Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2020./2021.
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/

**Tema br. 5:**

# Tenzorski produkt i primjene

*Aleksandar Bulj*, 16. 4. 2021.
aleksa

Standardna literatura iz algebre uvodi pojam tenzorskog produkta pomoću vrlo apstraktnih konstrukcija i često se ne bavi kvantitativnim ocjenama operatora na tenzorskom produktu prostora iako se takva pitanja prirodno pojavljuju u raznim područjima matematike. Cilj ovog predavanja je uvesti vrlo elementarnu definiciju tenzorskog produkta na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima koristeći Kroneckerov produkt matrica i proučiti kvantitativna i kvalitativna svojstva istoga. U prvom odjeljku motivirat ćemo definiciju Kroneckerovog produkta proučavanjem bilinearnih formi. U drugom poglavlju proučit ćemo kvalitativna i kvantitativna svojstva Kroneckerovog produkta, a u trećem poglavlju iskoristiti ga za definiciju tenzorskog produkta vektorskih prostora. Konačno, u 4. poglavlju na nizu primjera pokazat ćemo korisnost navedenog pojma na problemima iz raznih područja matematike.

## 1 Bilinearna preslikavanja

Za dane realne vektorske prostore $U$ i $V$, funkciju $B : U \times V \to \mathbb{R}$ koja je linearna po obje varijable zasebno nazivamo *bilinearnom formom*.

Primjer jedne bilinearne forme na realnom vektorskom prostoru je skalarni produkt, a u ovom odjeljku karakterizirat ćemo sve bilinearne forme na realnom vektorskom prostoru pomoću skalarnog produkta.

Za linearne operatore imamo bogatu teoriju, ali za bilinearnu formu nije jednostavno reći ni kako se uopće može zadati. Na primjer, lako se vidi da ne postoji bilinearna forma $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$B\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = 1,\ B\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = 1,\ B\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 2.$$

Naime, iz bilinearnosti u drugoj varijabli slijedi da treći izraz mora biti razlika prva dva.

Dakle, prirodno se postavlja pitanje kad je bilinearna forma dobro definirana i postoji li neki eksplicitan kriterij za to. Kako bismo odgovorili na to pitanje, pokušajmo naći neku reprezentaciju bilinearnih formi pomoću linearnih operatora budući da linearne sustave znamo rješavati.

Preslikavanje $B : U \times V \to \mathbb{R}$ zadano s $(u, v) \mapsto B(u, v)$ uz fiksirani $u$ možemo shvatiti kao djelovanje funkcionala na $v$ pa po Rieszovom teoremu postoji vektor $A(u) \in V$ ($A$ je u ovom trenutku samo funkcija $A : U \to V$ koja vektoru $u$ pridružuje vektor $A(u)$ koji dolazi od Rieszovog teorema) takav da za sve $u \in U$ i $v \in V$ vrijedi $B(u,v) = \langle A(u), v\rangle$. Međutim, kako je $B$ linearno i po prvoj varijabli, za sve $u_1, u_2, v$ i skalare $\alpha_1, \alpha_2$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle &= B(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 B(u_1, v) + \alpha_2 B(u_2, v)\\ &= \alpha_1\langle A(u_1), v\rangle + \alpha_2 \langle A(u_2), v\rangle\\ &= \langle \alpha_1 A(u_1) + \alpha_2 A(u_2), v\rangle.\end{aligned}$$

Kako tvrdnja vrijedi za proizvoljan $v$, oduzimanjem desne strane od lijeve i izborom $v := A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 A(u_1) + \alpha_2 A(u_2)$ zaključujemo da je $A$ linearan operator. Prema tome, za svaku bilinearnu formu $B : U \times V \to \mathbb{R}$ postoji linearan operator $A \in L(U, V)$ tako da je

$$B(u,v) = \langle Au, v\rangle = v^\top Au.$$

U slučaju kompleksnih vektorskih prostora, skalarni produkt nije bilinearan, ali i dalje se svaka bilinearna forma može prikazati pomoću trećeg izraza u gornjem nizu jednakosti.

Prethodni primjer potpuno karakterizira sve bilinearne forme, ali navedeni pristup ne može se prirodno generalizirati na multilinearna preslikavanja. Pokušajmo generalizirati prethodni rezultat na trilinearna preslikavanja.

Neka je $T : U \times V \times W \to \mathbb{R}$ trilinearno preslikavanje. Za $u \in U$ fiksan, $(v,w) \mapsto T(u,v,w)$ je bilinearno preslikavanje po $v$ i $w$ pa po prethodnom teoremu postoji matrica $A(u)$ takva da je

$$T(u,v,w) = w^\top A(u)v$$

Sličnim računom kao i ranije pokaže se da je $A(u)$ linearno preslikavanje iz $A : U \to L(V, W)$, ali to nam ne pomaže da nađemo prirodniji zapis budući da nemamo prirodnih trilinearnih preslikavanja. Pokušajmo zato naći drugi prikaz.

# 2 Kroneckerov produkt matrica

**Napomena.** U ovom poglavlju radimo sa vektorskim prostorima nad poljem $\mathbb{R}$, ali svi se rezultati mogu potpuno analogno generalizirati na vektorske prostore nad bilo kojim drugim poljem (npr. $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{C}$).

Budući da je svaki realni konačno dimenzionalni vektorski prostor izomorfan sa $\mathbb{R}^{\dim(V)}$, za razumijevanje formi na proizvoljnom vektorskom prostoru nužno nam je (a pokazat ćemo da je i dovoljno) razumjeti bilinearne forme na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Neka je $\Lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinearna forma te neka su $(e_i)_{i=1}^m$ i $(f_j)_{j=1}^n$ elementi kanonskih baza prostora $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. Razmatranjem kao prije dobivamo da za svaki $i$ postoji jedinstveni funkcional iz $(\mathbb{R}^n)'$ prikazan $1 \times n$ matricom $L_i$ tako da je $\Lambda(e_i, v) = L_i v$ za sve $v \in \mathbb{R}^n$. Zbog linearnosti u prvoj varijabli, tada za proizvoljan $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i$ vrijedi:

$$\Lambda(u,v) = \sum_{i=1}^m u_i \cdot L_i v = \begin{bmatrix} L_1 v & L_2 v & \cdots & L_m v\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 v \\ u_2 v \\ \vdots \\ u_m v\end{bmatrix}$$

gdje je zadnji prikaz u tzv. "blok matričnom zapisu", tj. formalno su matrice dimenzija $1 \times m \cdot n$ i $m \cdot n \times 1$, ali svaki stupac matrice $[L_j]_j$ predstavlja "blok" veličine $1 \times n$, dok svaki redak posljednje matrice predstavlja "blok" veličine "$n \times 1$. Kod takvog zapisa važno je paziti na to da blokovi pomoću kojih zapisujemo matricu budu ulančanih veličina. Dakle, vidimo da djelovanje bilinearne forme na paru vektora $(u, v)$ možemo prikazati pomoću djelovanja linearnog funkcionala na prostoru $\mathbb{R}^{mn}$ primijenjenog na vrlo specifično konstruiran vektor u $\mathbb{R}^{mn}$ dobiven iz vektora $u$ i $v$. Potaknuti oblikom vektora uvodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 1.** Za dane matrice $A \in M^{m,n}(\mathbb{R})$, $A = [(a_{i,j})]_{i,j=1}^{m,n}$ i $B \in M^{p,q}(\mathbb{R})$ matricu $A \otimes B \in M^{mp,nq}(\mathbb{R})$ definiranu s:

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

nazivamo **Kroneckerov produkt** ili **tenzorski produkt** matrica $A$ i $B$. Prostor matrica $M^{mp,nq}(\mathbb{R})$ nastao na gornji način nazivamo **tenzorski produkt** prostora $M^{m,n}(\mathbb{R})$ i $M^{p,q}(\mathbb{R})$ i označavamo ga kao $M^{m,n}(\mathbb{R}) \otimes M^{p,q}(\mathbb{R})$

Navedimo osnovna svojstva Kroneckerovog produkta matrica.

**Teorem 1.** *Vrijedi:*

1. *Kroneckerov produkt $\otimes$ je bilinearan, tj. za sve matrice $A, B, C$, takve da $A$ i $B$ imaju iste dimenzije i sve skalare $\alpha, \beta$ vrijedi:*

   (a) $(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha A \otimes C + \beta B \otimes C$

   (b) $C \otimes (\alpha A + \beta B) = \alpha C \otimes A + \beta C \otimes B$

   (c) $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$, *gdje je* $0$ *u prva dva izraza nul matrica proizvoljne, a u zadnjem izrazu odgovarajuće dimenzije.*

2. *Ako sa $E_{i,j}^{m,n}$ označimo matricu iz $M^{m,n}(\mathbb{R})$ koja ima sve elemente jednake $0$ osim elementa na mjestu $i, j$ koji je jednak $1$, tada je:*

$$(E_{i,j}^{m,n} \otimes E_{k,l}^{p,q})_{i,j,k,l=1}^{m,n,p,q}$$

   *baza vektorskog prostora $M^{mp,nq}(\mathbb{R})$.*

3. *Kroneckerov produkt je asocijativna operacija, tj. za sve matrice $A, B, C$ vrijedi:*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

4. *Ako su (A, C) i (B, D) ulančane, tada je:*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

5. *Za proizvoljne $A$ i $B$ vrijedi:* $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$ *i* $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

6. *Ako su* $u_i, v_i \in M^{n_i,1}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, k$ *i ako je* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *standardni skalarni produkt na* $M^{n,1}(\mathbb{R})$, *tada vrijedi:*

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \rangle = \prod_{i=1}^{k} \langle u_i, v_i \rangle$$

*Dokaz.*

1. Prva tvrdnja provjeri se direktno iz definicije.

2. Slijedi iz činjenice da matrica $E^{m,n}_{i,j} \otimes E^{p,q}_{k,l}$ ima jedinicu na mjestu $((i-1)p+k, (j-1)q+l)$ i sve ostale elemente jednake 0. Kad prođemo po svim $i, j, k, l$ te matrice čine skup svih elementarnih matrica u $M^{mn,pq}(\mathbb{R})$.

