2

Nizovi

Definicija. **Niz** je funkcija
$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$
Oznake: (a_n) ili $\{a_n\}$

Zadatak 2.1 Napišite prvih nekoliko članova nizova zadanih općim članom:

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(b)}\quad a_n = (-1)^n \qquad \text{(c)}\quad a_n = 2n.$$

Zadatak 2.2 Odredite opće članove nizova:

(a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots;$

(b) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots;$

(c) $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{17}{16}, \frac{13}{16}, \frac{37}{64}, \ldots.$

Rješenje. (b) $a_n = 2^n - 1$; (c) Niz je zapravo $\frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{17}{16}, \frac{26}{32}, \ldots$ pa je $a_n = \frac{n^2+1}{2^n}$.

△

Primjer 2.1 (Gaussova dosjetka) Sumu $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ možemo izračunati na sljedeći način. Zbrajanjem sljedeća dva retka

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ S_n = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

dobijemo
$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ sumanada}} = n(n+1),$$
odakle je $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Primjer 2.2 (a) **Aritmetički niz** s prvim članom a_1 i razlikom d je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $a_{n+1} - a_n = d$
- $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ n \geq 2$ (zbog čega se i zove aritmetički niz)
- $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, jer je

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_n + (n-1)d) = n \cdot a_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \\ &= n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

(b) **Geometrijski niz** s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 1$ je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}},\ n \geq 2$ (zbog čega se i zove geometrijski niz)
- $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ slijedi iz formule

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(koja se lako provjeri) za $a = 1$ i $b = q$.

Zadatak 2.3 Izračunajte:

(a) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n+1)$ (b) $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \ldots + \left(-\frac{2}{5}\right)^n$

(c) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$.

Rješenje.

(c) Primijetimo da je

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

pa sumiranjem po $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

odakle je

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Napomena. Sume možete računati i koristeći *WolframMathematica*™(pogledajte također i *WolframAlpha*™)

```
In[1]:= Sum[k^2, {k, 1, n}]
Out[1]= 1/6 n (1 + n) (1 + 2 n)
```

Definicija. Niz (a_n) je **rastući** ako vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz (a_n) je **strogo rastući** ako vrijedi

$$a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogno definiramo **padajući** i **strogo padajući** niz.

Zadatak 2.4 Ispitajte monotonost sljedećih nizova:

(a) $a_n = \frac{n-1}{n}$ (b) $a_n = n^2$ (c) $a_n = 2^{-n}$
(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (e) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+9}$ (f) $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1-n}{1+n}$
(g) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$.

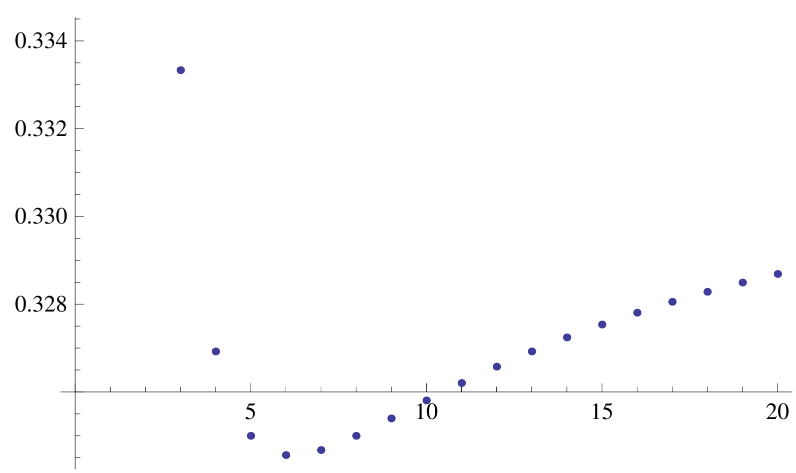
Napomena. Nacrtajmo prvih 20 članova niza $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2+n}$ u *WolframMathematica*™:

```
In[1]:= niz = Table[(n^2 + 1)/(3 n^2 + n), {n, 1, 20}]

Out[1]= {1/2, 5/14, 1/3, 17/52, 13/40, 37/114, 25/77, 13/40, 41/126,
         101/310, 61/187, 145/444, 17/52, 197/602, 113/345, 257/784,
         145/442, 65/198, 181/551, 401/1220}

In[2]:= ListPlot[niz]

Out[2]=
```



