_{1s} = E_{\text{point}} + \Delta E \quad ,$$

a budući da je za izotope istog elementa (isti Z!) E_{point} konstantan, imamo:

$$E_K(A) - E_K(A') = \frac{2}{5}\frac{Z^4e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_0^2}{a_0^3}\left(A^{2/3} - A'^{2/3}\right) \quad . \tag{5.20}$$

Ova se veličina naziva **izotopni pomak**.
Mjerenjem izotopnih pomaka za više različitih izotopa nekog elementa moguće je dakle dobiti r_0. Za dobivanje točnih vrijednosti potrebno je čitav račun ponoviti relativistički, te uzimajući u obzir promjenu elektronske valne funkcije, no vrijednosti koje se dobivaju već ovakvim vrlo jednostavnim modelom u dobrom su slaganju s vrijednostima dobivenim na druge načine.
Za unutranje atomske ljuske K-prijelazi su u području X-zraka i efekt promjene energije prijelaza je reda 10^{-4}. Modernim je tehnikama laserske interferometrije moguće mjeriti i puno manje (reda 10^{-6}) izotopne pomake, pa se mjerenja vrše i za optičke prijelaze (dakle, za vanjske elektronske ljuske) koji uključuju s-stanja.

Zadatak 5.4
Četvrta metoda određivanja polumjera atomskih jezgara bazirana je na proučavanju "mionskih atoma" (atoma kod kojih je jedan elektron zamijenjen mionom). Procjenite koliko će puta efekt izotopnog pomaka biti veći za mionski atom, u odnosu na "obični".

Rješenje 5.4
Mion je čestica koja je u svim svojim svojstvima identična elektronu, osim po masi koja joj je 207 puta veća. Budući je Bohrov polumjer obrnuto proporcionalan masi 5.18, polumjer gibanja miona u takvom atomu je 207 puta manji od elektronskog - za teške jezgre stoga mionska 1s-orbita u potpunosti leži unutar atomske jezgre! Efekt promjene energije prijelaze je reda R^2/a_0^3, što je u slučaju jezgara oko olova približno jednako 2, odnosno 5-6 redova veličine više nego za obične atome.

5.2 Masa i energija vezanja

Masa M i energija vezanja E_b (ili B) neke jezgre povezani su sljedećim izrazom:

$$M = Zm_p + Nm_n - E_b/c^2 \quad ,$$

gdje su m_p masa protona i m_n masa neutrona. Poluempirijska formula mase ima oblik:

$$M(Z,A) = Zm_p + Nm_n + \left(-a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \frac{a_P}{A^{1/2}}\right)/c^2 \quad ; \tag{5.21}$$

za energiju vezanja vrijedi, dakle:

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \mp \frac{a_P}{A^{1/2}} \quad . \tag{5.22}$$

Upotrebom poznatih energija vezanja za više stotina izotopa (bliskih liniji stabilnosti), dobivene su vrijednosti parametara u poluempirijskoj formuli energije vezanja (mase) koji se najbolje slažu s mjerenjima. Dakle, oblik formule je postavljen na temelju fizičkih razmatranja (neka od njih će biti dana u nastavku), a parametri su određeni emperijiski, zato se o formuli govori kao "poluempirijskoj". Ti empirijski određeni koeficijenti iznose:

$$a_V = 15.8 \text{ MeV} \quad , \quad a_S = 18.3 \text{ MeV} \quad , \quad a_C = 0.71 \text{ MeV} \quad ,$$

$$a_A = 23.2 \text{ MeV} \quad , \quad a_P = 12 \text{ MeV} \quad .$$

Poluempirijska formula mase i dalje je predmet intenzivnog znanstvenog proučavanja, tako da se u literaturi (pa i u udžbenicima) znaju naći i nešto drukčiji skupovi parametara - svi oni za stabilne jezgre daju približno jednake rezultate.

Zadatak 5.5
Krenite od poluempirijskog izraza za nuklearnu energiju vezanja (5.22), promotrite skup izobarnih jezgara (s A nukleona), te nađite Z za stabilne jezgre.