3. Koristeći bilinearnost Kroneckerovog produkta iz prvog svojstva i drugo svojstvo, dovoljno je dokazati tvrdnju na elementarnim matricama. Neka je $A = E^{m_1,n_1}_{i_1,j_1}$, $B = E^{m_2,n_2}_{i_2,j_2}$, $C = E^{m_3,n_3}_{i_3,j_3}$. Tada se vidi da je:

   $$(A \otimes B) \otimes C = E^{m_1 m_2, n_1 n_2}_{(i_1-1)m_2+i_2,(j_1-1)n_2+j_2} \otimes E^{m_3,n_3}_{i_3,j_3} = E^{m_1 m_2 m_3, n_1 n_2 n_3}_{((i_1-1)m_2+i_2-1)m_3+i_3,((j_1-1)n_2+j_2-1)n_3+j_3}$$

   te se analogno provjeri da je desna strana jednaka tome.

4. Budući da su i kroneckerov produkt i matrični produkt bilinearni, dovoljno je provjeriti tvrdnju kad su $A, B, C, D$ elementarne matrce. Neka su $A = E^{m_1,n_1}_{i_1,j_1}$, $B = E^{m_2,n_2}_{i_2,j_2}$, $C = E^{n_1,p_1}_{k_1,l_1}$, $D = E^{n_2,p_2}_{k_2,l_2}$. Tada je

   $$A \otimes B = E^{m_1 m_2, n_1 n_2}_{(i_1-1)m_2+i_2,(j_1-1)n_2+j_2} \quad \text{i} \quad C \otimes D = E^{n_1 n_2, p_1 p_2}_{(k_1-1)n_2+k_2,(l_1-1)p_2+l_2}$$

   Budući da za produkt ulančanih elementarnih matrica vrijedi

   $$E_{i,j} E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

   desna strana je različita od 0 samo u slučaju kad su i $AC$ i $BD$ različiti od 0, a to vrijedi samo kad je $j_1 = k_1$ i $j_2 = k_2$. Lijeva strana je različita od 0 samo kad je $(j_1-1)n_2 + j_2 = (k_1-1)n_2 + k_2$, što zbog ocjena $1 \le j_1, k_1 \le n_1$ i $1 \le j_2, k_2 \le n_2$ vrijedi samo u slučaju kad je $j_1 = k_1$ i $j_2 = k_2$. Dakle, preostaje provjeriti da su u slučaju kad je $j_1 = k_1$ i $j_2 = k_2$ izrazi jednaki. Lijeva strana jednaka je $E^{m_1 m_2, p_1 p_2}_{(i_1-1)m_2+i_2,(l_1-1)p_2+l_2}$, dok je desna strana jednaka: $E^{m_1,p_1}_{i_1,l_1} \otimes E^{m_2,p_2}_{i_2,l_2}$, odnosno jednaka je lijevoj strani i time je jednakost dokazana.

5. Kao i u prethodnim rezultatima dovoljno je provjeriti tvrdnju na elementarnim matricama, što se direktno vidi.

6. Zbog toga što vrijedi $\langle u, v\rangle = v^*u$, tada iz četvrtog i petog svojstva vrijedi:

$$\begin{aligned}\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\rangle &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)^*(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)\\ &= (v_1^* \otimes \cdots \otimes v_k^*)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)\\ &= (v_1^*u_1) \otimes \cdots \otimes (v_k^*u_k)\\ &= \prod_{i=1}^{k}\langle u_i, v_i\rangle\end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost vrijedi zbog toga što smo $M^{1\times 1}(\mathbb{R})$ poistovjetili s s $\mathbb{R}$.

□

Nakon što smo se gornjim rezultatom uvjerili da vrijede neka osnovna svojstva, proučit ćemo neka dublja svojstva Kroneckerovog produkta matrica. Za to ćemo koristiti sljedeći teorem koji je standardni teorem linearne algebre, a navodimo ga radi potpunosti.

**Teorem 2** (Schurova dekompozicija)**.** *Za svaku matricu $A \in M^n(\mathbb{C})$ postoji unitarna matrica $Q$ i gornjetrokutasta matrica $U$ tako da vrijedi:*

$$A = Q^*UQ$$

*Dodatno vrijedi da su dijagonalni elementi matrice $U$ svojstvene vrijednosti od $A$, brojeći multiplikativnost.*

Sljedeći teorem nam kaže da je spektar Kroneckerovog produkta matrica određen spektrima matrica.

**Teorem 3** (Spektar Kroneckerovog produkta)**.** *Neka je $A \in M^m(\mathbb{C})$ i $B \in M^n(\mathbb{C})$. Ako su svojstvene vrijednosti od $A$ i $B$, brojeći kratnosti, $(\lambda_i)_{i=1}^m$ i $(\mu_j)_{j=1}^n$ respektivno, tada su svojstvene vrijednosti matrice $A \otimes B$ dane s $(\lambda_i \cdot \mu_j)_{i,j=1}^{mn}$, brojeći kratnosti. Dodatno, ako su $u$ i $v$ svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda_i$ i $\mu_j$ respektivno, tada je $u \otimes v$ svojstveni vektor matrice $A \otimes B$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_i\mu_j$.*

*Dokaz.* Druga tvrdnja jednostavna je posljedica svojstava 4 iz teorema 1:

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv) = \lambda_i\mu_j(u \otimes v).$$

Dokažimo tvrdnju o izgledu spektra.

Neka su $A = Q_A^*U_AQ_A$ i $B = Q_B^*U_BQ_B$ Schurove dekompozicije matrica $A$ i $B$. Iz svojstva 4 teorema 1 slijedi:

$$A \otimes B = (Q_A^* \otimes Q_B^*)(U_A \otimes U_B)(Q_A \otimes Q_B)$$

i

$$(Q_A^* \otimes Q_B^*)(Q_A \otimes Q_B) = I_m \otimes I_n = I_{mn}.$$

Odatle slijedi da je matrica $Q_A \otimes Q_B$ unitarna, a iz toga slijedi da su matrice $A \otimes B$ i $U_A \otimes U_B$ slične. Iz definicije Kroneckerovog produkta lako se vidi da je matrica $U_A \otimes U_B$ gornjetrokutasta i da su dijagonalni elementi od $U_A \otimes U_B$ točno $(\lambda_i\mu_j)_{i,j=1}^{m,n}$. Koristeći opet činjenicu da su svojstvene vrijednosti sličnih matria jednake slijedi tvrdnja teorema. □

Koristeći prethodni rezultat možemo dokazati sljedeća važna svojstva Kroneckerovog produkta.

**Teorem 4.** *Vrijedi:*

1. *Za kvadratne matrice $A$ i $B$ vrijedi:* $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m$.
2. *Za kvadratne matrice $A$ i $B$ vrijedi:* $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$.
3. *Za kvadratne matrice $A$ i $B$ vrijedi: $A \otimes B$ je invertibilna ako i samo ako su invertibilne $A$ i $B$ i vrijedi $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$*
4. *Za proizvoljne matrice $A$ i $B$ vrijedi: ako su singularne vrijednosti od $A$ i $B$ dane s: $(\sigma_{A,i})_{i=1}^{m}$ i $(\sigma_{B,j})_{j=1}^{n}$, tada su singularne vrijednosti od $A \otimes B$ dane s:*
$$(\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{B,j})_{i,j=1}^{m,n}$$
5. *Za proizvoljne matrice $A$ i $B$ vrijedi:* $\operatorname{rang}(A \otimes B) = \operatorname{rang}(A) \cdot \operatorname{rang}(B)$

*Dokaz.* Prva i druga tvrdnja slijede iz prethodnog teorema i činjenice da ako su $(\lambda_i)_{i=1}^n$ svojstvene vrijednosti od $A$ brojeći multiplikativnost, tada je $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, odnosno $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

U trećoj tvrdnji invertiblinost slijedi iz karakterizacije invertibilnosti pomoću determinante i prvog svojstva. Tvrdnja o inverzu slijedi iz sljedećeg računa koristeći svojstvo 4 teorema 1

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = (A^{-1}A) \otimes (B^{-1}B) = I_m \otimes I_n,$$

gdje matrice $I_m, I_n$ imaju dimenzije matrica $A$ i $B$ respektivno.

