Tema br. 3:

Tehnika Bellmanovih funkcija

Vjekoslav Kovač, 24. 3. 2023.

Tehnika o kojoj ovdje govorimo je jedna korisna ideja u teorijskoj matematici. Dobila je ime po primijenjenom matematičaru Richardu E. Bellmanu (1920.–1984.), koji je na nju utjecao svojim radom iz teorijske stohastičke optimalne kontrole. U vjerojatnosti i analizi ideju je prvi upotrijebio Donald L. Burkholder (1927.–2013.). Metoda je dalje razvijena u sustavnu teoriju od strane F. L. Nazarova, S. R. Treila i A. L. Volberga u čitavoj seriji knjiga i radova počevši sa [7]. Koristi se za dokazivanje/opovrgavanje i pojačavanje mnogih klasičnih i novih rezultata u analizi te je danas jedna od najpoznatijih, najoriginalnijih i najspektakularnijih metoda u toj grani matematike.

Evo vrlo grubog prikaza metode.

1. Odaberite problem s unutrašnjom samo-sličnosti.
2. Svedite problem na ograničavanje "invarijantne" veličine.
3. Napišite nejednadžbu za gornju invarijantnu veličinu koristeći samo-sličnost problema.
4. Radite unatrag: ograničite invarijantnu veličinu pod pretpostavkom da već imamo neko rješenje nejednadžbe.
5. Pronađite neko rješenje nejednadžbe.

Čitatelju će gornja shema dobiti smisao tek nakon što se upozna s konkretnim primjerima, koji slijede. Ovakva generalna shema je primjenjiva u neslućeno mnogo raznolikih situacija. Ipak, mi ćemo se u primjerima ograničiti na najelementarniji slučaj, na ocjene koje se tiču tzv. dijadskih intervala. Definiramo *dijadski interval* $I \subset \mathbb{R}$ kao svaki interval oblika

$$[2^n k, 2^n (k+1)\rangle$$

za neke $k, n \in \mathbb{Z}$. Njegova duljina je, naravno, jednaka $|I| = 2^n$. Njegova *lijeva polovica* je interval

$$I_{\text{lijevi}} := [2^{n-1}2k, 2^{n-1}(2k+1)\rangle,$$

dok mu je *desna polovica*

$$I_{\text{desni}} := [2^{n-1}(2k+1), 2^{n-1}(2k+2)\rangle;$$

to su opet dijadski intervali. Familiju svih dijadskih intervala označavamo $\mathcal{D}$. Ako je I dijadski interval, a f integrabilna (realna ili kompleksna) funkcija na I, tada *prosjek* od f na I označavamo

$$[f]_I := \frac{1}{|I|} \int_I f.$$

Konačno, tzv. *p-norma* definirana je sa

$$\|f\|_p := \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \Big)^{1/p}$$

za bilo koji eksponent $p \in [1, \infty\rangle$.

Posebni slučaj metode Bellmanovih funkcija za dijadske probleme sada poprima sljedeći (malo određeniji) oblik, tako da prva 3 koraka glase:

1. Odaberite ocjenu koja se može formulirati pomoću dijadskih intervala.
2. Svedite problem na ograničavanje veličine koja se može izraziti samo pomoću prosjeka po dijadskim intervalima.
3. Promatrajte neki dijadski interval i rastavite ga na lijevu i desnu polovicu. Napišite "rekurzivnu" nejednadžbu koju zadovoljava invarijantna veličina.

1 Carlesonov teorem ulaganja

Neka je $\mu = (\mu_I : I \in \mathcal{D})$ kolekcija nenegativnih brojeva i neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ fiksirani broj (eksponent). Prirodno je zapitati se uz koji uvjet na koeficijente μ nejednakost

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} \mu_I |[f]_I|^p \leq C_p \|f\|_p^p \tag{1}$$

vrijedi za neku (nevažnu) nenegativnu konačnu konstantu C_p, ovisnu samo o eksponentu p, i za proizvoljnu (kompleksnu) funkciju f. (Podrazumijeva se da napisani prosjeci i integrali moraju biti smisleni.) Ta ocjena zove se dijadska verzija *Carlesonovog teorema ulaganja* i proučavao ju je L. Carleson u radu [2].

Najprije možemo u željenoj Carlesonovoj ocjeni uzeti da je $f = \mathbb{1}_I$, tj. karakteristična funkcija nekog dijadskog intervala I. Kako za svaki dijadski interval $J \subseteq I$ tada vrijedi $[f]_J = 1$, slijedi

$$\sum_{J\subseteq I} \mu_J \leq \sum_{J\in\mathcal{D}} \mu_J |[f]_J|^p \leq C_p \int_{\mathbb{R}} |f|^p = C_p |I|.$$

Uvjet kojeg smo dobili je svakako nužan za teorem ulaganja. Jednostavnom normalizacijom koeficijenata μ možemo eliminirati konstantu s desne strane pa zato kažemo da μ zadovoljava (dijadski) *Carlesonov uvjet* ako vrijedi

$$\sum_{J\subseteq I} \mu_J \leq |I| \tag{2}$$

za svaki $I \in \mathcal{D}$. Postavlja se pitanje je li taj uvjet i dovoljan za ocjenu (1) i time se bavimo u ovom odjeljku. Premda postoje razni dokazi ocjene (1), a mi ćemo ju dokazati koristeći samo "zdravi razum" i neku vrstu matematičke indukcije.

Uvijek možemo pretpostaviti da je f nenegativna, jer se inače može rastaviti na realne i imaginarne, pozitivne i negativne dijelove:

$$f = (f_{\mathrm{re}}^{+} - f_{\mathrm{re}}^{-}) + i(f_{\mathrm{im}}^{+} - f_{\mathrm{im}}^{-}),$$

pri čemu je

$$f_{\mathrm{re}} := \operatorname{Re} f, \quad f_{\mathrm{im}} := \operatorname{Im} f$$

te

$$g^{+} := \max\{f, 0\}, \quad g^{-} := \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} \quad \text{(po točkama)}.$$