Rješenje 5.5
Budući da diskutiramo izobarne jezgre, u poluempirijskoj formuli za energiju vezanja A možemo smatrati konstantnim, dok Z variramo i pitamo se kada je energija vezanja E_B maksimalna. Maksimum ćemo naći deriviranjem izraza za energiju vezanja (pretpostavit ćemo i $Z(Z-1) \approx Z^2$):

$$\left(\frac{\partial E_B}{\partial Z}\right)_{A=\text{konst.}} = -2a_C Z A^{-1/3} + 4a_A(A-2Z)A^{-1} \quad .$$

Izjednačimo li taj izraz s nulom (uvjet za ekstrem), dobivamo:

$$-2a_C Z A^{-1/3} + 4a_A(A-2Z)A^{-1} = 0 \quad ,$$

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_A} A^{2/3}} \quad . \tag{5.23}$$

Uzimajući eksperimentalno određene vrijednosti parametara (a_C= 0.71MeV, a_A=23.2 MeV), dobiva se:

$$Z = \frac{A}{2 + 0.0154 A^{2/3}} \quad .$$

Vidimo da za lake jezgre vrijedi Z=$A/2$, dok su teže stabilne jezgre bogatije neutronima (koji "razrijeđuju" naboj jezgre i time umanjuju kulonske efekte) - npr. za $A \approx$ 150 vrijedi $Z/A \approx$ 0.41.
Uočite da je druga derivacija izraza za energiju vezanja dana s:

$$\left(\frac{\partial^2 E_B}{\partial Z^2}\right)_{A=\text{konst.}} = -2a_C A^{-1/3} - 8a_A A^{-1} \quad ,$$

što je negativno za sve A (dakle, pronađeni ekstrem je uvijek maksimum, što je i bio cilj).

Zadatak 5.6
Koristeći model Fermijeva plina, ocijenite vrijednost za a_A, uz pretpostavke $A \approx 2Z$ i $R = r_0 \mathrm{A}^{1/3}$.

Rješenje 5.6
Pri $T = 0$, Fermijev plin ima energiju:

$$E_F = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{5}\frac{p_F^5}{2m} \quad ,$$

a ukupan broj čestica i njihov maksimalan impuls vezani su izrazom:

$$N = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{5}p_F^3 \quad .$$

Budući je maksimalni impuls dan s:

$$p_F = h\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad ,$$

za Fermijevu energiju dobivamo:

$$E_F = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \quad .$$

Detalji izvoda gornjih relacija u modelu Fermijevog plina bit će dani u poglavlju *Nuklearna struktura*.
Pretpostavim li da se neutroni (kojih ima N) i protoni (kojih ima Z) ponašaju kao neovisne čestice (tj. dva neovisna plina), energiju najnižeg stanja možemo zapisati:

$$E_F = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{V^{2/3}} \quad . \tag{5.24}$$

Pretpostavimo da je jezgra kugla volumena:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}r_0^3 A\pi \quad ,$$

izraz za energiju postaje:

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\left(\frac{3}{4r_0^3\pi}\right)^{2/3}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} = \\ &= \frac{3}{40}\left(\frac{9}{4r_0^3\pi^2}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} = \\ &= 31.7\ \mathrm{MeV}\ \frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} \quad . \end{aligned}$$

Poluempirijska formula mase dobro funkcionira za jezgre blizu linije stabilnosti, a za njih vrijedi $N \approx Z$. Definiramo li:

$$\epsilon = N - Z \quad ,$$

vrijedi:

$$N = \frac{A}{2}\left(1+\frac{\epsilon}{A}\right) \qquad , \qquad Z = \frac{A}{2}\left(1-\frac{\epsilon}{A}\right) \quad .$$

Uvjet $N \approx Z$ svodi se na činjenicu da je ϵ/A znatno manje od 1 (i veće od 0), pa izraz u brojniku možemo razviti u red po ovoj veličini (i zadržat se na kvadratičnom članu):

$$
\begin{aligned}
N^{5/3}+Z^{5/3} &= \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\left[\left(1+\frac{\epsilon}{A}\right)^{5/3}+\left(1-\frac{\epsilon}{A}\right)^{5/3}\right]= \\
&\approx \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\left(1+\frac{5}{3}\frac{\epsilon}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{\epsilon^2}{A^2}+1-\frac{5}{3}\frac{\epsilon}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{\epsilon^2}{A^2}\right)= \\
&= 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\left(1+\frac{5\epsilon^2}{9A^2}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u izraz za energiju dobivamo:

$$
\begin{aligned}
E_F &= 31.7\ \text{MeV}\ \frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}} \\
&\approx 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\frac{1}{A^{2/3}}\left(1+\frac{5\epsilon^2}{9A^2}\right)\cdot 31.7\ \text{MeV} \quad = \\
&= 2^{-2/3}A\cdot 31.7\ \text{MeV} \quad + \frac{5(N-Z)^2}{2^{2/3}9A}\cdot 31.7\ \text{MeV} \quad .
\end{aligned}
$$

Usporedbom sa poluempirijskom formulom mase vidimo da prvi od dva člana gornjeg izraza doprinosi (korigira) volumnom članu formule, dok je drugi oblikom identičan asimetričnom članu. Imamo dakle:

$$
a_A = \frac{5}{2^{2/3}9}\cdot 31.7\ \text{MeV} \quad \approx 11\ \text{MeV} \quad .
$$

Vrijednost dobivena prilagodbom parametara semiempirijske formule eksperimentalno određenim masama je a_A= 23.2 MeV, pa vidimo da je dobiveno neslaganje unutar faktora 2 što je za izložen vrlo pojednostavljen model posve prihvatljivo.

