Nizovi

1. Dokaži da za niz zadan rekurzivno s
$$a_n = 2a_{n-1} + 3\,,\ n \geq 2\,; \quad a_1 = 1$$
vrijedi $a_n = 2^{n+1} - 3\,.$

2. Dokaži da za niz zadan rekurzivno s
$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{3 - a_n}\,,\ n \in \mathbf{N}$$
vrijedi $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+1)a_1 - 2^{n-1} + 1}{2^{n-1} + 1 - (2^{n-1} - 1)a_1}\,.$

3. Koristeći logičke simbole zapiši sljedeću tvrdnju i njenu negaciju
   a) Niz je omeđen.
   b) Niz je rastući.
   c) Broj a je limes niza.
   d) Limes niza je $+\infty$.
   e) Broj a je gomilište niza.

4. Dokaži da je niz s općim članom
   a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,,$
   b) $\dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+3} + 2n}$

   strogo padajući.

5. Ispitaj monotonost sljedećih nizova
   a) $\dfrac{n^2}{n^2+4}\,,$
   b) $\dfrac{n^2-1}{n^2+9}\,,$
   c) $\left(\dfrac{n-8}{1-n}\right)^2 ; n \geq 2\,,$
   d) $\operatorname{arctg} \dfrac{1-n}{1+n}\,,$
   e) $\sin \dfrac{3n+8}{n+3}\,,$

f) $\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2+n}$,

g) $\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(-n)} \cdot \dfrac{3n-2}{n^2+n+10}$,

h) $a_1 = 10\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{2+a_n^2}{2a_n}\,,\ n \in \mathbf{N}\,.$

6. Ispitaj ograničenost sljedećih nizova

a) $\dfrac{n^2}{n^2+1}$,

b) $\dfrac{(-1)^n n^2}{n+4}$,

c) $\dfrac{n^3}{n+1}$.

7. Izračunaj limes a niza (a_n) i za zadani ε odredi $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$ za $n \geq n_0$:

a) $a_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\,, \quad \varepsilon = 10^{-7}\,,$

b) $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\,, \quad \varepsilon = 0,001\,,$

c) $a_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}\,, \quad \varepsilon = 0,005\,.$

8. Dokaži koristeći *samo* definiciju limesa niza: Za niz (a_n) nenegativnih brojeva vrijedi

$$\lim_n a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\,.$$

9. Izračunaj sljedeće limese:

a) $\lim\limits_n \dfrac{n+1}{2n^2}$,

b) $\lim\limits_n \dfrac{5n+1}{7-9n}$,

c) $\lim\limits_n \dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}$,

d) $\lim\limits_n \left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$,

e) $\lim\limits_n \dfrac{\sqrt[n]{2}\cdot(n+1)!+5\cdot5^n}{(n+1)!+10^n}$,

f) $\lim\limits_n \dfrac{(3n+2)(5n+1)(n+2)!}{(2n+1)(3n+2)(4n+3)^2 \cdot n!}$,

g) $\lim\limits_n \dfrac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n+1)}$,

h) $\lim\limits_n \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$,

i) $\lim\limits_n \dfrac{n^4}{1,0001^n}$,

j) $\lim\limits_n \dfrac{3^n-n^3}{3^n+n^3}$,

k) $\lim\limits_n \sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}$ (n korijena),

l) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{5^n}\right)$,

m) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{-\frac{n}{2}-1}$.

10. Koji od sljedećih nizova imaju limes $+\infty$?

a) $2^{\sqrt{n}}$

b) $n^{(-1)^n}$

c) $n\sin\frac{n\pi}{2}$

d) $\log(\log n)$

11. Koristeći teorem o sendviču izračunaj

a) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$,

b) $\lim\limits_n \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$,

c) $\lim\limits_n \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$.

12. Odredi gomilišta niza s općim članom

a) $(-1)^n(1+2^{-n})$,

b) $\dfrac{2n}{n^2+2}+\sin\dfrac{n\pi}{4}$,

c) $\dfrac{n\cos(n\pi)}{n+2}$,

d) $\dfrac{n+\cos(n\pi)}{n+2}$,

e) $\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}$,

f) $\dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$,

g) $\arcsin\dfrac{(-1)^n}{2}$,

13. Ispitaj konvergenciju niza zadanog rekurzivno s

$$a_n = \frac{a_{n-1}+1}{2}\,,\ n \geq 2\,; \quad a_1 = 2\,.$$

14.* Za koje $p \in \mathbf{R}$ niz zadan rekurzivno s

a) $a_n = pa_{n-1}\,,\ n \geq 2\,; \quad a_1 = \alpha\,,$

b) $a_n = \alpha + pa_{n-1}\,,\ n \geq 2\,; \quad a_1 = \alpha$

konvergira? Koji je pripadni limes u tom slučaju.

15. Navedi primjer niza koji ne poprima najmanju ni najveću vrijednost.

16. Odredi supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{n-\sqrt{n}}{n+1},\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

17.* Zadani su brojevi a i b, $0 < a < b$, i pomoću njih nizovi (a_n) i (b_n): $a_1 = a$, $b_1 = b$, a dalje rekurzivno, za $n \geq 2$: $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Dokažite:

a) Za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $a_n < b_n$.

b) Niz (a_n) raste, a (b_n) pada.

c) $\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n} b_n$.