Definicija. Niz (a_n) je **odozgo omeđen** ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz (a_n) je **odozdo omeđen** ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 2.5 Ispitajte omeđenost nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n-1}{n} \qquad \text{(b)} \quad a_n = 2^n.$$

Rješenje. (b) Niz (a_n) nije odozgo omeđen. Matematičkom indukcijom se može pokazati da je

$$2^n > n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Drugi način da se pokaže gornja nejednakost je koristeći binomni teorem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

gdje je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{i} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Za $a = b = 1$ dobijemo

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > \binom{n}{1} = n.)$$

Iz Arhimedovog aksioma slijedi da za svaki $M > 0$ možemo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > M$ pa je $a_{n_0} = 2^{n_0} > n_0 > M$, odakle vidimo da je niz neomeđen.

Definicija. Niz (a_n) konvergira k $L \in \mathbb{R}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N) \text{ takav da je } \ |a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Može se pokazati da je broj $L \in \mathbb{R}$ jedinstven i zovemo ga **limes** niza (a_n) ze označavamo s

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{ili} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n.$$

U tom slučaju kažemo da niz (a_n) **konvergentan**.

Zadatak 2.6 Neka je (a_n) niz. Dokažite da je

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0.$$

Rješenje.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ zakav da je $|a_n - 0| < \varepsilon$, za $n \geq n_0$. Drugačije zapisano,

$$||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{za} \quad n \geq n_0.$$

Dakle, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Analogno.

Zadatak 2.7 Neka je (a_n) niz takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i neka je $c \in \mathbb{R}$. Po definiciji dokažite da je i $(c \cdot a_n)$ konvergentan niz i da je

$$\lim_{n\to+\infty} (c \cdot a_n) = 0.$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad \text{za} \quad n \geq n_0$$

pa je

$$|c \cdot a_n| = |c||a_n| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.8 Dokažite po definiciji da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Rješenje. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0\sqrt{\varepsilon} > 1$$

(alternativno, uzmemo $n_0 := \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$). Za $n \geq n_0$ je

$$|\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \varepsilon.$$

Napomena. Slično kao u prethodnom zadatku se može pokazati da je za $p > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

(Primijetite da je po definiciji npr. $n^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln n}$.)

Napomena. Na predavanju je pokazano da za konvergentne nizove (a_n) i (b_n) i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:

- $(\lambda a_n + \mu b_n)$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} a_n + \mu \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

- $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

- ako je $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, onda je i $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}.$$

Zadatak 2.9 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-1}{3n+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n+2}{2n^3-n^2+1}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^3}{2n^3-n+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5}$ (e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+2n+1}$ (f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{(n-1)^5}{(n+1)^4}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3}$.

Napomena. U *WolframMathematica*™:

```
In[1]:= Limit[n - (n - 1)^5/(n + 1)^4, n -> Infinity]

Out[21]= 9
```

Na predavanju je dokazan sljedeći

Teorem. (Teorem o sendviču) Neka su $(a_n), (b_n)$ i (c_n) nizovi takvi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \ \forall n \geq m.$$

Ako (a_n) i (c_n) konvergiraju prema istom realnom broju $L \in \mathbb{R}$, onda je i (b_n) konvergentan s istim limesom L:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

■

Zadatak 2.10 Izračunajte

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1}$.

Rješenje. (b) Dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}\right| = 0,$$

što slijedi po teoremu o sendviču.

$\triangle$

Zadatak 2.11 Neka je $q \in \langle -1, 1\rangle$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Rješenje. Ako je $q = 0$, onda je $q^n = 0$ pa tvrdnja vrijedi. Zbog Zad 2.6 je dovoljno dokazati da je $\lim_{n\to+\infty} |q^n| = \lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ pa možemo pretpostaviti da je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je $\frac{1}{q} > 1$ pa je po binomnom teoremu

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{q}\right)^n &= \left(1 + (\frac{1}{q} - 1)\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{1}{q} - 1\right)^k}_{>0} \geq n\left(\frac{1}{q} - 1\right),\end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q} - 1} \cdot \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Po teoremu o sendviču je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Zadatak 2.12 Izračunajte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n-2}}{2^n - 2} \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n} \quad \text{(c)} \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 6^n}{2^n + (-7)^n}.$$