Zadatak 5.7

(a) Kulonski član u poluempirijskoj formuli mase ima oblik:

$$
a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad .
$$

Pretpostavite da je jezgra homogeno nabijena kugla polumjera R= $1.24A^{1/3}$ fm i izračunajte vrijednost a_C u MeV-ima.

(b) Krenite od poluempirijske formule za masu (izraz 5.21) i pokažite da je za veliki A i Z energija oslobođena pri emisiji α-čestice dana s:

$$
Q_\alpha = -4a_V + \frac{8a_S}{3A^{1/3}} + \frac{4a_C Z(1-\frac{Z}{3A})}{A^{1/3}} - \frac{4a_A(N-Z)^2}{A^2} + B(2,4) \quad ,
$$

gdje je $B(2,4)$ energija vezanja α-čestice (28.4 MeV).

Rješenje 5.7

(a) Elektrostatka potencijala energija jednoliko nabijene kugle dana je s (za izvod vidi zadatak 5.2):

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad .$$

Izjednačavanjem s kulonskim članom u poluempirijskoj formuli dobivamo:

$$a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad .$$

Uz Q=Ze i $R = 1.24A^{1/3}$ fm, dobiva se:

$$\begin{aligned} a_C &= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0(1.24\ \text{fm})} = \\ &= 0.697\ \text{MeV} \quad . \end{aligned}$$

(b)

$$Q_\alpha = B(Z-2, A-4) + B(2,4) - B(Z-A) \quad .$$

Za veliki Z i A vrijedi (razvoj u red i zadržavanje samo par članova):

$$(A-4)^{2/3} \approx A^{2/3}\left(1-\frac{8}{3A}\right) \quad ;$$

$$\frac{(Z-2)^2}{(A-4)^{1/3}} \approx \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1+\frac{4}{3A}-\frac{4}{Z}\right) \quad ;$$

$$\frac{\left[(N-2)-(Z-2)^2\right]}{A-4} \approx \frac{(N-Z)^2}{A}\left(1+\frac{4}{A}\right) \quad ;$$

$$(A-4)^{-1/2} \approx A^{-1/2}\left(1+\frac{2}{A}\right) \quad .$$

Uvrštavanjem dobivamo traženi izraz:

$$Q_\alpha = -4a_V + \frac{8a_S}{3A^{1/3}} + \frac{4a_C Z(1-\frac{Z}{3A})}{A^{1/3}} - \frac{4a_A(N-Z)^2}{A^2} + B(2,4) \quad .$$

Zadatak 5.8

Mase skupa izobara koji su članovi istog izospinskog multipleta mogu se napisati kao očekivane vrijednosti operatora mase sljedećeg oblika:

$$M = a + bT_z + cT_z^2 \quad , \tag{5.25}$$

gdje su a, b i c konstante, a T_z operator koji odgovara z-komponenti izotopnog spina.
a) Izvedite navedeni oblik za operator mase;
b) Koliki mora biti izospin multipleta da se dobiveni izraz može provjeriti eksperimentalno?

Rješenje 5.8

a) Članovi istog izospinskog multipleta imaju isti paritet i spin zbog sličnosti (identičnosti) u strukturi. Njihova je razlika u masi određena kulonskom energijom i razlikom u masi između protona i neutrona. Vrijedi:

$$A = N + Z = 2Z - (Z - N) = 2Z - 2T_z \quad ,$$

odnosno:

$$Z = \frac{A + 2T_z}{2} = \frac{A}{2} + T_z \quad .$$

Elektrostatska energija jednoliko nabijene jezgre daje nam izraz za masu ($Z(Z-1) \approx Z^2$):

$$\begin{aligned}
M &= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} Z(Z-1) - (m_n - m_p)T_z + M_0 = \\
&\approx \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{A}{2} + T_z\right)^2 - (m_n - m_p)T_z + M_0 = \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\frac{A^2}{4} + \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} A T_z + \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} T_z^2 - (m_n - m_p)T_z + M_0 = \\
&= \left(M_0 + \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\frac{A^2}{4}\right) + \left(\frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} A - (m_n - m_p)\right) T_z + \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} T_z^2 \quad .
\end{aligned}$$

Linearni članovi u ovom izrazu posljedica su razlike u masi protona i neutrona, te kulonske energije, dok kvadratični članovi dolaze uglavnom od kulonske interakcije.

b) Budući da se u dobivenom izrazu za masu nalaze tri konstante, potrebno je imati najmanje tri jednadžbe (eksperimentalna podatka) da bi ih odredili. Četvrti eksperimentalni podatak je potreban da bi dobili potvrdu vrijedi li tako dobiven izraz s fiksiranim konstantama. Budući da multiplet izospina T čini $2T$+1 izotopa, za eksperimentalnu provjeru nužno je da je T>1 (npr. T= 2 multiplet čini 5 izotopa i provjera je moguća).