Nadalje, primijetimo da je dovoljno pokazati

$$\sum_{J\subseteq I} \mu_J [f]_J^p \leq C_p \int_I f^p$$

za svaki interval $I \in \mathcal{D}$. Naime, nakon što to dokažemo, možemo naprosto uzeti dijadske intervale $I = [0, 2^N\rangle$ i $I = [-2^N, 0\rangle$ za prirodni broj N, zbrojiti dvije nejednakosti te konačno pustiti $N \to \infty$. Neformalno rečeno, intervali $[-2^N, 0\rangle \cup [0, 2^N\rangle$ "iscrpljuju" realni pravac i Carlesonova ocjena se dobije na limesu. Konačno, posljednju ocjenu možemo normalizirati dijeleći ju s duljinom najvećeg promatranog intervala, tj. brojem $|I|$:

$$\frac{1}{|I|} \sum_{J\subseteq I} \mu_J [f]_J^p \leq C_p [f^p]_I. \tag{3}$$

Lijeva strana se sada lijepo skalira prelaženjem na lijevi i desni podinterval, što se vidi iz

$$\frac{1}{|I|} \sum_{J\subseteq I} \mu_J [f]_J^p = \frac{1}{2} \frac{1}{|I_{\mathrm{lijevi}}|} \sum_{J\subseteq I_{\mathrm{lijevi}}} \mu_J [f]_J^p + \frac{1}{2} \frac{1}{|I_{\mathrm{desni}}|} \sum_{J\subseteq I_{\mathrm{desni}}} \mu_J [f]_J^p + \frac{\mu_I}{|I|} [f]_I^p.$$

Posljednju jednakost možemo zvati *skalirajući identitet*. Mogli bismo pokušati pokazati (3) indukcijom tako da u koraku iskoristimo pretpostavku na intervale I_{lijevi} i I_{desni} te tako ocijenimo

$$\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}\mu_J[f]_J^p \le \frac{1}{2}C_p[f^p]_{I_{\text{lijevi}}} + \frac{1}{2}C_p[f^p]_{I_{\text{desni}}} + \frac{\mu_I}{|I|}[f]_I^p = C_p[f^p]_I + \frac{\mu_I}{|I|}[f]_I^p.$$

Nažalost, na desnoj strani se pojavio višak $\mu_I[f]_I^p/|I|$ u odnosu na ono što trebamo kako bismo dovršili indukciju. To samo govori da nam je pokušaj bio previše naivan te da moramo indukciju koristiti na mnogo pametniji način, recimo naprije pojačati tvrdnju koju induktivno dokazujemo tako da profinimo, tj. smanjimo desnu stranu. Zvuči kao dobra ideja, ali kako naći tu jaču ocjenu koja se može dokazati indukcijom? Tehnika Bellmanovih funckija se može shvatiti upravo kao metodično traženje takve tvrdnje.

Razmislimo koju informaciju o f i μ je svakako vrijedno pratiti u takvom nekom induktivnom koraku. Važnu ulogu igraju prosjeci $[f]_I$ i $[f^p]_I$ te ćemo vjerojatno trebati i neku informaciju o tome u kojoj mjeri je ispunjen Carlesonov uvjet, sadržanu u broju $|I|^{-1}\sum_{J\subseteq I}\mu_J$. Jezikom optimalne kontrole možemo reći da biramo *kontrolne parametre*.

Sada možemo definirati tzv. *apstraktnu Bellmanovu funkciju* kao

$$\mathcal{B}(u,U,M) := \sup_{f,\mu}\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}\mu_J[f]_J^p,$$

pri čemu se supremum uzima po svim f i μ kao gore koji još zadovoljavaju

$$[f]_I = u, \qquad [f^p]_I = U, \qquad \frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}\mu_J = M$$

za fiksirane parametre u, U, M. Primijetimo da $\mathcal{B}(u,U,M)$ uopće ne ovisi o izboru najvećeg promatranog intervala I. Ovdje koristimo spomenutu samo-sličnost problema.

Isprva nam se može činiti da nepotrebno kompliciramo, jer je svakako još teže izračunati formulu za $\mathcal{B}$ nego dokazati traženu tvrdnju. Ipak, napišimo najprije svojstva te nepoznate funkcije $\mathcal{B}$.

($\mathcal{B}$1) *Domena*:

$$u,U,M\ge 0, \qquad u^p\le U, \qquad M\le 1.$$

Uvjet $u^p\le U$ je naprosto Jensenova nejednakost za potenciju:

$$u^p = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f\Big)^p \le \frac{1}{|I|}\int_I f^p = U,$$

dok je posljednja nejednakost naprosto pretpostavljeni Carlesonov uvjet (2). Nije teško pokazati da se, i obratno, za svaku takvu trojku parametara u,U,M mogu naći f i μ kao gore pa se supremum u definiciji od $\mathcal{B}(u,U,M)$ ne uzima po praznom skupu. Tu provjeru preskačemo, jer će nam, strogo logički, biti dovoljna samo činjenica da je prirodna domena funkcije $\mathcal{B}$ sadržana u opisanom skupu uređenih trojki (u,U,M).

($\mathcal{B}$2) *Slika*:

$$0\le\mathcal{B}(u,U,M)\le C_pU$$

za neku nenegativnu konačnu konstantu C_p. Ovo je naprosto naše vjerovanje da ocjena (3) doista vrijedi.

($\mathcal{B}$3) *Glavna nejednakost*:

$$\mathcal{B}(u,U,M)\ge\frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1,U_1,M_1)+\frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2,U_2,M_2)+M_3u^p$$

kad god je

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2), \quad M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) + M_3$$

i sve spomenute varijable se nalaze u domeni iz ($\mathcal{B}1$). Ova nejednakost slijedi iz skalirajućeg identiteta uzimanjem supremuma po svim f i μ takvima da je

$$[f]_{I_{\text{lijevi}}} = u_1, \quad [f]_{I_{\text{desni}}} = u_2, \quad [f^p]_{I_{\text{lijevi}}} = U_1, \quad [f^p]_{I_{\text{desni}}} = U_2,$$
$$\frac{1}{|I_{\text{lijevi}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{lijevi}}} \mu_J = M_1, \quad \frac{1}{|I_{\text{desni}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{desni}}} \mu_J = M_2, \quad \frac{\mu_I}{|I|} = M_3.$$

U definiciji od $\mathcal{B}(u, U, M)$ pak imamo supremum po većem skupu, zahtijevajući samo jednakosti koje su sada direktne posljedice gornjih jednakosti:

$$[f]_I = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = u, \quad [f^p]_I = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) = U, \quad \frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) + M_3 = M.$$

To je razlog zašto smo dobili samo nejednakost, a ne i jednakost.