Četvrta tvrdnja slijedi iz činjenice da su singularne vrijednosti proizvoljne matrice $M$ svojstvene vrijednosti od $M^*M$ i teoremu o spektru Kroneckerovog produkta zbog:

$$(A \otimes B)^*(A \otimes B) = (A^* \otimes B^*)(A \otimes B) = (A^*A) \otimes (B^*B)$$

Peta tvrdnja slijedi iz činjenice da je rang matrice jednak broju nenul singularnih vrijednosti i četvrte tvrdnje. □

Za kraj proučavanja osnovnih svojstava Kroneckerovog produkta, proučit ćemo povezanost operatorske norme i Kroneckerovog produkta. Čitatelju koji se nije ranije susreo sa $l^p$ i operatorskim normama savjetujemo preskakanje ostatka odjeljka.

**Definicija 2.** Za matricu $A$ definiramo operatorsku normu matrice.

$$\|A\|_{l^p \to l^p} := \sup\{\|Ax\|_{l^p} : \|x\|_{l^p} = 1\}$$

Podsjetimo se, operatorska norma ima sljedeće važno svojstvo:

**Propozicija 5.** Za ulančane matrice $A$ i $B$ vrijedi:

$$\|AB\|_{l^p \to l^p} \le \|A\|_{l^p \to l^p} \|B\|_{l^p \to l^p}$$

*Dokaz.* Primijetimo najprije da iz definicije operatorske norme slijedi da za proizvoljan vektor $x$ vrijedi:

$$\|Ax\|_{l^p\to l^p} \leq \|A\|_{l^p\to l^p}\|x\|_{l^p}.$$

Naime, ako je $x = 0$, obje strane nejednakosti su jednake 0 pa tvrdnja očito slijedi. U suprotnom je za proizvoljan vektor $x \neq 0$ vrijedi: $\|\frac{x}{\|x\|_{l^p}}\|_{l^p} = 1$ pa iz definicije operatorske norme slijedi:

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_{l^p}}\right)\right\|_{l^p} \leq \|A\|_{l^p\to l^p}.$$

Množeći obje strane sa $\|x\|_{l^p}$ slijedi tvrdnja.

Neka je $x$ proizvoljan vektor iz domene od $B$ takav da je $\|x\|_{l^p} = 1$. Tada iz prethodne opservacije primijenjene najprije na vektor $Bx$ i zatim na $x$ vrijedi:

$$\|ABx\|_{l^p} \leq \|A\|_{l^p\to l^p}\|Bx\|_{l^p} \leq \|A\|_{l^p\to l^p}\|B\|_{l^p\to l^p}\|x\|_{l^p} = \|A\|_{l^p\to l^p}\|B\|_{l^p\to l^p},$$

što je i trebalo dokazati. □

Važno svojstvo povezanosti Kroneckerovog produkta i matričnih normi dano je u sljedećem teoremu. Primijetimo da je slučaj $p = 2$ dokazan u prethodnomteoremu budući da je $\|A\|_{l^2\to l^2}$ jednako najvećoj singularnoj vrijednosti matrice.

**Teorem 6.** *Za proizvoljne matrice $A$ i $B$ i $p \in [1,\infty]$ vrijedi:*

$$\|A\otimes B\|_{l^p\to l^p} = \|A\|_{l^p\to l^p}\|B\|_{l^p\to l^p}.$$

*te induktivno:*

$$\|A_1\otimes\cdots\otimes A_n\|_{l^p\to l^p} = \prod_{i=1}^{n}\|A_i\|_{l^p\to l^p}$$

*Dokaz.* Budući da je jedinična sfera u $l^p$ normi u $\mathbb{R}^n$ kompaktan skup, a matrično množenje i norma su neprekidne funkcije, slijedi da je supremum u definiciji operatorske norme zapravo maksimum pa postoje vektori $x, y$ iz domena matrica $A$ i $B$ respektivno takvi da je $\|x\|_{l^p} = \|y\|_{l^p} = 1$ i

$$\|Ax\|_{l^p} = \|A\|_{l^p\to l^p} \quad \text{i} \quad \|By\|_{l^p} = \|B\|_{l^p\to l^p}$$

Sada za vektor $x\otimes y$ iz definicije $l^p$ norme na $\mathbb{R}^{mn}$ vrijedi: $\|x\otimes y\|_{l^p} = \|x\|_{l^p}\|y\|_{l^p} = 1$, a po svojstvu 4 teorema 1 vrijedi:

$$\|(A\otimes B)(x\otimes y)\|_{l^p} = \|(Ax)\otimes(By)\|_{l^p} = \|Ax\|_{l^p}\|By\|_{l^p} = \|A\|_{l^p\to l^p}\|B\|_{l^p\to l^p}.$$

Sada po definiciji operatorske norme zaključujemo:

$$\|A\otimes B\|_{l^p\to l^p} \geq \|A\|_{l^p\to l^p}\|B\|_{l^p\to l^p} \tag{1}$$

budući da smo našli jedan vektor $l^p$ norme jednake 1 koji se slika u neki vektor norme jednake desnoj strani gornjeg izraza.

Dokažimo obratan smjer. Iz svojstva 4 teorema 1 i propozicije 5 slijedi:

$$\|A \otimes B\|_{l^p \to l^p} = \|(A \otimes I)(I \otimes B)\|_{l^p \to l^p} \leq \|A \otimes I\|_{l^p \to l^p} \|I \otimes B\|_{l^p \to l^p},$$

gdje je $I$ u prvoj zagradi kvadratna jedinična matrica dimenzije broja redaka matrice $B$, a $I$ u drugoj zagradi kvadratna jedinična matrica dimenzije broja stupaca od $A$.

Preostaje dokazati da za proizvoljnu matricu $A \in M^{m,n}(\mathbb{R})$ i i jediničnu matricu $I \in M^r(\mathbb{R})$ proizvoljne dimenzije vrijedi:

$$\|A \otimes I_r\|_{l^p \to l^p} = \|I_r \otimes A\|_{l^p \to l^p} = \|A\|_{l^p \to l^p}.$$

Iz (1) slijedi da su prva dva izraza veća ili jednaka od trećeg pa preostaje dokazati da su i manji ili jednaki. Dokažimo obratnu jednakost za prvi član budući da će obratna slijediti analogno. Označimo sa $e_i$ elemente kanonskih baza prostora $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ odgovarajućih stupčanih dimenzija kad se odnosi na odgovarajući prostor (ta dvosmislenost neće raditi problem). Ako je $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ matrični zapis od $A$, možemo pisati $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_i e_j^\top$. Neka je $x = \sum_{i,j} x_{i,j} e_i \otimes e_j$ vektor takav da je $\|x\|_{l^p} = 1$ za koji se postiže maksimum u definiciji operatorske norme matrice $A \otimes I$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|A \otimes I\|_{l^p \to l^p} = \|(A \otimes I)x\|_{l^p} &= \left\| \left( \sum_{i,j} a_{ij} (e_i e_j^\top \otimes I) \right) \left( \sum_{i,j} x_{i,j} (e_i \otimes e_j) \right) \right\|_{l^p} \\
&= \left\| \sum_{i,j,k} a_{ij} x_{j,k} (e_i \otimes e_k) \right\|_{l^p} \\
&= \left\| \sum_{i,k} \left( \sum_j a_{ij} x_{j,k} \right) e_i \otimes e_k \right\|_{l^p} \\
&= \left( \sum_k \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_{j,k} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left( \sum_k \|A\|_{l^p \to l^p}^p \sum_j |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|A\|_{l^p \to l^p}
\end{aligned}$$

□

Time završavamo pregled svojstava Kroneckerovog produkta matrica i prelazimo na definiciju tenzorskog produkta vektorskih prostora.

# 3 Tenzorski produkt vektorskih prostora

Koristeći tenzorski produkt matrica možemo sada definirati tenzorski produkt proizvoljnih konačnodimenzionalnih vektorskih prostora. Naime, zbog toga što je svaki konačno dimenzionalni realni vektorski prostor izomorfan sa $\mathbb{R}^n$ definiciju tenzorskog produkta proizvoljnih vektorskih prostora prenijet ćemo sa prostora matrica $M^{n,1}(\mathbb{R})$.

**Definicija 3.** Neka su $U$ i $V$ konačno dimenzionalni prostori nad $\mathbb{R}$ dimenzija $m$ i $n$ respektivno. Neka su $\phi : U \to M^{m,1}(\mathbb{R})$ i $\psi : V \to M^{n,1}(\mathbb{R})$ izomorfizmi prostora. Definiramo:

$$u \otimes v := \phi(u) \otimes \psi(v),$$

a vektorski prostor $M^{mn,1}(\mathbb{R})$ tada nazivamo **tenzorskim produktom** vektorskih prostora $U$ i $V$ i označavamo ga s $U \otimes V$.