Zadatak 5.9

Energija vezanja jezgre ^{90}Zr (Z=40) je 783.916 MeV, a jezgre ^{90}Y (Z=39) 782.410 MeV. Odredite energiju pobuđenja najnižeg izospinskog stanja s T=6 u ^{90}Zr.

Rješenje 5.9

Razlika u energiji dva člana izospinskog multipleta je određena kulonskom energijom i razlikom u masi između protona i neutrona. Prema zadatku 5.2, imamo:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E(A, Z+1) - E(A, Z) = \\
&= \Delta W_e - (m_n - m_p)c^2 = \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}(Z_1^2 - Z_2^2) - 1.29 \ \text{ MeV} = \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\left((Z+1)^2 - Z^2\right) - 1.29 \ \text{ MeV} = \\
&= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}(2Z+1) - 1.29 \ \text{ MeV} = \\
&= 11.89 \ \text{ MeV} \quad ,
\end{aligned}$$

pri čemu je korišteno R=1.2·$A^{1/3}$.

Prema tome, energija pobuđenja najnižeg stanja s T= 6 u ^{90}Zr je:

$$
\begin{aligned}
E_x &= B\left(^{90}\mathrm{Zr}, T=5\right) - B\left(^{90}\mathrm{Zr}, T=6\right) = \\
&= B\left(^{90}\mathrm{Zr}, T=5\right) - B\left(^{90}\mathrm{Y}, T=6\right) + B\left(^{90}\mathrm{Y}, T=6\right) - B\left(^{90}\mathrm{Zr}, T=6\right) = \\
&= 783.916 - 782.410 + 11.89 \ \ \mathrm{MeV} = \\
&= 13.40 \ \ \mathrm{MeV} \quad .
\end{aligned}
$$

Dobivena vrijednost je tipična za jezgre s ΔZ=1.

Zadatak 5.10

Jezgre ^{12}C i ^{14}N imaju T=0 u osnovnom stanju, a najniža stanja s T=1 se nalaza na E_x= 2.3 MeV (za ^{14}N) i E_x= 15.0 MeV (za ^{12}C). Objasnite tako veliku razliku! Potrebno je znati: M-A (tzv. defekt mase)= 0 MeV za ^{12}C, 13.37 MeV za ^{12}B, 2.86 za ^{14}N i 3.02 za ^{14}C.

Rješenje 5.10

Uspoređujemo izospinske triplete s A= 12 i 14. Energijska razlika među susjednim članovima tripleta (vidi izraz 5.15) je:

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}(Z_1^2 - Z_2^2) - (m_n - m_p)c^2 = \\
&= 0.863\frac{2Z+1}{r_0 A^{1/3}} - 1.29 \ \ \mathrm{MeV} \quad .
\end{aligned}
$$

Uz r_0= 1.2 fm dobivamo:

$$M(^{14}\mathrm{N}, T=1) - M(^{14}\mathrm{C}, T=1) = 2.6 \ \ \mathrm{MeV} \quad ,$$

$$M(^{12}\mathrm{C}, T=1) - M(^{12}\mathrm{B}, T=1) = 2.2 \ \ \mathrm{MeV} \quad .$$

Nadalje:

$$
\begin{aligned}
M(^{14}\mathrm{N}, T=1) &- M(^{14}\mathrm{N}, T=0) = \\
&= M(^{14}\mathrm{N}, T=1) - M(^{14}\mathrm{C}, T=1) + M(^{14}\mathrm{C}, T=1) - M(^{14}\mathrm{N}, T=0) = \\
&= 2.6 + 3.02 - 2.86 \ \ \mathrm{MeV} \approx \\
&\approx 2.7 \ \ \mathrm{MeV} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M(^{12}\mathrm{C}, T=1) &- M(^{12}\mathrm{C}, T=0) = \\
&= M(^{12}\mathrm{C}, T=1) - M(^{12}\mathrm{B}, T=1) + M(^{12}\mathrm{B}, T=1) - M(^{12}\mathrm{C}, T=0) = \\
&= 2.2 + 13.37 - 0 \ \ \mathrm{MeV} \approx \\
&\approx 15.6 \ \ \mathrm{MeV} \quad .
\end{aligned}
$$

Dobivamo, dakle, da je ova jednostavna teorija u slaganju s podacima. Jezgra ^{12}C posebno je stabilna (u osnovnom stanju) zbog zatvaranja podljuske $p_{3/2}$ (model ljusaka), odnosno zbog građe od tri jako vezane alfa-čestice (klasterski modeli).