Zadatak 2.13 Izračunajte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{3^n}\right) \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 5^n}{5 + 25 + 125 + \ldots + 5^n}$$

$$\text{(c)} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

Zadatak 2.14 Dokažite da je

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ \forall a > 0.$$

Rješenje. (a) Zbog monotonosti funkcije $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ na $[0, +\infty\rangle$ vrijedi

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, po binomnom teoremu dobijemo za $n \geq 2$ dobijemo

$$\begin{aligned} n = (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(\sqrt[n]{n} - 1)^k}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

pa je

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n},$$

odakle je

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Dakle,

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 1, \quad \text{kada} \ \ n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(b) Pretpostavimo prvo da je $a \geq 1$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq a$ (koji postoji po Arhimedovom aksiomu; jedan takav m je sigurno $\lfloor a \rfloor + 1$). Tada je

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \ \forall n \geq m$$

pa tvrdnja u ovom slučaju slijedi iz teorema o sendviču i (a). Ako pretpostavimo da je $a \in \langle 0, 1\rangle$, onda je $b = \frac{1}{a} > 1$ pa je po prvom slučaju primijenjenom na $b > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0,} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.}$$

Zadatak 2.15 Izračunajte

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(10+3\cos n)^n+6^n}{(10+3\cos n)^n+3^n}.$$

Rješenje. (a) Za $n \geq 1$ vrijedi

$$4 \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3} \to 4, \quad \text{kada} \quad n\to+\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 4.
(b) Primijetite da za $n \geq 1$ vrijedi

$$1 \leq \frac{(10+3\cos n)^n+6^n}{(10+3\cos n)^n+3^n} \leq 1 + \frac{6^n}{(10+3\cos n)^n} \leq 1 + \frac{6^n}{7^n} \to 1, \quad \text{kada } n\to+\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 0.

Zadatak 2.16 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$$

Definicija. Niz (a_n) **teži k** $+\infty$ ako

$$(\forall M>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}) \text{ takav da je } a_n > M, \forall n \geq n_0$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Niz (a_n) **teži k** $-\infty$ ako

$$(\forall M>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}) \text{ takav da je } a_n < -M, \forall n \geq n_0$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Definicija. Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Niz (a_n) **konvergira** u $\overline{\mathbb{R}}$ ako konvergira u $\mathbb{R}$ ili teži k $-\infty$ ili $+\infty$.

Zadatak 2.17 Dokažite da je za $q>1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Rješenje. Za $n\geq 1$ po binomnom teoremu dobijemo

$$q^n = [(q-1)+1]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(q-1)^k \geq 1 + n(q-1) > n(q-1).$$

Neka je $M>0$ proizvoljan. Odaberimo $n_0 \geq 1$ takav da je

$$n_0(q-1) > M$$

Takav n_0 postoji po Arhimedovom aksiomu (ili konkretno možemo uzeti $n_0 = \lfloor \frac{M}{q-1}\rfloor + 1 > M$).

Tada je za $n \geq n_0$

$$q^n > n(q-1) \geq n_0(q-1) > M$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Limesi se ponekad računaju koristeći rekurzivno zadane nizove.

Primjer 2.3 (Fibonaccijev niz) Fibonaccijev niz je niz (a_n) zadan na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{za } n \geq 3. \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom se može pokazati tzv. **Binetova formula** za n-ti član Fibonaccijevog niza:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Iz Binetove formule slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

pri čemu je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ poznat kao **omjer zlatnog reza**.

Na predavanju je dokazan sljedeći

Teorem. Ako je niz (a_n) rastući (padajući) i odozgo (odozdo) omeđen, onda je konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ (\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

■

Primjer 2.4 Dokažimo na još jedan način da je za $q \in \langle 0, 1\rangle$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Definirajmo $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1} = q \cdot a_n.$$

Primijetimo da je niz (a_n) padajući:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

i odozdo omeđen:

$$a_n = q^n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

pa je i konvergentan po prethodnom teoremu. Označimo $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada iz

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

u limesu dobijemo $L = qL$, odnosno

$$L \underbrace{(1-q)}_{>0} = 0$$

pa je $L = 0$.