Sada slijedi preokret! Ako već imamo neku funkciju $\mathcal{B}$ sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$) (i to ne nužno baš onu ranije definiranu), onda možemo dokazati ocjenu (3). Dakle uzmimo nenegativnu funkciju f i Carlesonovu kolekciju brojeva μ. Također, neka je I proizvoljni dijadski interval. Primjenjujući n puta svojstvo ($\mathcal{B}3$) dobivamo

$$\begin{aligned} &|I|\, \mathcal{B}\Big([f]_I, [f^p]_I, \frac{1}{|I|} \sum_{K \subseteq I} \mu_K\Big) \\ &\geq \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J|\, \mathcal{B}\Big([f]_J, [f^p]_J, \frac{1}{|J|} \sum_{K \subseteq J} \mu_K\Big) + \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} \mu_J [f]_J^p \end{aligned}$$

pa korištenjem nenegativnosti od $\mathcal{B}$ kao i druge nejednakosti iz ($\mathcal{B}2$) slijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} \mu_J [f]_J^p \leq C_p [f^p]_I.$$

Sada preostaje još samo pustiti $n \to \infty$ i na limesu doista dobiti (3).

Poanta cijele ove priče je da je tražena tvrdnja (3) upravo ekvivalentna postojanju funkcije $\mathcal{B}$ sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$). Svaku takvu zovemo *Bellmanova funkcija* za dani problem. Ako nas samo zanima dokaz od (3), tada nam jedna od te dvije implikacije nije važna, ali je lijepo znati da pristup ne može iznevjeriti: ako (3) vrijedi, tada Bellmanova funkcija $\mathcal{B}$ mora postojati, premda ju možda može biti teško pronaći.

U nekoj idealnoj situaciji možda možemo pogoditi funkciju $\mathcal{B}$, direktno provjeriti svojstva ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$) i dokaz je tada gotov! Još jedna moguća ideja je koristiti računalo kako bismo naslutili formulu za apstraktnu Bellmanovu funkciju. U praksi to dosta rijetko radi, čim je problem nešto složeniji, jer je potreban enorman broj simulacija kako bi se procijenio iole razuman broj vrijednosti $\mathcal{B}(u, U, M)$. Zato koristimo nešto heuristike kako bismo našli jednu moguću Bellmanovu funkciju.

Najprije je razumno ograničiti se na C^∞ funkcije $\mathcal{B}$, kako bismo mogli koristiti sve rezultate diferencijalnog računa. Lako je vidjeti da je glavna nejednakost ekvivalentna sa:

- $\mathcal{B}$ je konkavna (kao funkcija triju realnih varijabli),
- $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M} \geq u^p$.

Konkavnost je očigledna stavljanjem $M_3 = 0$, dok druga nejednakost slijedi odabirom $u = u_1 = u_2$, $U = U_1 = U_2$, $M_1 = M_2$ te puštanjem

$$\frac{\mathcal{B}(u, U, M_1 + M_3) - \mathcal{B}(u, U, M_1)}{M_3} \geq u^p$$

na limes kada $M_3 \to 0^+$. Nije teško vidjeti i obrat. Nadalje, iz ($\mathcal{B}2$) naslućujemo linearno ponašanje u varijabli U pa pretpostavimo da $\mathcal{B}$ ima oblik

$$\mathcal{B}(u, U, M) = c_p U - \alpha(u, M),$$

gdje je $c_p > 0$ neka konstanta ovisna o p i

- $\alpha\colon [0, \infty\rangle \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ je C^∞ funkcija,
- $|\alpha(u, M)| \leq c_p u^p$,
- α je konveksna,
- $\frac{\partial \alpha}{\partial M} \leq -u^p$.

Motivirani drugim svojstvom naslućujemo finiji oblik od α:

$$\alpha(u, M) = \gamma(M) u^p$$

za neku C^∞ funkciju $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Drugi uvjet na α se naprosto prevodi kao ograničenost od γ na $[0, 1]$, tj. trivijalno je ispunjen zbog neprekidnosti (i Weierstrassovog teorema). Četvrti uvjet na α je sada naprosto

$$\gamma'(M) \leq -1.$$

Hesseova matrica funkcije α je

$$\begin{bmatrix} p(p-1)\gamma(M)u^{p-2} & p\gamma'(M)u^{p-1} \\ p\gamma'(M)u^{p-1} & \gamma''(M)u^p \end{bmatrix}$$

i ona će biti pozitivno semidefinitna (po Sylvesterovom kriteriju) ako je

$$\gamma(M) > 0 \quad \text{i} \quad \gamma(M)\gamma''(M) - \frac{p}{p-1}\gamma'(M)^2 \geq 0.$$

Obzirom da je

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}M^2}\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{p-1}\gamma(M)^{\frac{1-2p}{p-1}}\Big(\frac{p}{p-1}\gamma'(M)^2 - \gamma(M)\gamma''(M)\Big),$$

posljednji uvjet se pojednostavljuje kao konkavnost od $\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}}$. Sada nam se sam nameće najjednostavniji mogući izbor:

$$\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}} = a_p(1 + M),$$

tj.

$$\gamma(M) = b_p(1 + M)^{1-p}$$

za neku konstantu $b_p > 0$. Iz $\gamma'(M) \leq -1$ dobivamo $b_p \geq 2^p/(p-1)$ pa je moguće odabrati

$$\gamma(M) = \frac{2^p}{p-1}(1 + M)^{1-p}.$$

Vidimo da se sada može uzeti i

$$C_p = c_p = \frac{2^p}{p-1}$$

te da je jedna konkretna Bellmanova funkcija dana sa

$$\mathcal{B}(u,U,M)=\frac{2^p}{p-1}\Big(U-(1+M)^{1-p}u^p\Big).$$

Time smo ujedno dovršili dokaz Carlesonovog teorema ulaganja. Ovaj dokaz osmislili su Nazarov i Treil [6].

Na kraju zaključimo kako se sada možemo praviti da smo zapravo genijalno pogodili "pravo" pojačanje od (3) i ne moramo više ni spominjati ikakvu Bellmanovu funkciju $\mathcal{B}$. Mogli bismo naprosto reći da se indukcijom po dijadskom intervalu I dokazuje tvrdnja

$$\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}\mu_J[f]_J^p\leq\frac{2^p}{p-1}\bigg([f^p]_I-\Big(1+\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}\mu_J\Big)^{1-p}[f]_I^p\bigg).$$

Ovakva formulacija mogla bi impresionirati, ali je loša iz dva razloga. Prvo, svakako je bolje do gornje formulacije doći na sistematičan način. Drugo, još uvijek treba provesti korak indukcije, a on iziskuje netrivijalan račun, kojeg smo u ovom primjeru pojednostavnjivali istovremeno dok smo tražili nepoznatu funkciju $\mathcal{B}$.