Iako je gornja definicija ovisna o konkretnom izboru baze zbog toga što smo izomorfizmima odredili elemente koji se slikaju u elemente kanonske baze za $M^{m,1}(\mathbb{R})$ i $M^{n,1}(\mathbb{R})$, to kod računanja nije problem pa često izostavljamo zapis po kojim izomorfizmima smo definirali tenzorski produkt budući da su svi ovako definirani tenzorski produkti međusobno izomorfni (zbog toga što su svi izomorfni sa $M^{mn,1}(\mathbb{R})$). Dodatno, znamo iz linearne algebre da je za konkretno računanje u vektorskim prostorima ionako najčešće potrebno izabrati konkretne baze tako da svo računanje zapravo možemo pomoću te baze prenijeti na $\mathbb{R}^n$ i raditi s Kroneckerovim produktom matrica ukoliko želimo biti potpuno formalni.

**Propozicija 7.** Neka su $U$ i $V$ konačno dimenzionalni vektorski prostori i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tada za $u, u_1, u_2 \in U$ i $v_1, v_2, v \in V$ vrijedi:

1. $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \otimes v = \alpha u_1 \otimes v + \alpha_2 u_2 \otimes v$
2. $u \otimes (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha u \otimes v_1 + \alpha_2 u \otimes v_2$
3. $u \otimes 0 = 0 \otimes v = 0$, gdje 0 označava nulvektor u odgovarajućem prostoru.
4. Ako su $(u_i)_{i=1}^m$ i $(v_j)_{j=1}^n$ baze prostora $U$ i $V$ respektivno, tada je $(u_i \otimes v_j)_{i,j=1}^{m,n}$ baza prostora $U \otimes V$. Obratno, ako je $(u_i \otimes v_j)_{i,j=1}^{m,n}$ baza za $U \otimes V$, tada su $(u_i)_{i=1}^m$ i $(v_j)_{j=1}^n$ baze prostora $U$ i $V$.

*Dokaz.* Prva tri svojstva slijede direktno iz izomorfizma i definicije Kroneckerovog produkta. Dokažimo četvrto svojstvo. Označimo sa $(\tilde{u}_i)_{i=1}^m$ i $(\tilde{v}_j)_{j=1}^n$ baze prostora $U$ i $V$ koje se po odabranim izomorfizmima slikaju u kanonske baze za $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$, označimo $u_i = \sum_k \alpha_{i,k} \tilde{u}_k$ i $v_j = \sum_k \beta_{j,k} \tilde{v}_k$. Konačno, označimo matrice $A = [\alpha_{i,k}]$ i $B = [\beta_{j,k}]$. Vektori $u_i$ i $v_j$ po homomorfizmima $\phi$ i $\psi$ slikaju se u $i$-ti, odnosno $j$-ti stupac matrica $A$ i $B$ zbog $\phi(\tilde{u}_i) = e_i$ i $\phi(\tilde{v}_j) = e_j$ . Po 4. svojstvu teorema 1 tada je

$$\phi(u_i) \otimes \psi(v_j) = (Ae_i) \otimes (Be_j) = (A \otimes B)(e_i \otimes e_j).$$

Međutim, sada po svojstvu 1 teorema 4 slijedi da je $A \otimes B$ regularna matrica ako i samo ako su obje matrice $A$ i $B$ regularne. S druge strane, iz linearne algebre znamo da vektori $(u_i)_{i=1}^m$ i $(v_j)_{j=1}^n$ čine baze prostora $U$ i $V$ ako i samo ako su matrice $A$ i $B$ regularne pa tvrdnja slijedi. $\square$

Sljedeća propozicija nam kaže da u slučaju da su $U$ i $V$ unitarni, na tenzorskom produktu $U \otimes V$ možemo definirati skalarni produkt kompatibilan sa skalarnim produktima na prostorima.

**Propozicija 8.** Neka su $U$ i $V$ unitarni prostori sa skalarnim produktima $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ respektivno. Tada je sa:

$$\langle \sum_i \alpha_i u_i \otimes v_i, \sum_j \beta_j u'_j \otimes v'_j \rangle := \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle u_i, u'_j \rangle_U \langle v_i, v'_j \rangle_V$$

zadan skalarni produkt na $U \otimes V$.

*Dokaz.* Zbog toga što se isti element u $U \otimes V$ može prikazati na više načina, kao na primjer $(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$, potrebno je najprije dokazati dobru definiranost gornjeg izraza. Međutim, odaberemo li za $U$ i $V$ baze koje se slikaju u kanonske baze od $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ po izomorfizmima iz definicije tenzorskog produkta i zapišemo li sve $u_i, u'_j, v_i, v'_j$ u tim bazama, zbog svojstva 2 teorema 1 dobijemo dobru definiranost.

Svojstva skalarnog produkta provjerimo direktno iz definicije. $\square$

Promotrimo i povezanost dualnog prostora tenzorskog produkta i tenzorskog produkta dualnih prostora.

**Propozicija 9.** Neka su $U$, $V$ konačnodimenzionalni vektorski prostori i $U'$, $V'$ njihovi dualni prostori. Tada je $U' \otimes V' \cong (U \otimes V)'$ uz kanonski izomorfizam $\phi : U' \otimes V' \to (U \otimes V)'$ zadan na elementarnim tenzorima s:

$$[\phi(u' \otimes v')](u \otimes v) := u'(u)v'(v), \quad u \in U', v \in V', u' \in U, v' \in V.$$

*Dokaz.* Dobra definiranost na elementarnim tenzorima dokaže se kao u prethodnoj propoziciji. Kako linearna kombinacija elementarnih tenzora razapinje tenzorski produkt $\phi$ je dobro zadan na cijelom prostoru i djelovanje funkcionala $\phi(u' \otimes v')$ je dobro definirano na cijelom $U \otimes V$.

Neka su sad $(e_i)_{i=1}^m$ i $(f_j)_{j=1}^n$ baze vektorskih prostora $U$ i $V$ respektivno. tada su dualne baze $(e_i^*)_{i=1}^m$ i $(f_j^*)_{j=1}^n$ baze za $U'$ i $V'$ pa je $(e_i^* \otimes f_j^*)_{i,j=1}^{m,n}$ baza za $U' \otimes V'$. Djelovanjem na elemente baze od $U \otimes V$, $(e_i \otimes f_j)_{i,j=1}^{m,n}$ vidimo da je $(\phi(e_i^* \otimes f_j^*))_{i,j=1}^{m,n}$ linearno nezavisna familija funkcionala. Prema tome, po teoremu o rangu i defektu, $\phi$ je izomorfizam prostora. $\square$

**Napomena.** Zbog gornje propozicije, kad god ne uvodimo dvosmislenost, za $u' \in U'$ i $v' \in V'$ sa $u' \otimes v'$ označavat ćemo element duala $(U \otimes V)'$ čije je djelovanje na elementarnim tenzorima dano gornjom propozicijom.

Povežimo konačno tenzorski produkt sa bilinearnim formama s kojima smo započeli. Sljedeća lema formalizacija je uvodnih opservacija o bilinearnim formama.

**Teorem 10.** *Neka su $U$ i $V$ vektorski prostori nad $\mathbb{R}$. Za bilinearnu formu $\Lambda : U \times V \to \mathbb{R}$ postoji jedinstven linearan operator $\lambda \in (U \otimes V)'$ takav da za sve $u \in U$ i $v \in V$ vrijedi:*

$$\Lambda(u, v) = L(u \otimes v).$$

*Ako su* $(e_i)_{i=1}^m$ *i* $(f_j)_{j=1}^n$ *baze prostora* $U$ *i* $V$ *respektivno, a* $(e_i^*)_{i=1}^m$ *i* $(f_j^*)_{j=1}^n$ *dualne baze tim bazama, tada je*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Lambda(e_i, f_j) \cdot (e_i^* \otimes f_j^*),$$

*gdje smo* $(e_i^* \otimes f_j^*)$ *poistovjetili s elementom iz* $(U \otimes V)'$ *kao u prethodnoj napomeni.*

*Obratno, za svaki funkcional* $\lambda \in (U \otimes V)'$ *postoji jedinstvena bilinearna forma* $\Lambda : U \times V \to \mathbb{R}$ *zadana s:*

$$\Lambda(u, v) = \lambda(u \otimes v).$$

*Kako su oba preslikavanja linearna, to znači da postoji izomorfizam vektorskih prostora bilinearnih formi na* $U \times V$ *i linearnih funkcionala na prostoru* $U \otimes V$*).*

*Dokaz.* Neka su $(e_i)_{i=1}^m$ i $(f_j)_{j=1}^n$ baze prostora $U$ i $V$ respektivno. Zbog toga što je $(e_i \otimes f_j)_{i,j=1}^{m,n}$ baza prostora $U \otimes V$, možemo zadati $\lambda \in (U \otimes V)'$ na elementima baze kao

$$\lambda(e_i \otimes f_j) := \Lambda(e_i, f_j).$$

Tada za proizvoljne $u \in U$ i $v \in V$ dane s $u = \sum_i u_i e_i$ i $v = \sum_j v_j f_j$ vrijedi:

$$\Lambda(u, v) = \sum_{i,j} u_i u_j \Lambda(e_i, f_j) = \sum_{i,j} u_i v_j \lambda(e_i \otimes f_j) = \lambda \left( \sum_{i,j} (u_i e_i) \otimes (v_j f_j) \right) = \lambda(u \otimes v)$$

Druga tvrdnja sad slijedi naprosto iz zapisa $\lambda$ u dualnoj bazi $((e_i \otimes f_j)^*)_{i,j=1}^{m,n}$ i poistovjećivanja $e_i^* \otimes f_j^*$ i $(e_i \otimes f_j)^*$ kao u prethodnoj napomeni. □

Dakle, bilinearne forme na produktu prostora prikazali smo pomoću linearnih funkcionala na tenzorskom produktu. Međutim, stvarna važnost navedenog pristupa vidi se u mogućnosti generalizacije ovog pristupa. Naime, zbog asocijativnosti Kroneckerovog produkta gornji račun jednostavno se generalizira na proizvoljnu multilinearnu formu.