Zadatak 5.11
Broj protona i neutrona podjednak je za lake jezgre, dok teže jezgre imaju više neutrona. Nadalje, energije potrebne za odvajanje neutrona ili protona podjednake su za lake jezgre, dok je za teže energije odvajanja protona puno veća. Objasnite ove pojave pomoću poluempirijske formule masa.

Rješenje 5.11
Energija potrebna za odvajanje jednog protona (tzv. energija protonskog odvajanja ili separacije) iz jezgre ${}^{A}Z$ dana je s:

$$S_p = B(A^Z) - B({}^{A-1}Z - 1) \quad .$$

Analogno za neutrone vrijedi:

$$S_p = B(A^Z) - B({}^{A-1}Z) \quad .$$

Koristeći poluempirijsku formulu masa (izraz 5.22): dobivamo:

$$S_p - S_n = -a_C \frac{2Z-1}{(A-1)^{1/3}} + 4a_A \frac{A-2Z}{A-1} \quad .$$

Za stabilne jezgre vrijedi (vidi izraz 5.23):

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_A} A^{2/3}} \quad , \tag{5.26}$$

pa dobivamo:

$$\begin{aligned} S_p - S_n &= \frac{-a_C \left(A - \frac{a_C}{4a_A} A^{5/3} - 1\right)}{(A-1)^{1/3}} + \frac{4a_A \frac{a_C}{4a_A} A^{5/3}}{A-1} = \\ &= \frac{a_C}{A-1} \left[A^{5/3} - (A-1)^{5/3} + \frac{a_C}{4a_A} A^{5/3} A - 1)^{2/3} \right] \quad . \end{aligned}$$

Za teške jezgre ($A \gg 1$) dobiva se:

$$S_p - S_n = \frac{a_C}{4a_A} A^{4/3} \quad ;$$

dakle, S_p-S_n raste s A!

5.3 Električni kvadropolni moment

Zadatak 5.12
Izračunajte kvadropolni moment homogeno nabijenog elispoida (oblika cigarete) male poluosi a i velike poluosi b.

Rješenje 5.12
Električni kvadropolni moment klasično je definiran s:

$$Q_0 = \int \rho \left(3z^2 - r^2\right) \mathrm{d}V \quad . \tag{5.27}$$

Izaberimo da se velika poluos elipsoida (b) nalazi u z-smjeru. Budući da vrijedi:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ,$$

pa uz pretpostavku homogenosti (ρ= konstanta), imamo:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \rho \int \left(2z^2 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= 2\rho \left[2\int_0^b z^2 \mathrm{d}z \int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^a x^2 \mathrm{d}x \int\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_0^a y^2 \mathrm{d}y \int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}z \right] = \\
&= 4\rho \left[\int_0^b z^2 \mathrm{d}z \int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^a x^2 \mathrm{d}x \int\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z \right] \quad .
\end{aligned}$$

Granice integracije za dvostruke integrale u dobivenom izrazu određujemo pomoću jednadžbe elipsoida:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Za vezu između x i y dobivamo:

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) = a^2 b^2 \left(b^2 - z^2\right) \equiv R^2 \quad .$$

Dakle, x i y definiraju krug polumjera R što bitno olakšava račun integrala po dxdy. Za y i z dobivamo

$$y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = a^2 - x^2$$

$$1 = \frac{y^2}{a^2 - x^2} + \frac{z^2}{b^2 - b^2 x^2 / a^2} \equiv \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} \quad ;$$

u ovom je slučaju dobivena jednadžba elipse. Potrebni površinski integrali stoga postaju:

$$\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = R^2 \pi = \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 - z^2\right) \pi$$

$$\int\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z = AB\pi = \frac{b}{a} \left(a^2 - x^2\right) \pi$$

pa za kvadropolni moment dobivamo:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= 4\rho \left[\frac{a^2}{b^2} \pi \int_0^b z^2 \left(b^2 - z^2\right) \mathrm{d}z - \frac{b}{a} \pi \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) x^2 \mathrm{d}x \right] = \\
&= 4\rho \left[\frac{a^2}{b^2} \pi \left(\frac{1}{3} b^2 z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right)\Big|_0^b - \frac{b}{a} \pi \left(\frac{1}{3} a^2 x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right)\Big|_0^a \right] = \\
&= 4\rho \left[\frac{a^2}{b^2} \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) b^5 - \frac{b}{a} \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) a^5 \right] = \\
&= \frac{8}{15} \rho \pi \left(a^2 b^3 - a^4 b\right)
\end{aligned}$$

