p-ADSKA ANALIZA: DOMAĆA ZADAĆA

Za priznavanje zadaće treba riješiti 4.5 zadatka. U svim zadacima p je prost broj.

Zadatak 1

Odredite p-adske razvoje brojeva $-1 \in \mathbb{Z}_p$ i $\frac{1}{10} \in \mathbb{Q}_{11}$.

Zadatak 2 Izračunajte

a) $1 + p + p^2 + \cdots + p^n + \cdots \in \mathbb{Q}_p$
b) $1 - p + p^2 - p^3 + \cdots + (-1)^n p^n + \cdots \in \mathbb{Q}_p$
c) $1 + (p-1)p + p^2 + (p-1)p^3 + p^4 + (p-1)p^5 + \cdots \in \mathbb{Q}_p$.

Zadatak 3 Definirajmo p-adsku eksponencijalnu funkciju i p-adski logaritam formulama

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \log_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Neka je $p > 2$.

a) Odredite radijus konvergencije reda (odnosno domenu funkcije) $\exp_p(x)$.
b) Odredite radijus konvergencije reda $\log_p(x)$.
c) * Vrijedi li $\exp_p(x+y) = \exp_p(x)\exp_p(y)$ za sve x i y iz domene?

Zadatak 4

Neka je $\alpha = \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k p^k \in \mathbb{Q}_p$, gdje je $k_0 \in \mathbb{Z}$ i $b_k \in \{0, \ldots, p-1\}$ za svaki $k \geq k_0$. Ako je niz (b_k) periodičan u smislu da postoje $d \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{Z}$ takvi da je $b_{k+d} = b_k$ za svaki $k \geq m$, dokažite da je $\alpha \in \mathbb{Q}$. Vrijedi li obrat?

Zadatak 5 Je li $\mathbb{Z}_p$ prebrojiv?

Zadatak 6(p-adska verzija Newtonove metode)

Neka je $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$. Derivacija od f je $f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$.

a) Neka su $a, x \in \mathbb{Z}_p$ i takvi da je $x \equiv 0 \pmod{p^m}$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $f(a+x) \equiv f(a) \pmod{p^m}$ i $f(a+x) \equiv f(a) + f'(a)x \pmod{p^{2m}}$. (Hint: $f(a+x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.)
b) Neka je $x_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p}$ i $f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Definirajte niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurzivno formulom
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ za } n \geq 0.$$
Dokažite da je $x_n \in \mathbb{Z}_p$, $f(x_n) \equiv 0 \pmod{p^{2^n}}$ i $f'(x_n) \not\equiv 0 \pmod{p}$ za svaki $n \geq 0$.
c) Dokažite da niz (x_n) konvergira nultočki od f u $\mathbb{Z}_p$.
d) Dokažite da f ima točno jednu nultočku $\xi \in \mathbb{Z}_p$ takvu da je $\xi \equiv x_0 \pmod{p}$.
e) Koristeći prethodne tvrdnje odredite $\sqrt{-7}$ u $\mathbb{Q}_2$ na pet "decimala".

Zadatak 7

U ovom zadatku treba pokazati da se jedinični kvadrat ne može podijeliti na neparan broj trokuta jednake površine.

Neka je kvadrat podijeljen na n trokuta jednake površine. Označimo sa $|\cdot|$ proširenje od $|\cdot|_2$ na $\mathbb{R}$. To znači da se $|\cdot|$ podudara sa $|\cdot|_2$ na $\mathbb{Q}$ i da zadovoljava uobičajene aksiome ne-arhimedske apsolute vrijednosti (kao i $|\cdot|_2$).

a) Obojite vrhove tih trokuta u tri boje, plavu, crvenu i zelenu, na sljedeći način:

$$P = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$$
$$C = \{(x, y) : |x| \geq 1, |x| \geq |y|\}$$
$$Z = \{(x, y) : |y| \geq 1, |y| > |x|\}.$$

Koristeći Spernerovu lemu dokažite da postoji trokut kojemu su svi vrhovi različitih boja.

b) Dokažite da je za površinu $P = 1/n$ tog trokuta vrijedi

$$|P| > 1,$$

odnosno da je n paran.

Zadatak 8 Dokažite da je $\mathbb{Q}_p$ potpun.