**Teorem 11.** *Neka je* $\Lambda : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}$ *n-multilinearna forma. Tada postoji jedinstveni element iz* $\lambda \in (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)'$ *takav da sve vektore* $u_1, \ldots, u_n$ *vrijedi:*

$$\Lambda(u_1, \ldots, u_n) = \lambda(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)$$

*posebno, vrijedi:*

$$\lambda = \sum_{i_1, \ldots i_n} \Lambda(e_{i_1}, \ldots e_{i,n}) e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^*$$

*Obratno, za svaki funkcional* $\lambda \in (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)'$ *postoji jedinstvena multilinearna forma* $\Lambda : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}$ *zadana s:*

$$\Lambda(u_1, \ldots, u_n) = \lambda(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n).$$

*Kako su oba preslikavanja linearna, to znači da postoji izomorfizam vektorskih prostora multilinearnih formi na* $U_1 \times \cdots \times U_n$ *i linearnih funkcionala na prostoru* $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$*).*

*Dokaz.* Kao i u prošlom dokazu vidimo da možemo zadati funkcional $\lambda$ na elementima baze $(e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)})_{i_1,\ldots,i_n=1}^{k_1,\ldots,k_n}$ za prostor $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ budući da navedeni produkt predstavlja matrice koje samo na jednom mjestu imaju jedinicu. Dokaz je sada potpuno analogan prethodnom teoremu □

Prethodni teorem nam kaže da multilinearnu formu možemo promatrati kao linearan funkcional na vektorskom prostoru koji je tenzorski produkt vektorskih prostora domena multilinearne forme. To nam omogućava da koristimo rezultate iz linearne algebre i za multilinearne forme pa napokon možemo odgovoriti na pitanje s početka - kada možemo proizvoljno zadati vrijednosti multilinearne forme na nekoj familiji uređenih $n$-torki vektora.

**Korolar 12.** Neka su $U_1, \ldots, U_n$ vektorski prostori i $k = \prod_{j=1}^{n} \dim(U_j)$. Neka je $(u_i^{(1)}, \ldots u_i^{(n)})_{i=1}^{k}$ familija uređenih $n$-torki vektora takvih da je $u_i^{(j)} \in U_j$ za sve $i, j$. Tada za svaki niz realnih brojeva $(c_i)_{i=1}^{k}$ postoji multilinearna forma $\Lambda : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}$ takva da je:

$$\Lambda(u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(n)}) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots k$$

ako i samo ako je familija $(u_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_i^{(n)})_{i=1}^{k}$ linearno nezavisna. Ako su $\tilde{u}_i^{(j)}$ vektor stupci koeficijenata uz vektore baze od $u_i^{(j)}$ u prostoru $U_j$, to je ekvivalentno s tvrdnjom da je matrica

$$\left[\tilde{u}_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_1^{(n)} \quad \cdots \quad \tilde{u}_k^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_k^{(n)}\right]$$

punog ranga.

*Dokaz.* Ekvivalenciju ranga matrice vektor stupaca i linearne nezavisnosti vektor stupaca znamo s linearne algebre.

Po prethodnom teoremu postojanje multilinearne forme ekvivalentno je postojanju linearnog funkcionala na tenzorskom produktu za koji vrijedi:

$$\lambda(u_j^{(1)} \otimes \cdots \otimes u_j^{(n)}) = c_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k,$$

što je pomoću zapisa operatora u bazi ekvivalentno s postojanjem rješenja jednadže

$$x^\top \left[\tilde{u}_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_1^{(n)} \quad \cdots \quad \tilde{u}_k^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_k^{(n)}\right] = [c_1, \ldots, c_k].$$

Sa linearne algebre znamo da ta jednadžba ima rješenje za za proizvoljni niz $(c_i)_{i=1}^{k}$ ako i samo ako je dana matrica regularna. □

Budući da smo tenzorski produkt uveli vrlo operativnom definicijom, koristeći činjenicu da je svaki linearni funkcional prikaziv matricom, sljedeći teorem povezuje teorem kojim direktna je posljedica definicije i svojstva 4 teorema 1 i prethodnog teorema.

**Teorem 13.** *Neka su $U_i, V_i, = 1, 2, \ldots, n$ vektorski prostori i neka su $(e_{i,j})_j$ i $(f_{i,j})_j$ baze za $U_i$ i $V_i$ respektivno. Za $u_i \in U_i$ označimo sa $\tilde{u}_i$ vektor stupac koeficijenata od $u_i$ u bazi za $U_i$. Za linearne operatore $K_i : U_i \to V_i$ označimo sa $\tilde{K}_i$ matrice tih operatora u paru* *napisanih baza. Ako je $\Lambda : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$ multilinearna forma, tada postoji matrica $\lambda \in M^{1,\dim(V_1)\ldots\dim(V_n)}(\mathbb{R})$ tako da vrijedi:*

$$\Lambda(K_1u_1, \ldots, K_nu_n) = \lambda(\tilde{K}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{K}_n)(\tilde{u}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{u}_n),$$

*gdje su produkti $\otimes$ na desnoj strani kroneckerovi produkti matrica.*

*Dokaz.* Djelovanje funkcionala na prostoru dimenzije $\dim(V_1)\ldots\dim(V_n)$ u određenoj bazi dano je djelovanjem matrice iz $M^{1,\dim(V_1)\ldots\dim(V_n)}(\mathbb{R})$ na vektor stupac koeficijenata elementa. Po svojstvu 4 teorema 1 slijedi tvrdnja. □

## 3.1 Općeniti tenzorski produkt

U ovom odjeljku skicirat ćemo standardnu algebarsku konstrukciju tenzorskog produkta proizvoljnih vektorskih prostora neovisnu o dimenziji i bazi prostora koju smo htjeli izbjeći na početku.

Neka su sada $U$ i $V$ proizvoljni vektorski prostori (čak ne nužno konačno dimenzionalni). Želimo definirati tenzorski produkt na takvim prostorima koji će zadržati svojstva koja smo dobili definicijom pomoću kroneckerovog produkta. Prvi problem je pitanje što je uopće element $u \otimes v$ za proizvoljne vektore $u \in U$ i $v \in V$ i u kojem skupu se nalazi. Dodatno, ako želimo da operacija $\otimes$ zadovoljava neka prirodna svojstva bilinearnosti, onda je nužno da elementi $u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$ i $(u_1 + u_2) \otimes v$ predstavljaju isti objekt.

Formalna konstrukcija ide ovako. Za proizvoljne vektorske prostore $U$ i $V$ definirajmo skup konačnih linearnih kombinacija uređenih parova $[u, v]$ na sljedeći način:

$$F(U, V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [u_i, v_i], k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in U, v_i \in V \right\}.$$

Uz zbrajanje definirmo na način da zbrajamo skalare uz iste simbole i množenje skalarom definirano kao množenje skalara pred simbolom lako provjerimo da je navedeni skup vektorski prostor koji nazivamo **slobodni vektorski prostor**.

Time smo definirali neki skup u kojemu postoje elementi oblika $[u, v]$, ali vidimo da navedeni skup ima problem koji smo spomenuli na početku - elementi $[u_1, v] + [u_2, v]$ i $[u_1 + u_2, v]$ različiti su elementi tog skupa. Da bismo popravili konstrukciju, definirajmo skup svih "osnovnih" operacija kojima želimo poistovjećivati elemente, a to su operacije koje slijede iz svojstva bilinearnosti koje želimo očuvati. U tu svrhu definiramo sljedeći skup.

$$\begin{aligned} S(U, V) =& \{[u_1, v] + [u_2, v] - [u_1 + u_2, v] : u_1, u_2 \in U, v \in V\} \\ &\cup \{[u, v_1] + [u, v_2] - [u, v_1 + v_2] : u \in U, v_1, v_2 \in V\} \\ &\cup \{[\alpha u, v] - \alpha[u, v] : u \in U, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &\cup \{[u, \alpha v] - \alpha[u, v] : u \in U, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Knačno, sa $E(U, V)$ označimo skup svih konačnih linearnih kombinacija simbola iz $S(U, V)$:

$$E(U, V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i, k \in \mathbb{N}, f_i \in S \right\}.$$

Lako se vidi da je $E(U,V)$ vektorski prostor i da je $E(U,V) \leq F(U,V)$ pa sljedeća definicija ima smisla.