Zadatak 2.18 Izračunajte:

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!},\ a>1 \quad \text{(b)}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n},\ a>1 \quad \text{(c)}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{a^n},\ a>1, p>0 \ \text{(d)}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{n!} \quad .$$

Rješenje. (a) Primijetimo da $a_n = \frac{a^n}{n!}$ zadovoljava

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1}a_n.$$

Tada je za $n \geq n_0 := \lfloor a \rfloor + 1 > a$ ispunjeno

$$\frac{a}{n+1} < \frac{a}{a+1} < 1,$$

odakle zaključujemo da je niz (a_n) padajući počevši od n_0-og člana. Očito je i odozdo omedjen s 0 pa je konvergentan. Neka je $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada iz

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1}a_n$$

u limesu dobijemo $L = 0 \cdot L = 0$, odakle je $L = 0$.

(b) Niz $a_n = \frac{n}{a^n}$ zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{a \cdot n}a_n.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n \quad &\Longleftrightarrow\quad \frac{n+1}{a\cdot n} < 1 \\ &\Longleftrightarrow\quad n > \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

pa je niz (a_n) padajući počevši od člana s indeksom

$$n_0 = \lfloor \frac{1}{a-1} \rfloor + 1.$$

Pošto je $a_n = \frac{n}{a^n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je niz odozdo omeđen pa je i konvergentan. Označimo $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada iz rekurzivne relacije u limesu dobijemo

$$L = \frac{L}{a},$$

odakle je

$$L\underbrace{(a-1)}_{>0} = 0$$

pa je $L = 0$.

(c) Neka je $n_0 = \lfloor p \rfloor + 1 > p$. Tada je za $n \geq n_0$

$$0 < \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{n_0}}{a^n} = \left(\frac{n}{b^n}\right)^{n_0},$$

gdje je $b = \sqrt[n_0]{a} > \sqrt[n_0]{1} = 1$ pa je po dijelu (b) ovog zadatka

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^{n_0} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n}\right)^{n_0} = 0^{n_0} = 0.$$

Po teoremu o sendviču zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

(d) Primijetimo da opći član niza čiji limes tražimo možemo zapisati kao

$$\frac{n^p}{n!} = \frac{n^p}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n!}$$

produkt dva konvergentna niza s limesima 0 (po (a) i (c)) pa je i promatrani niz konvergentan s limesom $0 \cdot 0 = 0$.

Napomena. Prethodni zadatak kaže da faktorijel raste brže od eksponencijalne funkcije (lako se provjeri tvrdnja i za $a \leq 1$ (vidite Zadatak 2.58)) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a \in \mathbb{R};}$$

eksponencijalna funkcija raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0,\ a > 1,\ p > 0;}$$

faktorijel raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n!} = 0,\ a > 1,\ p > 0.}$$

Zadatak 2.19 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 + 3^n}{n^3 + 4^n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n!}{(n-1)! + 2n!}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+4} + n \cdot (-4)^{n+2}}{2^n + n \cdot (-4)^n}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n(n+1)^4 + 5^n n^2(3n^2+1)}{5^n(n+1)^4}$.

Zadatak 2.20 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i odredite mu limes (ako postoji).

Zadatak 2.21 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}), \; n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i odredite mu limes (ako postoji).

Napomena. U *WolframMathematica*™:

```
In[1]:=a[1]:= 3
       a[n_]:= (a[n - 1] + 3/a[n - 1])/2
In[2]:=Table[N[a[n], 10], {n, 1, 10}]

Out[2]= {3.000000000, 2.000000000, 1.750000000, 1.732142857, 1.732050810,
         1.732050808, 1.732050808, 1.732050808, 1.732050808, 1.732050808}
```

Primijetite da je

```
In[3]:= N[Sqrt[3], 10]

Out[3]= 1.732050808
```

Zadatak 2.22 Ispitajte konvergenciju niza

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}, \; n \in \mathbb{N}$$

i odredite mu limes (ako postoji).

Zadatak 2.23 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{9 - 2a_n}{7 - 2a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

Zadatak 2.24 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n + 1}{n + \sqrt{n^2 + n + 1}}$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[4]{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} - n)$.