Metoda Bellmanovih funkcija često daje optimalne konstante. U slučaju $p=2$ na desnoj strani naše dobivene ocjene stoji konstanta $C_2=2^p/(p-1)=4$ i može se pokazati da je ta konstanta zapravo najmanja moguća.

2 Dijadski paraprodukt

Najjednostavnija varijanta *paraprodukta* je trilinearna forma koja se može zapisati

$$\Lambda(f,g,h):=\sum_{J\in\mathcal{D}}|J|\,[f]_J\,\Big([g]_{J_{\text{lijevi}}}-[g]_{J_{\text{desni}}}\Big)\Big([h]_{J_{\text{lijevi}}}-[h]_{J_{\text{desni}}}\Big).$$

Paraprodukti su korisni u harmonijskoj analizi i teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, prvenstveno zato što zadovoljavaju brojne ocjene. Mi ćemo pokazati samo "najsimetričniju" ocjenu

$$|\Lambda(f,g,h)|\leq C\|f\|_3\|g\|_3\|h\|_3 \tag{4}$$

za neku konačnu konstantu C. Ako se čitatelj inicijalno pitao je li definicija od $\Lambda(f,g,h)$ uopće dobra, u sklopu dokaza ove ocjene bit će pokazano da gornji "red" čak apsolutno konvergira čim funkcije $|f|^3,|g|^3,|h|^3$ imaju konačne integrale.

Obrazložimo malo naziv "paraprodukt". Koristeći elementarni identitet

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)+(a_1+a_2)(b_1-b_2)(c_1-c_2)\\&+(a_1-a_2)(b_1+b_2)(c_1-c_2)+(a_1-a_2)(b_1-b_2)(c_1+c_2)\\&=4a_1b_1c_1+4a_2b_2c_2\end{aligned}$$

za kompleksne brojeve a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2, nije teško vidjeti da vrijedi

$$\begin{aligned}&2\Lambda(f,g,h)+2\Lambda(g,h,f)+2\Lambda(h,f,g)\\&=8\sum_{J\in\mathcal{D}}\Big(|J_{\text{lijevi}}|\,[f]_{J_{\text{lijevi}}}\,[g]_{J_{\text{lijevi}}}\,[h]_{J_{\text{lijevi}}}+|J_{\text{desni}}|\,[f]_{J_{\text{desni}}}\,[g]_{J_{\text{desni}}}\,[h]_{J_{\text{desni}}}-|J|\,[f]_J\,[g]_J\,[h]_J\Big)\\&=8\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\|J|=2^{-n}}}|J|\,[f]_J\,[g]_J\,[h]_J-8\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\|J|=2^{n}}}|J|\,[f]_J\,[g]_J\,[h]_J=8\int_{\mathbb{R}}fgh,\end{aligned}$$

barem za ograničene funkcije s kompaktnim nosačima f,g,h. Ako su $(f,g)\mapsto\pi_{\downarrow\uparrow}(f,g)$, $\pi_{\uparrow\downarrow}(f,g)$, $\pi_{\uparrow\uparrow}(f,g)$ bilinearni operatori zadani sa

$$\int_{\mathbb{R}}\pi_{\downarrow\uparrow}(f,g)h=\frac{1}{4}\Lambda(f,g,h),\quad\int_{\mathbb{R}}\pi_{\uparrow\downarrow}(f,g)h=\frac{1}{4}\Lambda(g,h,f),\quad\int_{\mathbb{R}}\pi_{\uparrow\uparrow}(f,g)h=\frac{1}{4}\Lambda(h,f,g),$$

tada se, zbog gornjeg računa, uobičajeni točkovni produkt $(f,g)\mapsto fg$ dekomponira kao

$$fg=\pi_{\downarrow\uparrow}(f,g)+\pi_{\uparrow\downarrow}(f,g)+\pi_{\uparrow\uparrow}(f,g),$$

na tri dijela, tj. bilinearna operatora, koji se zovu *bilinearni paraprodukti.* (Strelica prema dolje sugerira prosjek odgovarajuće funkcije, tj. "niske frekvencije", dok strelica prema gore sugerira razliku prosjeka, tj. "visoke frekvencije".) Oni, radi (4), i dalje zadovoljavaju Hölderovu nejednakost,

$$\|\pi_{\downarrow\uparrow}(f,g)\|_{3/2}\le C\|f\|_3\|g\|_3,\quad \|\pi_{\uparrow\downarrow}(f,g)\|_{3/2}\le C\|f\|_3\|g\|_3,\quad \|\pi_{\uparrow\uparrow}(f,g)\|_{3/2}\le C\|f\|_3\|g\|_3,$$

te imaju bolja svojevrsna lokalizacijska svojstva od samog produkta.

U mnogim granama matematike ipak su korisnije neke varijante gore definiranog paraprodukta. Naime, ako Λ ekvivalentno zapišemo pomoću skalarnih produkata,

$$\Lambda(f,g,h)=4\sum_{J\in\mathcal{D}}|J|^{-2}\langle f,\mathbb{1}_J\rangle\langle g,\mathbb{1}_{J_{\text{lijevi}}}-\mathbb{1}_{J_{\text{desni}}}\rangle\langle h,\mathbb{1}_{J_{\text{lijevi}}}-\mathbb{1}_{J_{\text{desni}}}\rangle,$$

tada je prirodno skalarno množiti f, g i h redom i s nekim drugim kolekcijama testnih funkcija χ_J, φ_J i ψ_J, te jedna općenitija definicija paraprodukta glasi

$$\Theta(f,g,h):=\sum_{J\in\mathcal{D}}|J|^{-2}\langle f,\chi_J\rangle\langle g,\varphi_J\rangle\langle h,\psi_J\rangle.$$

Mi ćemo ovdje ipak ostati samo kod dijadskog paraprodukta, jer je najjednostavniji i idealan za ilustraciju Bellmanove metode.