Uz:

$$q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad ,$$

dobivamo:

$$Q_0 = \frac{2}{5} q \left(b^2 - a^2 \right) \quad . \tag{5.28}$$

Uz kvantnomehaničku definiciju kvadropolnog momenta:

$$eQ_0 = e \int \psi^* \left(3z^2 - r^2 \right) \psi \mathrm{d}V \quad , \tag{5.29}$$

može se pokazati da je za izdužene jezgre (jezgre oblika cigarete) $Q \sim 2\langle r^2 \rangle$, dok je za spljoštene jezgre (jezgre oblika palačinke) $Q \sim -\langle r^2 \rangle$. U oba slučaja pretpostavlja se da se os simetrije jezgre poklapa s z-osi.

Zadatak 5.13
Pretpostavljajući da jezgra ^{176}Lu ima oblik rotacionog elipsoida bliskog sfernom obliku, nađite odnos velike poluosi prema maloj (b/a), ako je poznata vrijednost njegovog kvadropolnog momenta: $Q_0 = 7$ barna (pretpostavlja se: $e = 1$).

Rješenje 5.13
U prethodnom je zadatku dobiveno

$$Q_0 = \frac{2}{5} q \left(b^2 - a^2 \right) \quad .$$

Ako je elipsoid oblika bliskog sferi, možemo pisati:

$$b = a(1 + \epsilon) \quad ,$$

gdje je $\epsilon \ll 1$. Tada imamo:

$$b^2 = a^2 + 2a^2\epsilon + a^2\epsilon^2 \approx a^2 + 2a^2\epsilon \quad ,$$

$$Q_0 = \frac{2}{5} \left(a^2 + 2a^2\epsilon - a^2 \right) Z = \frac{4}{5} Z\epsilon a^2 \quad .$$

Za jezgru ^{176}Lu ($Z = 71$) imamo:

$$a \approx R = 1.2 A^{1/3} \ \text{fm} = 6.72 \ \text{fm} \quad ,$$

$$\epsilon = \frac{5Q_0}{4Za^2} = 0.27 \quad ,$$

$$\frac{b}{a} = 1 + \epsilon = 1.27 \quad .$$

Diskutirana jezgra spada u skupinu jezgara lantanoida za koje se zna da imaju velike električne kvadropolne momente (odnosno deformacije).

5.4 Dodatni riješeni zadaci

Zadatak 5.14
Odredite vrijednosti konstanti a_C i a_A (u MeV/c^2) u poluempirijskoj formuli mase (izraz 5.21) koristeći sljedeće podatke:
(i) Pretpostavite da je jezgra homogeno nabijena kugla polumjera R= $1.24A^{1/3}$ fm;
(ii) ^{135}Ba je stabilan izobar barija (Z= 56).

Rješenje 5.14
(i) Elektrostatka potencijala energija jednoliko nabijene kugle dana je s:

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad .$$

Izjednačavanjem s kulonskim članom u poluempirijskoj formuli dobivamo:

$$a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad .$$

Uz Q=Ze i $R = 1.24A^{1/3}$ fm, dobiva se:

$$\begin{aligned} a_C &= \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0(1.24 \text{ fm})} = \\ &= 0.697 \text{ MeV} \quad . \end{aligned}$$

(ii) Za stabilne izobare (isti A, različit Z) vrijedi da je energija vezanja maksimalna, tj. da je derivacija energije vezanja po Z-u uz konstantan A jednaka nuli (ovaj izvod je napravljen na vježbama, zadatak 20):

$$\left(\frac{\partial E_B(Z,A)}{\partial Z}\right)_{A=\text{konst.}} = -2a_C Z A^{-1/3} + 4a_A(A-2Z)A^{-1} = 0 \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$a_A = \frac{a_C A^{2/3} Z}{2A-4Z} \quad .$$

Znamo li da je $^{135}_{56}$Ba stabilan, dobivamo sljedeću vezu a_A=32.04a_C. Uz vrijednost za a_C iz prvog dijela zadatka, dobiva se a_A= 22.33 MeV.

5.5 Zadaci za domaću zadaću

1. (1 bod) Uz pretpostavku da je atomska jezgre kugla jednolike gustoće polumjera $1.2\times A^{1/3}$ fm, izrazite nuklearnu gustoću u SI-jedinicama

2. (2 boda) Izračunajte vjerojatnost da se elektron u osnovnom stanje atoma vodika nalazi unutar jezgre (protona).