Na predavanju ste pokazali da je niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i odozgo omeđen pa je i konvergentan. Označimo njegov limes s e. Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

Zadatak 2.25 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}.$$

Rješenje.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{e}\end{aligned}$$

Definicija. Niz (b_n) je **podniz** niza (a_n) ako postoji strogo rastuća funkcija

$$p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

takva da je

$$b_n = a_{p_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Na predavanjima ste dokazali sljedeće teoreme

Teorem. Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom L, onda je svaki njegov podniz također konvergentan s istim limesom L.

■

Teorem. Svaki niz ima monoton podniz. ■

Korolar. Svaki omeđeni niz ima konvergentni podniz. ■

Definicija. **Gomilište** niza (a_n) je element $L \in \overline{\mathbb{R}}$ takav da postoji podniz (a_{n_k}) niza (a_n) takav da je

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = L.$$

Primjer 2.5 $a_n = (-1)^n$ ima 2 gomilišta: -1 i 1, jer je

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} = -1 \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} = 1. \end{aligned}$$

Primijetite da (a_n) nije konvergentan.

Primjer 2.6 Promotrimo niz $a_n = q^n$, gdje je $q < -1$. Pokazat ćemo da niz (a_n) nije konvergentan tako da pronađemo dva različita gomilišta (primijetite da je $|q| > 1$ pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$):

$$\begin{aligned} a_{2k} &= q^{2k} = (|q|^2)^k \to +\infty, \quad \text{kada} \quad k \to +\infty \\ a_{2k-1} &= q^{2k-1} = (|q|^2)^k \underbrace{q^{-1}}_{<0} \to -\infty, \quad \text{kada} \quad k \to +\infty. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} \text{ne postoji}, & q \le -1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}}$$

Napomena. Niz koji ima više od jednog gomilišta ne može biti konvergentan.

Označimo skup svih gomilišta niza (a_n) s A. Primijetite da (a_n) ima barem jedan konvergentan podniz u $\overline{\mathbb{R}}$(!) pa je $A \neq \emptyset$ i tada ima smisla

Definicija. Neka je (a_n) niz i neka je A skup njegovih gomilišta u $\overline{\mathbb{R}}$. Definiramo **limes superior** i **limes inferior** niza (a_n) s

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup A \qquad \text{i} \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf A.$$

Zadatak 2.26 Izračunajte

$$\text{(a)} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1 + n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} \qquad \text{(b)} \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n + n\cos(n\pi)}{2n+1}$$

Dokazan je i sljedeći

Teorem. Niz (a_n) je konvergentan ako i samo ako je

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

i tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Zadatak 2.27 Neka je

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje. Odredimo gomilišta niza (a_n):

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} a_{2k} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a)\cdot 0\right] = \frac{1}{3} \\
\lim_{k\to+\infty} a_{4k-1} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a)\cdot(-1)\right] = -\frac{2}{3} - a \\
\lim_{k\to+\infty} a_{4k-3} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a)\cdot(1)\right] = \frac{4}{3} + a
\end{aligned}$$

Da bi niz (a_n) bio konvergentan, mora vrijediti

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

pa skup gomilišta mora biti jednočlan. Dakle, mora vrijediti

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a,$$

odakle zaključujemo da je $a = -1$.

Za računanje limesa je koristan sljedeći

Teorem. (Stolzov teorem) Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

■

Zadatak 2.28 Izračunajte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Rješenje. (a) Stavimo $a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$ i $b_n = n$. Vidimo da je (b_n) strogo rastući i neograničen pa je po Stolozovom teoremu traženi limes jednak

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1} = 1.$$

(b) Primijetimo da je

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \ln n - \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n}{n} = \frac{\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n}}{n}.$$

Po Stolzovom teoremu je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n}}{n} = \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln\frac{n+1}{1} + \ln\frac{n+1}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n+1}) - (\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n})}{1} \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1
\end{aligned}$$

pa je traženi limes jednak $e^1 = e$.