Započnimo s dokazom ocjene (4). Opet možemo pretpostaviti da su f,g,h nenegativne. Inače ih rastavimo na realne i imaginarne te pozitivne i negativne dijelove; time se konstanta C može povećati najviše 4^3 puta. Nadalje, praktičnije je zamijeniti $\|f\|_3\|g\|_3\|h\|_3$ na desnoj strani od (4) većim izrazom $(\|f\|_3^3+\|g\|_3^3+\|h\|_3^3)/3$. Dakle, dokazujemo "ne-homogenu" ocjenu:

$$\sum_J |J|\,[f]_J\,\Big|[g]_{J_{\text{lijevi}}}-[g]_{J_{\text{desni}}}\Big|\Big|[h]_{J_{\text{lijevi}}}-[h]_{J_{\text{desni}}}\Big|\le C\Big(\int_{\mathbb{R}}f^3+\int_{\mathbb{R}}g^3+\int_{\mathbb{R}}h^3\Big).$$

Ako se odavde poželimo vratiti na polaznu ocjenu, samo posljednje treba primijeniti na funkcije af, bg, ch za pogodno odabrane konstante $a,b,c>0$ takve da je $abc=1$:

$$\sum_J |J|\,[f]_J\,\Big|[g]_{J_{\text{lijevi}}}-[g]_{J_{\text{desni}}}\Big|\Big|[h]_{J_{\text{lijevi}}}-[h]_{J_{\text{desni}}}\Big|\le C\Big(a^3\int_{\mathbb{R}}f^3+b^3\int_{\mathbb{R}}g^3+c^3\int_{\mathbb{R}}h^3\Big).$$

Optimizacijom po a,b,c (uz dane f,g,h) desna strana može postati upravo $3C\|f\|_3\|g\|_3\|h\|_3$.

Označimo

$$\Phi_I(f,g,h):=\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}|J|\;[f]_J\,\Big|[g]_{J_{\text{lijevi}}}-[g]_{J_{\text{desni}}}\Big|\Big|[h]_{J_{\text{lijevi}}}-[h]_{J_{\text{desni}}}\Big|,$$

tako da možemo normaliziranu ocjenu zapisati kao

$$\Phi_I(f,g,h)\le C\big(\,[f^3]_I+[g^3]_I+[h^3]_I\,\big) \tag{5}$$

za bilo koji $I\in\mathcal{D}$. Kasnije opet samo pustimo da $I=[0,2^N\rangle$ i $I=[-2^N,0\rangle$ iscrpljuju realni pravac na limesu kada $N\to\infty$.

Rastavljanjem sume $\sum_{J\subseteq I}$ na $\sum_{J\subseteq I_{\text{lijevi}}}$, $\sum_{J\subseteq I_{\text{desni}}}$ i pribrojnik za $J=I$, dobivamo

$$\Phi_I(f,g,h)=\frac{1}{2}\Phi_{I_{\text{lijevi}}}(f,g,h)+\frac{1}{2}\Phi_{I_{\text{desni}}}(f,g,h)+[f]_I\,\Big|[g]_{I_{\text{lijevi}}}-[g]_{I_{\text{desni}}}\Big|\Big|[h]_{I_{\text{lijevi}}}-[h]_{I_{\text{desni}}}\Big|$$

pa se problem opet lijepo "skalira". Definiramo apstraktnu Bellmanovu funkciju kao

$$\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) := \sup_{f,g,h} \Phi_I(f, g, h),$$

gdje se supremum uzima po svim nenegativnim funkcijama f, g, h takvima da je

$$[f]_I = u,\ [g]_I = v,\ [h]_I = w,\ \left[f^3\right]_I = U,\ \left[g^3\right]_I = V,\ \left[h^3\right]_I = W.$$

Primijetimo da ni ovaj izraz ne ovisi o izboru intervala I. Sada je to još očiglednije nego u prethodnom odjeljku: prosjeci su invarijantni na istovremeno rastezanje ili translatiranje dijadskih intervala i funkcija.

Diskutirajmo svojstva tako definirane funkcije.

($\mathcal{B}1$) *Domena*:

$$u, v, w, U, V, W \geq 0, \quad u^3 \leq U, \quad v^3 \leq V, \quad w^3 \leq W.$$

Ovo je opet samo Jensenova nejednakost. Obratno, za svake takve $u, v, w, U, V, W \geq 0$ mogu se naći (čak dijadske stepenaste) nenegativne funkcije f, g, h kao gore pa se supremum opet uzima po nepraznom skupu. (Kao što smo već bili rekli, ta provjera uopće nije krucijalna za dokaz.)

($\mathcal{B}2$) *Slika*:

$$0 \leq \mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) \leq C(U + V + W).$$

Ovo je samo naše vjerovanje u ocjenu (5).

($\mathcal{B}3$) *Glavna nejednakost*:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) \geq\ & \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, v_1, w_1, U_1, V_1, W_1) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, v_2, w_2, U_2, V_2, W_2) \\ & + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\,|v_1 - v_2|\,|w_1 - w_2|\end{aligned}$$

kad god je

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),\ v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2),\ w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$
$$U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2),\ V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2),\ W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

i sve šestorke varijabli pripadaju domeni. Za dokaz posljednjeg se sada naprosto uzme supremum u skalirajućem identitetu po svim f, g, h takvima da je $[f]_{I_{\text{lijevi}}} = u_1$, $[f^3]_{I_{\text{lijevi}}} = U_1$, itd.

Obratno, pretpostavimo da smo već našli funkciju $\mathcal{B}$ sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$). Uzimo nenegativne funkcije f, g, h; želimo dokazati ocjenu (5). Primijenjujući n puta nejednakost iz ($\mathcal{B}3$) možemo pisati

$$\begin{aligned}& |I|\,\mathcal{B}\Big([f]_I, [g]_I, [h]_I, [f^3]_I, [g^3]_I, [h^3]_I\Big) \\ \geq & \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J|\,\mathcal{B}\Big([f]_J, [g]_J, [h]_J, [f^3]_J, [g^3]_J, [h^3]_J\Big) \\ & + \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} [f]_J \left|[g]_{J_{\text{lijevi}}} - [g]_{J_{\text{desni}}}\right| \left|[h]_{J_{\text{lijevi}}} - [h]_{J_{\text{desni}}}\right|\end{aligned}$$

pa koristeći nenegativnost od $\mathcal{B}$ i drugu nejednakost iz ($\mathcal{B}2$) dobivamo

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}}[f]_J\,\Big|[g]_{J_{\text{lijevi}}}-[g]_{J_{\text{desni}}}\Big|\,\Big|[h]_{J_{\text{lijevi}}}-[h]_{J_{\text{desni}}}\Big|\le C\big([f^3]_I+[g^3]_I+[h^3]_I\big)$$

Prelaskom na limes kada $n\to\infty$ zaključujemo da vrijedi (5). Dakle, ocjena (5) je doista ekvivalentna postojanju Bellmanove funkcije, tj. funkcije $\mathcal{B}$ sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$).