**Definicija 4.** Kvocijent vektorskih prostora $F(U,V)/E(U,V)$ nazivamo **tenzorskim produktom** skupova $U$ i $V$ i označavamo ga s $U \otimes V$. Za $u \in U$ i $v \in V$ simbol $u \otimes v$ definiramo kao:

$$u \otimes v := [u,v] + E(U,V).$$

Prethodna konstrukcija vrlo je općenita jer ne zahtjeva ni konačnu dimenzionalnost prostora i neovisna je o bazi. Međutim, zahtjeva izlete u beskonačno dimenzionalne slobodne vektorske prostore kako bi se konstruirao element $u \otimes v$. Također, zbog toga što je definicija potpuno algebarska, pitanja $l^p$ ograničenosti i dalje ovise o specifičnom izboru baze i esencijalno se svedu na račune iz prethodnog odjeljka. Stoga nećemo dublje ulaziti u proučavanje općenitog tenzorskog produkta već nam je za primjene dovoljno znati da postoji općenita definicija. Zainteresirani čitatelj može pogledati formalnu konstrukciju u [Lan02].

# 4 Primjene

U ovom odjeljku pokazat ćemo napokon primjenu prethodnih teorijskih razmatranja na konkretne probleme koji se pojavljuju u raznim područjima matematike.

## 4.1 Hadamardove matrice

U ovom odjeljku proučit ćemo određeni tip matrica koji se prirodno pojavljuje u mnogim primjenama.

**Definicija 5.** Matricu kojoj su svi koeficijenti iz skupa $\{-1,1\}$, a stupci međusobno ortogonalni nazivamo *Hadamardovom matricom.*

Prvo prirodno pitanje je je li moguće da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji Hadamardova matrica reda $n$, ali vidjet ćemo da je to nemoguće.

**Propozicija 14.** Ako za $n \in \mathbb{N}$ postoji Hadamardova matrica reda $n$, tada $4|n$.

*Dokaz.* Ako je $H_n$ Hadamardova matrica, tada množenjem stupca sa $-1$ i permutiranjem stupaca matrica ostaje Hadamardova pa pomnožimo sa $-1$ sve stupce $h_j$ za koje je koji u prvom retku imaju $h_{1j} = -1$. Kako je svaki redak u novoj matrici ortogonalan na prvi, a u prvom retku su sve jedinice, da bi to bilo moguće, svaki redak osim prvog mora imati točno $n/2$ elemenata jednakih 1 i točno $n/2$ elemenata jednakih $-1$. Permutirajmo stupce tako da dobivena matrica sada ima oblik:

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ h_{3,1} & \dots & h_{3,\frac{n}{2}} & h_{3,\frac{n}{2}+1} & \dots & h_{3,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{n,1} & \dots & h_{n,\frac{n}{2}} & h_{n,\frac{n}{2}+1} & \dots & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Iz ortogonalnosti $m$-tog reda na prvi i drugi redak, za svaki $m \geq 3$ vrijedi:

$$0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} h_{m,j} + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} h_{m,j}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} h_{m,j} - \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} h_{m,j}\right) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} h_{m,j}$$

Odatle zaključujemo da suma $\frac{n}{2}$ brojeva iz skupa $\{-1, 1\}$ mora biti jednaka 0, a to je moguće samo ako je među njima točno $\frac{n}{4}$ brojeva jednakih 1 i $-1$. Dakle, $4|n$. □

Pitamo se za koje $n \in \mathbb{N}$ znamo konstruirati Hadamardovu matricu reda $n$, međutim pitanje postojanja Hadamardove matrice reda $n = 4k$ za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ otvoren je problem. Najmanji $n$ za koji se u ovom trenutku ne zna Hadamardova matrica, prema wikipediji je $n = 668$.

U nastavku donosimo jednostavnu konstrukciju Hadamardove matrice reda $2^k$. U tu svrhu dokažimo najprije sljedeću lemu.

**Lema 15.** Ako su $H_m$ i $H_n$ Hadamardove matrice reda, tada je i $H_m \otimes H_n$ Hadamardova matrica reda $mn$.

*Dokaz.* Iz definicije Kroneckerovog produkta vidimo da su svi elementi matrice $H_m \otimes H_n$ jednaki $\pm 1$, a iz svojstava 4 i 5 u prvom teoremu slijedi:

$$(H_m \otimes H_n)^*(H_m \otimes H_n) = (H_m^* \otimes H_n^*)(H_m \otimes H_n) = (H_m^* H_m \otimes H_n^* H_n) = (mI_m) \otimes (nI_n) = mnI_{mn}$$

□

Prema prethodnoj lemi slijedi da je rekurzivno zadani niz:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H_{2^{k+1}} = H_2 \otimes H_{2^k}$$

zapravo niz Hadamardovih matrica reda $2^k$.

## 4.2 Dekompozicije likova i tijela

**Primjer 1.** Dokažite da se pravokutnik sa stranicama $a$ i $b$ može particionirati u konačno mnogo kvadrata ako i samo ako je $a/b \in \mathbb{Q}$.

*Rješenje.* Neka je početni pravokutnik $[0, a] \times [0, b]$ i neka je neka je $(x_i, y_i)_{i=1}^N$ skup svih vrhova svih kvadrata u pravokutniku. Promotrimo vektorski prostor

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\{x_i, y_i : i = 1, 2, \ldots, N\}).$$

Kako mu je sustav izvodnica konačan, $V$ je konačno dimenzionalan vektorski prostor pa mu možemo konstruirati tenzorski produkt pomoću Kroneckerovog produkta i po volji odabrane baze (ovo navodimo samo da pokažemo da korištenje aksioma izbora koji je nužan za konstrukciju baze od $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$ nije nužno u zadatku). Ako je proizvoljan pravokutnik $[x_0, x_m] \times [y_0, y_n]$ particioniran na pravokutnike oblika $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ t.d. je $x_0 < \cdots < x_m$, $y_0 < \cdots < y_n$, tada je

$$\begin{aligned}(x_n - x_1) \otimes (y_n - y_1) &= \left(\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_{i-1})\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_{j-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \otimes (y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

Pretpostavimo sad da je pravokutnik $[0, a] \times [0, b]$ podijeljen na $n$ kvadrata, $(K_i)_{i=1}^n$, sa stranicama duljine $(c_i)_{i=1}^n$, podijelimo veliki pravokutnik svim pravcima na kojima leži neka stranica kvadrata $K_i$, tada korištenjem gornje formule najprije za raspis sume po svim malim pravokutnicima koji nastanu te zatim grupiranjem po onim pravokutnicima koji u uniji čine neki $K_i$ vidimo da vrijedi:

$$a \otimes b = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c_i.$$

Ako je $a/b \notin \mathbb{Q}$, to znači da su $a$ i $b$ linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$ pa postoji linearni funkcional $l \in V'$ takav da je $l(a) = 1$ i $l(b) = -1$. Tada za $l \otimes l \in V' \otimes V'$ iz gornjeg identiteta vrijedi:

$$-1 = l(a)l(b) = (l \otimes l)(a \otimes b) = (l \otimes l)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(l \otimes l)(c \otimes c) = \sum_{i=1}^{n}(l(c_i))^2$$

gdje smo u prvoj i zadnjoj jednakosti poistovjetili $\mathbb{R}$ sa $1 \times 1$ matricama te koristili pravila za matrični produkt. Dakle, dobili smo da je $-1$ jednak sumi kvadrata i to je očita kontradikcija. Dakle, ako se pravokutnik može particionirati na konačno kvadrata, mora vrijediti $a/b \in \mathbb{Q}$. S druge strane, ako je $a/b \in \mathbb{Q}$, tada postoji $x \in \mathbb{R}$ te $p, q \in \mathbb{N}$, takvi da je $(p, q) = 1$ i tako da vrijedi $a = px$, $b = qx$. Međutim, to znači da pravokutnik možemo podijeliti na $pqx^2$ kvadrata sa stranicom duljine $x$. $\square$

Elementarnim geometrijskim opservacijama može se pokazati da za svaka dva poligona koji imaju istu površinu vrijedi da se jedan može isjeći na konačno komada i presložiti ih tako da se dobije drugi poligon (zadatak za DZ). Hilbert je postavio pitanje vrijedi li analogna tvrdnja u 3 dimenzije, tj. ako dva poliedra imaju isti volumen, može li se uvijek jedan isjeći na konačno komadića i presložiti tako da dobijemo drugi. Odgovor je negativan, a ideja dokaza je slična prethodnom teoremu.

**Primjer 2** (Dehnova invarijanta)**.** Postoje poliedri $P$ i $Q$ takvi da se $P$ ne može rastaviti u konačan broj manjih poliedara i presložiti ih tako da čine poliedar $Q$.

*Rješenje.* Za poliedar $P$ označimo sa $M_P$ skup svih kuteva među susjednim stranicama poliedra i dodajmo u skup $\pi$. Neka je $f$ linearan funkcional nad vektorskim prostorom $\mathbb{R}$ nad

$\mathbb{Q}$ takav da je $f(\pi) = 0$. (kao i prije možemo zapravo raditi na konačnom proširenju da izbjegnemo korištenje aksioma izbora). Definirajmo *Dhenovu invarijantu* kao:

$$D(f, P) = \sum_{e \in P} (l \otimes f)(e \otimes \alpha(e))$$

gdje je $e$ brid poliedra P, $l(e)$ funkcional koji je jednak duljini brida $e$, a $\alpha(e)$ kut među stranicama koje se sastaju u $e$.