Zadatak 2.29 Neka je (a_n) konvergentan niz takav da je $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Rješenje. Primijetite da je po Stolzovom teoremu

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln a_1 + \ldots + \ln a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln a_n$$

pa je zbog neprekidnosti funkcije ln,

$$\ln \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \ln \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.30 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Zadaci za vježbu

2.31 Izračunajte:

$$\text{(a) } 3+8+13+18+\ldots+(5n+3) \qquad \text{(b) } \frac{3}{7}-\frac{9}{49}-\ldots+\left(-\frac{3}{7}\right)^n$$

$$\text{(c) } 1+8+27+\ldots+n^3.$$

2.32 Dokažite da je niz s općim članom

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+3}+2n}$$

strogo padajući.

2.33 Ispitajte monotonost sljedećih nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \left(\frac{n-8}{1-n}\right)^2, \; n \geq 2, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+n}$$

$$\text{(c)} \quad a_n = \frac{1}{\operatorname{arctg}(-n)} \cdot \frac{3n-2}{n^2+n+10} \qquad \text{(d)} \quad a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{2+a_n^2}{2a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

2.34 Ispitajte ograničenost sljedećih nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{(b)} \quad a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+4} \quad \text{(c)} \quad a_n = \frac{n^3}{n+1}.$$

2.35 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3+n}{n^4+1} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{n^2+2n}{n+5}\right)$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+2n}{n^2+1} \qquad \text{(d)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2+1}.$$

2.36 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{(n-a)^3}{(n+1)^2}\right), \qquad \text{u ovisnosti o parametru } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n}{1+2+2^2+\ldots+2^n} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right).$$

2.37 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin n}{n^2+n+1}.$$

2.38 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n+1}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2})$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[4]{n^4+n^2+1})$.

2.39 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n(2n^3+1)+3^n n(n^2+1)}{3^n(2n^3+1)}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)(3n+2)(n+1)!}{(4n+3)^3 n!}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+n^{2009}}{n!+2009^n}$.

2.40 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n+2\sqrt{n^3+1}}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+2^n+4^n+8^n+32^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$.

2.41 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5n^3+1}{5n^3-1}\right)^{2n^3}$.

2.42 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^n+1}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{\lfloor n\sqrt{3}\rfloor}$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\cos n}$ (f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n+2]{3^n+4^{n+1}}$.

2.43 Izračunajte $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ i $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ za

(a) $a_n=\cos^n n\pi$ (b) $a_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ (c) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

Koji nizovi su konvergentni?

2.44 Dokažite da za niz zadan rekurzivno s

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{3-a_n},\ n\in\mathbb{N}$$

vrijedi $a_n=\dfrac{(2^{n-1}+1)a_1-2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1-(2^{n-1}-1)a_1}$.

2.45 Dokažite da niz Fibonaccijevih brojeva (a_n) zadovoljava

$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n.$$

2.46 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{2a_n},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.47 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 2},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.48 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 0.5,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{5},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.49 Nađite rekurzivno zadan niz (a_n) takav da mu je limes jednak $\sqrt{7}$.

2.50 Koristeći rekurzivno zadani niz dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} = 0.$$

2.51 Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots + \sqrt{5}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

2.52 Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdots \sqrt{3}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

2.53 Je li niz

$$a_n = \frac{2^n + (-5)^n}{3^n + 4^n},\ n \in \mathbb{N}$$

konvergentan?

2.54 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n \text{ puta}} 1.$$

2.55 Dokažite po definiciji da je za $p > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

2.56 Dokažite po definiciji da je

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

2.57 Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

koristeći teorem o sendviču i binomni teorem.

2.58 Dokažite da je za $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

2.59 Neka je (a_n) rastući niz takav da je $a_1 > 0$. Ako je $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_2}{a_1 \cdot S_2} + \frac{a_3}{S_2 \cdot S_3} + \ldots + \frac{a_n}{S_{n-1} \cdot S_n} \right) = \frac{1}{a_1}.$$

2.60 Neka je (a_n) konvergentan niz. Dokažite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

2.61 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \right].$$

2.62 Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da niz s općim članom

$$a_n = \sqrt[n]{5 + (2a)^{(-1)^n \cdot n}}$$

konvergira.

2.63 Dokažite da je za $p > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

2.64 Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e.$$

2.65 Dokažite da niz s općim članom

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \in \mathbb{N}$$

konvergira. Njegov limes c se zove **Euler-Mascheronijeva konstanta** i $c \approx 0.5772156$.