Iz uvjeta ($\mathcal{B}2$) slutimo linearno ponašanje u varijablama U,V,W pa tražimo $\mathcal{B}$ među funkcijama oblika

$$\mathcal{B}(u,v,w,U,V,W)=c(U+V+W)-\alpha(u,v,w),$$

gdje je $c>0$ neka konstanta, dok $\alpha\colon[0,\infty\rangle^3\to\mathbb{R}$ sada treba zadovoljavati

$$|\alpha(u,v,w)|\le c(u^3+v^3+w^3)$$

i ocjenu

$$\alpha(u,v,w)\le\frac{1}{2}\alpha(u_1,v_1,w_1)+\frac{1}{2}\alpha(u_2,v_2,w_2)-\frac{1}{2}(u_1+u_2)\,|v_1-v_2|\,|w_1-w_2|$$

za sve $u_1,u_2,v_1,v_2,w_1,w_2\ge 0$.

Supstituirajmo

$$u=\frac{u_1+u_2}{2},\quad \triangle u=\frac{u_1-u_2}{2},\quad v=\frac{v_1+v_2}{2},\quad \triangle v=\frac{v_1-v_2}{2},\quad w=\frac{w_1+w_2}{2},\quad \triangle w=\frac{w_1-w_2}{2},$$

tako da se posljednja nejednakost može radije napisati kao

$$\frac{1}{2}\alpha(u{+}\triangle u,\ v{+}\triangle v,\ w{+}\triangle w)+\frac{1}{2}\alpha(u{-}\triangle u,\ v{-}\triangle v,\ w{-}\triangle w)-\alpha(u,v,w)\ge 4u|\triangle v||\triangle w| \tag{6}$$

čim su $u,v,w\ge 0$ te vrijedi $|\triangle u|\le u$, $|\triangle v|\le v$, $|\triangle w|\le w$. Dodatno pretpostavimo da je α koju tražimo klase C^∞.

Koristeći Taylorovu formulu u točki (u,v,w) kako bismo razvili $\alpha(u\pm\triangle u,\ v\pm\triangle v,\ w\pm\triangle w)$ dobivamo infinitezimalnu verziju od (6):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\alpha(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\partial_i\alpha(x)\,\triangle x_i+\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\alpha(x)\,\triangle x_i\,\triangle x_j+O(|\triangle x_1|^3{+}|\triangle x_2|^3{+}|\triangle x_3|^3)\\&+\frac{1}{2}\alpha(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\partial_i\alpha(x)\,\triangle x_i+\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\alpha(x)\,\triangle x_i\,\triangle x_j+O(|\triangle x_1|^3{+}|\triangle x_2|^3{+}|\triangle x_3|^3)-\alpha(x)\\&\ge 4x_1|\triangle x_2||\triangle x_3|,\end{aligned}$$

odakle je

$$\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\alpha(x)\,\triangle x_i\,\triangle x_j\ge 8x_1|\triangle x_2||\triangle x_3| \tag{7}$$

za $x=(x_1,x_2,x_3)\in\langle 0,\infty\rangle^3$ i za proizvoljne realne brojeve $\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3$. Ovdje smo radi jednostavnije notacije zamijenili $u,v,w,\triangle u,\triangle v,\triangle w$ redom sa $x_1,x_2,x_3,\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3$. Posljednji uvjet se može zapisati kao dvije nejednakosti

$$\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\alpha(x)\,\triangle x_i\triangle x_j\ge\pm 8x_1\triangle x_2\,\triangle x_3,$$

koje se potom mogu preformulurati kao zahtjev da su dvije matrice

$$\begin{bmatrix} \partial_u^2\alpha & \partial_u\partial_v\alpha & \partial_u\partial_w\alpha \\ \partial_u\partial_v\alpha & \partial_v^2\alpha & \partial_v\partial_w\alpha \pm 4u \\ \partial_u\partial_w\alpha & \partial_v\partial_w\alpha \pm 4u & \partial_w^2\alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

pozitivno semi-definitne u svakoj točki $(u, v, w) \in \langle 0, \infty\rangle^3$. Važno je primijetiti da je infinitezimalna ocjena (7) zapravo ekvivalentna s "globalnom" ocjenom (6). Naime, za funkcije $\gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ klase C^2 vrijedi formula

$$\frac{1}{2}\gamma(-1) + \frac{1}{2}\gamma(1) - \gamma(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - |t|)\gamma''(t)\,\mathrm{d}t$$

iz koje potom zaključujemo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\alpha(x_1{+}\triangle x_1,\, x_2{+}\triangle x_2,\, x_3{+}\triangle x_3) + \frac{1}{2}\alpha(x_1{-}\triangle x_1,\, x_2{-}\triangle x_2,\, x_3{-}\triangle x_3) - \alpha(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - |t|)\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\alpha(x_1{+}\,t\triangle x_1,\, x_2{+}\,t\triangle x_2,\, x_3{+}\,t\triangle x_3)\,\triangle x_i\,\triangle x_j\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ako sada iskoristimo infinitezimalnu nejednakost (7) dobit ćemo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\alpha(x_1{+}\triangle x_1,\, x_2{+}\triangle x_2,\, x_3{+}\triangle x_3) + \frac{1}{2}\alpha(x_1{-}\triangle x_1,\, x_2{-}\triangle x_2,\, x_3{-}\triangle x_3) - \alpha(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad \geq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - |t|)8(x_1{+}\,t\triangle x_1)|\triangle x_2||\triangle x_3|\,\mathrm{d}t = 4x_1|\triangle x_2||\triangle x_3|, \end{aligned}$$

a to je upravo (6).