**Teorem 16.** *Neka je $P$ poliedar sa kutevima $\alpha_1, \dots \alpha_m$ i $\beta_1, \dots, \beta_n$ respektivno koji isiječemo u poliedre $P_1, \dots, P_n$. Ako je $f$ linearan funkcional na konačnom proširenju od $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ takav da je $f(\pi) = 0$, tada je*

$$D(f, P) = \sum_{i=1}^{n} D(f, P_i)$$

*Dokaz.* Definirajmo "masu" brida $e$ kao:

$$m(e, f) = l(e) \cdot f(\alpha(e))$$

Kako je $P$ dekomponiran u $P_1, \dots, P_n$, pogledajmo uniju svih bridova svih komada $P_i$. Ako je $e'$ neki od bridova od $P$, tada je suma diedralnih kuteva po $P_i$-evima koji se sastaju u $e'$ jednaka diedralnom kutu od $P$ u $e'$ Ako je neki $e'$ sadržan u stranici od $P$, tada je suma svih diedralnih kuteva od $P_i$ koji se sastaju u $e$ jednaka $\pi$ pa je masa takvog brida jednaka 0 te ako je $e$ brid koji se nalazi unutar $P$, tada je suma svih diedralnih kuteva od $P_i$ jednaka $2\pi$ pa je opet masa takvog brida jednaka 0. Prema tome, Dehnova invarijanta je invarijanta dekomponiranja. □

Prema prethodnom teoremu sad je dovoljno naći dva poliedra koji imaju različite Dehnove invarijante za neke $\mathbb{Q}$-linearne funkcije $f$ da bismo pokazali da se jedna ne može dekomponirati i presložiti u drugi. Dokazat ćemo da su kocka i pravilni tetraedar dobar izbor.

Neka je $P$ kocka. Kako je svaki diedralni kut kocke jednak $\pi/2$, za svaki $\mathbb{Q}$ - linearan funkcional $f$ za koji je $f(\pi) = 0$ vrijedi $f(\pi/2) = f(\pi)/2 = 0$. Prema tome Dehnova invarijanta kocke jednaka je $D(f, P) = 0$ za svaki $\mathbb{Q}$-linearni funkcional $f$ za koji je $f(\pi) = 0$.

S druge strane, ako je $Q$ pravilni tetraedar sa duljinama stranice 1, svaki diedralni kut jednak mu je $\arccos \frac{1}{3}$. Pokažemo li da su $\arccos \frac{1}{3}$ i $\pi$ linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, tada možemo odabrati linearni funkcional $f$ takav da je $f(\pi) = 0$ i $f(\arccos \frac{1}{3}) = 1$ te za takav $f$ vrijedi

$$D(f, Q) = 6 \cdot l(e) \cdot f(\arccos \frac{1}{3}) = 6 \neq 0.$$

**Lema 17.** Skup $\{\arccos \frac{1}{3}, \pi\}$ je linearno nezavisan nad $\mathbb{Q}$.

*Dokaz.* Označimo $\theta := \arccos \frac{1}{3}$. Pretpostavimo da je $\theta = \frac{m}{n}\pi$, tada bismo imali $\cos(n\theta) = \pm 1$. Ako je $T_n(x)$ $n$-ti Čebiševljev polinom, tada je $T_n(\cos(\theta)) = n \cos \theta$. Znamo da $n$-ti Čebiševljev polinom za $n \geq 2$ ima vodeći član jednak $2^{n-1}$ i da je to polinom sa cjelobrojnim koeficijentima (lako se vidi indukcijom) pa uz gornje pretpostavke vrijedi:

$$\pm 1 = T_n(\frac{1}{3}) = 2^{n-1}\frac{1}{3^n} + r(\frac{1}{3})$$

gdje je $\deg r \leq n-1$. Množeći obje strane sa $3^n$ dobivamo:

$$3^n = 2^{n-1} + 3^n r(\frac{1}{3}).$$

Budući da je stupanj od $r$ manji od $n-1$, drugi član s desne strane djeljiv je s 3 pa dobivamo kontradikciju. $\square$

Konačno, iz gornje leme slijedi da su $\arccos\frac{1}{3}$ i $\pi$ linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$ i time smo završili dokaz teorema. $\square$

## 4.3 Ograničenost operatora

**Primjer 3** (Miklos Schweitzer 2010.). Postoji li niz $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ i:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{kn}}{k}\right)^2 = +\infty?$$

*Rješenje.* Budući da navedeni zadatak zahtjeva znanje koje ova skripta ne obuhvaća, rješenje će biti sažetije zapisano od prethodnih budući da se podrazumijeva da je iskusniji čitatelj upoznat sa potrebnim pojmovima. Neka je $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ operator zadan beskonačnom matricom:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Pitanje se tada može preformulirati u: postoji li niz $a \in l^2(\mathbb{N})$ takav da je $\|Ta\|_{l^2} = +\infty$. Označimo sa $\mathbb{P}$ skup svih prostih brojeva. Shvatimo li formalno prostor $l^2$- ograničenih nizova, $l^2(\mathbb{R})$ kao beskonačni tenzorski produkt prostora

$$l^2(\mathbb{R}) \cong \bigotimes_{p\in\mathbb{P}} l^2(\mathbb{R})$$

gdje izometrički izomorfizam konstruiramo na sljedeći način. Ako je rastav na proste faktore od $n$ dan s:

$$n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p}, \quad k_p \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

(gornji produkt je efektivno konačan jer je $k_p = 0$ za sve dovoljno velike $p$) tada poistovjetimo

$$e_n \cong \bigotimes_{p\in\mathbb{P}} e^{(p)}_{k_p}$$

gdje je $e_n$ $n$-ti kanonski vektor u početnom prostoru, a $e^{(p)}_k$ je $k$-ti kanonski vektor u $p$-tom prostoru. Formalno, to je tenzorski produkt Hilbertovih prostora, ali u detelje nećemo ulaziti u ovom predavanju.

Neka je $T_p$ operator na $p$-tom prostoru dan beskonačnom matricom:

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2} & \frac{1}{p^3} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Primijetimo da uz gornji zapis za $n$ dan s (2) vrijedi:

$$Te_n = (\bigotimes_{p\in\mathbb{P}} T_p)\left(\bigotimes_{p\in\mathbb{P}} e^{(p)}_{k_p}\right)$$

Kako je $T_p$ zapravo operator konvolucije s $v_p = (1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots)$, njegova $l^2 \to l^2$ norma jednaka je $\|v_p\|_{l^1(\mathbb{N})} = \frac{p}{p-1}$ (ocjena slijedi iz nejednakosti Minkowskog, a maksimalnost se vidi po nizu $(1, z_p, z_p^2, \dots)$ za $z_p \to 1$). Po analogonu teorema 6 očekujemo da je

$$\|T\|_{l^2\to l^2} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{p}{p-1} = e^{\sum_{p\in\mathbb{P}} \ln\left(1+\frac{1}{p-1}\right)} > e^{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}} = +\infty.$$

pa da bismo formalizirali dokaz, zbog beskonačnosti produkta imitirajmo dokaz teorema 6. Neka je $x \in \mathbb{N}$ proizvoljan i za svaki $p \le x$ neka je $z_p \in (0,1)$. Promotrimo niz koji odgovara elementu

$$\bigotimes_{p\le x}\left(\sum_{j_p=1}^{k_p} z_p^{j_p} e^{(p)}_{j_p}\right) \otimes \bigotimes_{p>x} e^{(p)}_0 = \sum_{p\le x}\sum_{j_p=1}^{k_p} \bigotimes_{p\le x}(z_p^{j_p} e^{(p)}_{j_p}) \otimes \bigotimes_{p>x} e^{(p)}_0$$

U prijevodu, to je niz $a = (a(n))_{n=1}^{\infty}$ koji ima nenul elemente na pozicijama $n \in \mathbb{N}$ oblika $n = \prod_{p\le x} p^{k_p}$, za $k_p \in \mathbb{N}_0$ i za takav $n$ vrijedi $a(n) = \prod_{p\le x} z_p^{k_p}$. Očito je takav niz totalno multiplikativan (vrijedi $a(km) = a(k)a(m)$ za sve $k, m \in \mathbb{N}$) pa vrijedi:

$$[Ta](n) = a(n)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(k)}{k} = a(n)\prod_{p\le x}\sum_{j_p=1}^{\infty}(\frac{z_p}{p})^{j_p} = a(n)\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{z_p}{p}}.$$

Neka je sad $M$ proizvoljan realan broj. Po računu znamo da postoji $x$ takav da je $\prod_{p\le x}\frac{p}{p-1} > M$. Odaberimo sad $z_p$-ove dovoljno blizu 1 tako da je $\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{z_p}{p}} = \prod_{p\le x}\frac{p}{p-z_p} = M$. Tada vrijedi

$$T(a) = M \cdot a$$

i $\|a\|_{l^2} < \infty$ jer je $a$ konačan tenzorski produkt $l^2$ nizova.