3. (1 bod) Eksperimentalni podaci dobiveni mjerenjem raspršenja nabijenih čestica na raznim jezgrama, omogućuju određivanje dva nuklearna parametra: polumjera R i površinske debljine jezgre t. Površinska debljina jezgre definirana je kao interval polumjera u kome gustoća

mase jezgre padne s 90% na 10% centralne vrijednost ρ_0. Eksperimentalno je dobiveno da se raspodjela naboja, a time i mase jezgre, dobro opisuje funkcijom:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad ,$$

gdje je parametar a približno jednak 0.54 fm za sve jezgre s A>16. Odredite površinsku debljinu za jezgre teže od A= 16.

4. (1 bod) Krećući od definicije form-faktora (izraz 5.3) pokažite da za sfernosimetrične slučajeve ($\rho_{\rm ch}(\boldsymbol{r})= \rho_{\rm ch}(r)$) vrijedi:

$$F(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi\hbar}{|\boldsymbol{q}|}\int \rho_{\rm ch}(r)\sin\left(|\boldsymbol{q}|r/\hbar\right)r\mathrm{d}r \quad .$$

5. (2 boda) Odredite form-faktor za jednoliko nabijenu kuglu:

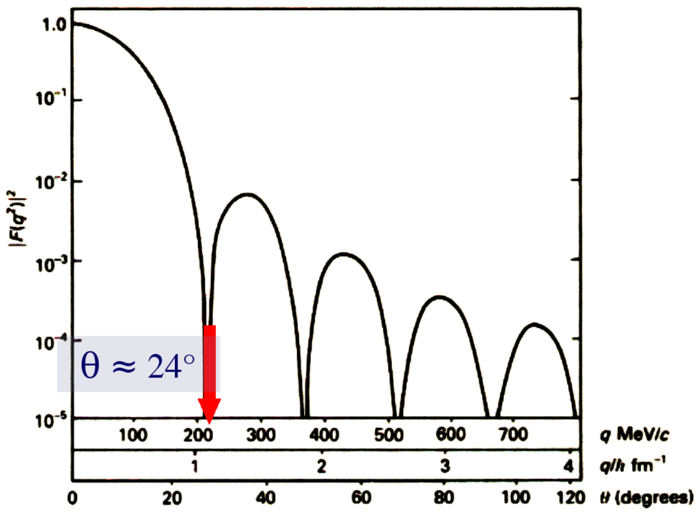
$$\rho(r) = \left[\begin{array}{ll} \rho_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{array}\right.$$

6. (2 boda) Ukoliko je gustoća naboja dana s $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$ odredite form faktor $F(q)$. Odredite $< r^2 >$ i pokažite da vrijedi:

$$F(q) \simeq 1 - \frac{q^2 < r^2 >}{6}$$

Uz koji uvjet vrijedi jednakost?

7. Na slici je dan form-faktor za raspršenje elektrona energije 450 MeV-a na jezgrama ^{58}Ni. Pretpostavite da je ova jezgra dobro opisana kao homogena kugla polumjera R i izvedite izraz za form-faktor takve raspodjele naboja. Koristeći podatke sa slike, odredite R!



8. (1 bod) Elektroni energije $E = 200\,$MeV se elastično raspršuju na atomskoj jezgri. Za $a = 1.5\,$fm odredite omjer diferencijalnih udarnih presjeka na 20° i 40° koristeći izraz za Mottov diferencijalni udarni presjek.

9. (1 bod) Energije vezanja zrcalnih jezgara ^{11}B i ^{11}C su 76.205 i 73.443 MeV. Pretpostavite da je ta razlika u potpunosti posljedica kulonskih efekata, te odredite polumjer ovih jezgara (pretpostavite da su one jednoliko nabijene sfere). Usporedite s R=1.2$A^{1/3}$ fm i komentirajte razliku.

10. (1 bod) Polazeći od pretpostavke da je razlika energija vezanja za zrcalne jezgre posljedica elektrostatske interakcije među protonima, nađite polumjer zrcalnih jezgara ${}^{29}_{14}$Si - ${}^{29}_{15}$P. Energije vezanja su 245.01 MeV za ^{29}Si, 239.28 MeV za ^{29}P. Usporedite dobivenu vrijednost s vrijednošću koja se dobiva iz izraza: $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{-1/3}$ m.

11. (2 boda) Nuklearni električni kvadropolni moment sferične jezgre s jednim valentnim protonom dobro se opisuje kao očekivana vrijednost operatora:

$$Q_{20} = 3z^2 - r^2 \quad ,$$

u stanju s maksimalnom projekcijom spina. Nađite vrijednost kvadropolnog momenta, pretpostavljajući da je proton opisan jednočestičnom valnom funkcijom:

$$R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \alpha \quad ,$$

gdje je α spinska funkcija koja odgovora spinu "gore". Procjenite kvadropolni moment za proton u stanju $d_{5/2}$ (l=2, j=l+1/2) za jezgru s polumjerom r= 5 fm. Iskoristiti:

$$\int Y_{ll} Y_{20} Y_{ll} d\Omega = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{l}{2l+3} \quad .$$

12. (1 bod) Odredite vrijednosti konstanti a_C i a_A u poluempirijskoj formuli masa koristeći sljedeće podatke: ^{35}Ar emitira pozitrone maksimalne kinetičke energije 4.95 MeV, a ^{135}Ba je stabilan izobar.