Kako također trebamo moći ocijeniti $|\alpha(u, v, w)|$ odozgo višekratnikom od $u^3 + v^3 + w^3$, možemo pokušati konstruirati α kao homogeni polinom trećeg stupnja u varijablama u, v, w. Nadalje, možemo "simetrizirati" svaki takav polinom α, tj. zamijeniti $\alpha(u, v, w)$ sa

$$\alpha(u, v, w) + \alpha(u, w, v) + \alpha(v, w, u) + \alpha(v, u, w) + \alpha(w, u, v) + \alpha(w, v, u),$$

jedino uz cijenu da se konstanta iz njegove gornje ocjene poveća najviše 6 puta. Iz tog razloga smijemo odmah pretpostaviti da je polinom α simetričan, tj. da je oblika

$$\alpha(u, v, w) = A(u^3 + v^3 + w^3) + B(u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2) + Cuvw$$

za neke konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$. Nakon nešto eksperimentiranja nalazimo jedan dobar izbor:

$$A = 6, \quad B = 3, \quad C = 0,$$

tako da je

$$\alpha(u, v, w) = 6(u^3 + v^3 + w^3) + 3(u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2).$$

U tom slučaju matrice (8) glase

$$\begin{bmatrix} 36u + 6v + 6w & 6u + 6v & 6u + 6w \\ 6u + 6v & 6u + 36v + 6w & \pm 4u + 6v + 6w \\ 6u + 6w & \pm 4u + 6v + 6w & 6u + 6v + 36w \end{bmatrix}.$$

One su pozitivno definitne po Sylvesterovom kriteriju jer su im glavne minore:

$$36u + 6v + 6w > 0,$$

$$36(5u^2 + 5v^2 + w^2 + 35uv + 7uw + 7vw) > 0,$$

$$96(6u^3+9v^3+9w^3+65u^2v+65u^2w+78uv^2+78uw^2+81v^2w+81vw^2+456uvw)>0$$

ili

$$96(9v^3+9w^3+95u^2v+95u^2w+84uv^2+84uw^2+81v^2w+81vw^2+462uvw)>0.$$

Dakle, provjerili smo potrebnu infinitezimalnu ocjenu i jedna konkretna Bellmanova funkcija glasi

$$\mathcal{B}(u,v,w,U,V,W)=100(U+V+W)-6(u^3+v^3+w^3)-3(u^2v+uv^2+v^2w+vw^2+w^2u+wu^2).$$

Ujedno je završen i dokaz od (5). Ovo svakako nije jedini mogući izbor za $\mathcal{B}$.

Alternativno, jednom kada imamo gornju formulu za funkciju α, moguće je i direktno (bez diferencijalnog računa) provjeriti nejednakost (6):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha(u+\triangle u,\, v+\triangle v,\, w+\triangle w)+\frac{1}{2}\alpha(u-\triangle u,\, v-\triangle v,\, w-\triangle w)-\alpha(u,v,w)\\
&=u(3\triangle u+\triangle v)^2+u(3\triangle u+\triangle w)^2+3v(\triangle u+\triangle v)^2+3w(\triangle u+\triangle w)^2\\
&\quad+3(v+w)(\triangle v+\triangle w)^2+(2u+12v)(\triangle v)^2+(2u+12w)(\triangle w)^2\\
&\geq 2u((\triangle v)^2+(\triangle w)^2)\geq 4u|\triangle v||\triangle w|.
\end{aligned}$$

Ovaj primjer su Škreb i autor [5] kasnije poopćili na ocjene dijadskog paraprodukta Λ koje na desnoj strani od (4) imaju $\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r$ za bilo koje $p,q,r\in\langle 1,\infty\rangle$. Formule za konkretne Bellmanove funkcije $\mathcal{B}$ lako mogu postati vrlo komplicirane pa je tako funkcija iz [5] sastavljena od čak 22 pribrojnika.

3 Buckleyeva ocjena za dijadske A_∞ težine

Funkcija $w\colon\mathbb{R}\to\langle 0,\infty\rangle$ se naziva *dijadska A_∞ težina* ako postoji konačna konstanta $A>0$ takva da vrijedi

$$[w]_J\leq Ae^{[\ln w]_J}$$

za svaki $J\in\mathcal{D}$. Buckleyeva ocjena [1] glasi

$$\sum_{J\subseteq I}|J|\Big(\frac{[w]_{J_{\text{lijevi}}}-[w]_{J_{\text{desni}}}}{[w]_J}\Big)^2\leq C_A|I| \tag{9}$$

za svaki interval $I\in\mathcal{D}$ uz neku konačnu konstantu C_A (ovisnu samo o broju A). Ovdje nam to nije važno, ali posljednja nejednakost zapravo tvrdi da izvjesna kolekcija brojeva vezanih uz težinu w zadovoljava (poopćeni) Carlesonov uvjet iz prvog odjeljka. Ovaj rezultat se može shvatiti i kao dijadska verzija ranijeg rezultata R. Feffermana, C. Keniga i J. Pipher [4].

Apstraktna Bellmanova funkcija je ovdje prirodno definirana:

$$\mathcal{B}(u,v):=\sup_w\frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I}|J|\Big(\frac{[w]_{J_{\text{lijevi}}}-[w]_{J_{\text{desni}}}}{[w]_J}\Big)^2,$$

pri čemu se supremum uzima po svim A_∞ težinama w s fiksiranom konstantom A koje zadovoljavaju

$$[w]_I=u,\quad [\ln w]_I=v.$$

Njezina svojstva su sljedeća.

($\mathcal{B}$1) *Domena*:

$$e^v\leq u\leq Ae^v.$$

Ovo su redom Jensenova nejednakost za logaritam,

$$v=[\ln w]_I\leq\ln[w]_I=\ln u,$$

te A_∞ uvjet iz pretpostavke na w.

($\mathcal{B}2$) *Slika*:

$$0 \leq \mathcal{B}(u,v) \leq C_A.$$

Ovo je opet samo naše uvjerenje da željena ocjena (9) doista vrijedi.

($\mathcal{B}3$) *Glavna nejednakost*:

$$\mathcal{B}(u,v) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1,v_1) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2,v_2) + \Big(\frac{u_1-u_2}{u}\Big)^2$$

kad god je

$$u = \frac{1}{2}(u_1+u_2), \qquad v = \frac{1}{2}(v_1+v_2)$$

i sve varijable leže u domeni.

Obratno, pretpostavimo da već znamo funkciju $\mathcal{B}$ koja ima svojstva ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$). Uzmimo težinu w kao ranije i proizvoljni dijadski interval I. Višestrukom uzastopnom primjenom svojstva ($\mathcal{B}3$) dobivamo

$$|I|\mathcal{B}([w]_I,[\ln w]_I) \geq \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\,\mathcal{B}([w]_J,[\ln w]_J) + \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}} |J|\Big(\frac{[w]_{J_{\text{lijevi}}}-[w]_{J_{\text{desni}}}}{[w]_J}\Big)^2$$

pa preostaje iskoristiti ($\mathcal{B}2$) i nenegativnost te pustiti limes kada $n\to\infty$ kako bismo dobili (9).

Ovom prilikom je zapravo moguće pogoditi jedan takav primjer funkcije $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(u,v) = 8(\ln u - v)$$

pa samo preostaje provjeriti njezina svojstva. Za ($\mathcal{B}2$) imamo

$$0 \leq \mathcal{B}(u,v) \leq 8\ln A,$$

dok ($\mathcal{B}3$) slijedi iz računa

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(u,v) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1,v_1) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2,v_2) &= 4\ln\frac{u^2}{u_1u_2}\\ = -4\ln\Big(1-\Big(\frac{u_1-u_2}{u_1+u_2}\Big)^2\Big) &\geq 4\Big(\frac{u_1-u_2}{u_1+u_2}\Big)^2 = \Big(\frac{u_1-u_2}{u}\Big)^2.\end{aligned}$$

Može se pokazati da se ova konkretna Bellmanova funkcija zapravo podudara s apstraktno definiranom. To znači da je ona na neki način optimalna, ali i da se do nje može doći numeričkim simulacijama. Ovaj primjer preuzet je iz preglednog rada [6].

Do formule za $\mathcal{B}$ možemo doći i na sistematičniji način, tako da glavnu nejednakost zapišemo:

$$\mathcal{B}(u,v) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(u+\triangle u, v+\triangle v) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u-\triangle u, v-\triangle v) + \Big(\frac{2\triangle u}{u}\Big)^2$$

i potom prijeđemo na infinitezimalnu verziju kao u prethodnom odjeljku:

$$\frac{1}{2}\partial_u^2\mathcal{B}(u,v)(\triangle u)^2 + \frac{1}{2}\partial_v^2\mathcal{B}(u,v)(\triangle v)^2 + \partial_u\partial_v\mathcal{B}(u,v)(\triangle u)(\triangle v) \leq -\frac{4(\triangle u)^2}{u^2}.$$

Potom tražimo funkciju koja čak zadovoljava jednakost za sve parove (u,v) iz domene. Izjednačavanjem dvaju kvadratnih formi dolazimo do sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\partial_u^2\mathcal{B} = -\frac{8}{u^2}, \quad \partial_v^2\mathcal{B} = 0, \quad \partial_u\partial_v\mathcal{B} = 0.$$

Srećom, one su dovoljno jednostavne da se daju eksplicitno riješiti i dobivamo

$$\mathcal{B}(u,v) = 8\ln u + au + bv + c$$

za neke konstante a, b i c koje se pak odrede iz svojstava ($\mathcal{B}1$) i ($\mathcal{B}2$). Ipak, ovdje infinitezimalna i globalna ocjena za $\mathcal{B}$ nisu ekvivalentne, jer domena iz ($\mathcal{B}1$) nije konveksan skup. Zato svejedno opet moramo direktno (kao i ranije) provjeriti glavnu nejednakost ($\mathcal{B}3$).

4 Zadaci za vježbu

Zadatak 1. Definirajmo formu Θ (vezanu uz tzv. *Haarove množitelje*) formulom

$$\Theta(f,g) := \sum_{J\in\mathcal{D}} |J| \Big| [f]_{J_{\text{lijevi}}} - [f]_{J_{\text{desni}}} \Big| \Big| [g]_{J_{\text{lijevi}}} - [g]_{J_{\text{desni}}} \Big|.$$

Dokažite

$$|\Theta(f,g)| \leq 4\|f\|_2\|g\|_2.$$

Zadatak 2. Za formu Θ iz prethodnog zadatka i proizvoljne eksponente $p,q \in \langle 1,\infty\rangle$, $1/p+1/q=1$, $p\neq q$ dokažite da postoji konačna konstanta $C_{p,q}$ takva da vrijedi i ocjena

$$|\Theta(f,g)| \leq C_{p,q}\|f\|_p\|g\|_q.$$

Ovo je teža varijanta ocjene iz prethodnog zadatka; čitatelj koji zatreba pomoć može pogledati u [6, §8].

Zadatak 3. Dokažite da dijadski paraprodukt iz drugog odjeljka zadovoljava i ocjenu

$$|\Lambda(f,g,h)| \leq C\|f\|_2\|g\|_4\|h\|_4$$

za neku konačnu konstantu C. Ovaj posebni slučaj L^p ocjene za paraprodukt se također može dokazati konstruirajući elegantnu Bellmanovu funkciju, za razliku od općenitog slučaja diskutiranog u [5, §1–§2].

Zadatak 4. *Dijadska maksimalna funkcija* od f definirana je formulom

$$(\mathrm{M}f)(x) := \sup_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\ni x}} [|f|]_I.$$

Dokažite da za svaki eksponent $p \in \langle 1,\infty\rangle$ postoji konačna konstanta C_p takva da vrijedi

$$\|\mathrm{M}f\|_p \leq C_p\|f\|_p.$$

Dokaz tehnikom Bellmanovih funkcija čitatelj može naći u [8, §3.1]. Za alternativni dokaz uz optimalnu konstantu $C_p = p/(p-1)$ može se primijetiti da je riječ o posebnom slučaju tzv. *Doobove nejednakosti* [3, §4.4].

Zadatak 5. Neka je w dijadska A_∞ težina s konstantom $A>0$, definirana u trećem odjeljku. Dokažite da postoje eksponent $p \in \langle 1,\infty\rangle$ i konačna konstanta C (oboje ovisni samo o A) takvi da za svaki $I\in\mathcal{D}$ vrijedi nejednakost

$$\big[w^p\big]_I \leq C[w]_I^p.$$

Ovo je tzv. *inverzna Hölderova nejednakost* za dijadske A_∞ težine.

Literatura

[1] S. M. Buckley, *Summation condition on weights*, Mich. Math. J. **40** (1993), no. 1, 153–170.

[2] L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 547–559.

[3] R. Durrett, *Probability—theory and examples*, peto izdanje, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[4] R. A. Fefferman, C. E. Kenig, J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 65–124.

[5] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bellman functions and L^p estimates for paraproducts*, Probab. Math. Statist. **38** (2018), no. 2, 459–479.

[6] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162 (na ruskom); English transl.: St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

[7] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *The Bellman functions and two-weight inequalities for Haar multipliers*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 909–928.

[8] T. Tao, *MATH 247A: Fourier analysis*, zabilješke s doktorskog kursa, UCLA, 2006. Dostupno na: `https://www.math.ucla.edu/~tao/247a.1.06f/`.