13. (2 boda) Polazeći od poluempirijske formule mase, nađite izraz koji opisuje ovisnost broja protona (Z) i ukupnog broja nukleona u jezgri (A), za sve beta-stabilne jezgre. Pomoću dobivenog izraza odredite redni broj Z beta-stabilnog izotopa za izobarne lance s masenim brojevima A= 23, 89 i 114.

14. (1 bod) Energije vezanja za izotope kalcija su: ^{40}Ca: 342.055 MeV, ^{41}Ca: 350.418 MeV, ^{42}Ca: 361.898 MeV, ^{43}Ca: 369.831 MeV, ^{44}Ca: 380.963 MeV, ^{45}Ca: 388.378 MeV, ^{46}Ca: 398.774 MeV. Iz ovih podataka odredite veličinu člana koji opisuje sparivanje u poluempirijskoj formuli masa.

15. (2 boda) Upotrijebite poluempirijsku formulu mase da bi (a) izračunali energiju α-čestica emitiranih u α-raspadu ${}^{235}_{92}$U i usporedite dobivenu vrijednost s eksperimentalnom (4.52 MeV). Pomoću iste formule procjenite koliku je energiju potrebno dovesti ovoj jezgri da bi se iz nje odvojio (b) proton; (c) neutron.

16. (2 boda) Poznato je da energije vezanja jezgara sistematski variraju ovisno o tome sadrži li jezgra paran ili neparan broja protona i/ili neutrona. Ova varijacija energije vezanja, poznata kao energija sparivanja, opisana je s:

$$\delta_B = \left[\begin{array}{cl} \Delta & Z \text{ paran}, N \text{ paran} \\ 0 & A = N + Z \text{ neparan} \\ -\Delta & Z \text{ neparan}, N \text{ neparan} \end{array} \right.$$

Pretpostavljajući da je energija vezanja $B(Z,N)$ glatka funkcija Z i N (kada se zanemari efekt sparivanja), izračunajte parametar Δ ako su poznate empirijske vrijednosti energija vezanja sljedećih izotopa: (N-2,Z), (N-1,Z), (N,Z) i (N+1,Z), gdje su N i Z parni brojevi.

17. (2 boda) Neutronska zvijezda je astronomski objekt sagrađen isključivo od neutrona. Gravitacijska energija je za "obične atomske jezgre" posve zanemariva, no za ovakve ogromne

nakupine nukleona postaje vrlo bitna. Razmotrite stabilnost neutronske zvijezde pomoću poluempirijske formule energije vezanja, nakon što ju dopunite gravitacijskim članom:

$$\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \quad ,$$

gdje je M=A·M_n (M_n= 1.67·10^{-27} kg), R=$r_0A^{1/3}$ (r_0= 1.2 fm), te G= 6.7·10^{-11} Jm/kg^2. Koja je granična vrijednost za polumjer R i masu M neutronske zvijezde?
Iako je ova ekstrapolacija poluempirijske formule na prvi pogled posve neopravdana, za masu daje rezultat točan unutar faktora 2!

18. (1 bod) Procjenite polumjer prve Bohrove putanje za μ^--mezon oko (a) protona, (b) jezgre ^{12}C. Koji je glavni kvantni broj za prvu Bohrovu putanju koja leži van jezgre olova (Z=82, A=208), ako je polumjer jezgre dan s R=1.2·$A^{1/3}$ fm?

19. (2 boda) a) Izračunajte energije pionskih M x-zraka (n=4 u n=3) za Ca, Sn i Pb.
b) Usporedite srednji polumjer pionskih stanja s n=3 za Ca, Sn i Pb s nuklearnim polumjerom tih jezgara.

20. (1 bod) Za jezgru s velikim masenim brojem A može se uspostaviti veza između parametra $\hbar\omega$ srednjeg nuklearnog potencijala $V(r)$=1/2$M\omega^2r^2$-V_0 i broja A. Odredite ovu vezu ako su u oscilatornoj jami srednja kinetička i srednja potencijalna energija jednake (računato od dna jame).

5.6 Dodatna literatura

1. K. Krane: "*Introductory Nuclear Physics*", John Wiley and Sons, 1988.

2. B. Povh, K. Rith, Ch. Scholz, R. Zetsche: "*Particles and Nuclei*", Springer, 2006.

3. S.S.M. Wong: "*Introductory Nuclear Physics*", John Wiley & Sons, 2004.