Dakle, za svaki $M \in \mathbb{N}$ znamo da možemo odabrati niz $a^{(M)}$ takav da je $\|a\|_{l^2} = 1$ i $Ta^{(M)} = Ma^{(M)}$. Definirajmo $a = \sum_{n\geq 1} \frac{a^{4^n}}{2^n}$. Po nejednakosti trokuta dobivamo da je $\|a\|_{l^2} \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = 1$. Nadalje, zbog toga što je $T$ zadan matricom sa pozitivnim elementima, za svaki $n$ vrijedi:

$$Ta > T(\frac{a^{(4^n)}}{2^n}) = 2^n a^{(4^n)},$$

iz čega slijedi

$$\|Ta\|_{l^2} > 2^n \|a^{(4^n)}\|_{l^2} = 2^n.$$

Dakle, $\|Ta\|_{l^2} = \infty$, što smo i htjeli dokazati. □

## 4.4 "Tensor power trick"

Tensor power trick obuhvaća široku klasu trikova koji se ukratko mogu opisati na sljedeći način. Ako za izraze $X$ i $Y$ vrijedi nejednakost $X \leq CY$ i ako iz toga možemo zaključiti da to povlači $X^M \leq CY^M$ za sve $M \in \mathbb{N}$, tada vrijedi i $X \leq Y$ zbog toga što možemo uzeti $M$-ti korijen i pustiti $M \to \infty$. Tehniku ćemo pokazati najprije na vrlo jednostavnom primjeru preuzetom iz [Kov19].

### 4.4.1 AG nejednakost

**Propozicija 18.** Za $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

*Dokaz.* Primijetimo najprije da vrijedi:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^n \geq n! a_1 \ldots a_n.$$

Naime, u raspisu lijeve strane, izraz $a_1 \ldots a_n$ u produktu dobit ćemo na točno $n!$ načina - tako da iz svake zagrade biramo različit $a_i$.

Indukcijom se lako vidi da je $n! \geq (\frac{n}{4})^n$ pa korištenjem navedene ocjene i uzimanjem $n$-tog korijena slijedi:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq 4 \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \tag{3}$$

Navedena ocjena je očito slabija od onoga što smo htjeli dobiti, ali tu koristimo sljedeći trik. Za proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definiramo:

$$G(v) := |v_1 \ldots v_n|^{\frac{1}{n}} \quad \text{i} \quad A(v) := \frac{|v_1| + \cdots + |v_n|}{n}.$$

Ocjena 3 povlači $G(v) \leq 4A(v)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $v \in \mathbb{R}^n$. Neka su sada $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ proizvoljni. Definiramo $a := (a_1, \ldots, a_n)$ i promotrimo vektor $a^{\otimes k} \in \mathbb{R}^{n^k}$. Za njega se lako pokaže da vrijedi:

$$G(a^{\otimes k}) = (a_1 \ldots a_n)^{\frac{k}{n}} \quad \text{i} \quad G(a^{\otimes k}) = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^k$$

pa korištenjem ocjene 3 slijedi:

$$G(a) = \left(G(a^{\otimes k})\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(4A(a^{\otimes k})\right)^{\frac{1}{k}} = 4^{\frac{1}{k}} A(a).$$

Puštanjem $k \to \infty$ slijedi $G(a) \leq A(a)$, što je i trebalo dokazati. □

### 4.4.2 Ocjena na broj skoro ortogonalnih vektora

Primjer u ovom odjeljku preuzet je iz [Tao13].

Prirodno u matematici želimo oslabiti pretpostavke teorema, ali i dalje pokušati dobiti iste ili barem slične zaključke. Zbog takvih potreba uveden je pojam skoro - ortogonalnosti. Naime, u raznim primjenama očekujemo da se skoro - ortogonalni vektori ponašaju slično kao i ortogonalni. Definirajmo formalno.

**Definicija 6.** Za fiksan $\varepsilon \geq 0$ kažemo da su vektori $v, w \in \mathbb{R}^d$ *$\varepsilon$-skoro ortogonalni* ukoliko je $|\langle v, w\rangle| \leq \varepsilon$.

Budući da se u $\mathbb{R}^d$ može nalaziti najviše $d$ ortogonalnih vektora, prirodno je zapitati se koliko najviše može postojati jediničnih $\varepsilon$-skoro ortogonalnih vektora u $\mathbb{R}^d$. Za $\varepsilon \geq 1$ iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti za svaka dva jedinična vektora $u, v$ vrijedi $|\langle u, v\rangle| \leq 1$ pa je skup svih jediničnih vektora 1-skoro ortogonalan. Zanima nas kako se ponaša ocjena u ovisnosti o $d$ i $\varepsilon$. Sljedeća lema daje prvu netrivijalnu ocjenu.

**Lema 19.** Neka je $\varepsilon < 1$ i neka su $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$ jedinični vektori takvi da je $|\langle v_i, v_j\rangle| \leq \varepsilon$ za sve $i \neq j$. Tada vrijedi:

$$n \leq \left[1 + \left(\frac{2}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^d.$$

*Dokaz.* Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, za $i \neq j$ vrijedi:

$$\|v_i - v_j\| = \left(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2\langle v_i, v_j\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2 - 2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Odatle slijedi da su kugle oko $v_i$-jeva radijusa pola njihove međusobne udaljenosti disjunktne, tj. familija $\{K(v_i, (\frac{1-\varepsilon}{2})^{\frac{1}{2}})\}_{i=1}^n$ je familija disjunktnih kugala i sve se nalaze unutar kugle $K(0, 1 + (\frac{1-\varepsilon}{2})^{\frac{1}{2}})$ pa kako je volumen kugle u $\mathbb{R}^d$ radijusa $r$ jednak $c_d r^d$, uz konstantu $c_d > 0$, slijedi

$$nc_d \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^{\frac{d}{2}} \leq c_d \left[1 + \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^d,$$

iz čega slijedi rezultat. □

Navedeni rezultat univerzalna je, ali vrlo slaba ocjena kad je $\varepsilon$ mali. Na primjer, za $\varepsilon = 0$, tj. kad su vektori ortogonalni, iz prethodne leme dobijemo ocjenu $n \leq (1 + \sqrt{2})^d$ iako znamo da vrijedi $n \leq d$ iz linearne nezavisnosti. Također i svaka ocjena za $\varepsilon > 0$ je slabija od navedene eksponencijalne ovisnosti o $d$. Sljedeća lema daje značajno ojačanje ocjene za male $\varepsilon$.

**Lema 20.** Neka je $\varepsilon < d^{-\frac{1}{2}}$ i neka su $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ jedinični vektori takvi da je $|\langle v_i, v_j \rangle| \leq \varepsilon$ za sve $i \neq j$. Tada vrijedi:

$$n \leq \frac{d(1-\varepsilon^2)}{1-d\varepsilon^2}.$$

Posebno, za $\varepsilon = \frac{1}{2}d^{-\frac{1}{2}}$ slijedi:

$$n < 2d$$

*Dokaz.* Označimo sa $G \in M^n(\mathbb{R})$ Gramovu matricu skalarnih produkata vektora, tj. $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^n$ i sa $V \in M^{d\times n}$ matricu $V := [v_1 \ \dots \ v_n]$. Tada vrijedi $G = V^\top V$ pa iz prethodne dekompozicije od $G$ i dimenzija od $V$ slijedi:

$$r(G) \leq r(V) \leq d.$$

Zbog toga što su $v_i$ jedinični vektori, slijedi da $\mathrm{tr}(G) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle = n$. Nadalje, zbog toga što je $G$ realna i simetrična, može se dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi pa ako su $(\lambda_i)_{i=1}^n$ svojstveni vektori od $G$, iz zapisa u bazi u kojoj je matica dijagonalna lako se vidi da je $\mathrm{tr}(G) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2$. Konačno, zbog ocjene na $r(G) \leq d$ slijedi da je najviše $d$ svojstvenih vrijednosti različito od 0 pa iz ocjene u uvjetu zadatka i Cauchy-Schwarzove nejednakosti vrijedi:

$$n + n(n-1)\varepsilon^2 \geq \sum_{i,j=1}^n |\langle v_i, v_j \rangle|^2 = \mathrm{tr}(G^\top G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \frac{1}{d}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \frac{1}{d}(\mathrm{tr}\, G)^2 = \frac{n^2}{d}.$$

Dakle, vrijedi:

$$n + n(n-1)\varepsilon^2 \geq \frac{n^2}{d}$$

i odatle sređivanjem izraza slijedi tvrdnja. $\square$

Ocjena u prethodnoj lemi asimptotski je zadovoljavajuća za $\varepsilon = \frac{1}{2}d^{-\frac{1}{2}}$ kad $d \to \infty$. Naime, kako su ortogonalni vektori ujedno i $\frac{1}{2}d^{-\frac{1}{2}}$-skoro ortogonalni, možemo naći $d$ vektora koji su $\varepsilon$-skoro ortogonalni, što je u skladu sa ocjenom iz leme koja kaže da je $n \leq O(d)$. Kako gornja ocjena eksplodira za $\varepsilon \to d^{-\frac{1}{2}}$, potreban je novi trik za proširenje ocjene za $\varepsilon \geq \frac{1}{2}d^{-\frac{1}{2}}$. U tu svrhu koristimo tensor power trik. Primjena trika na analogan način kao u prethodnom primjeru može se "riješiti konstante" $\frac{1}{2}$ i dati ocjenu za $\frac{1}{2}d^{-\frac{1}{2}} \leq \varepsilon < d^{-\frac{1}{2}}$, međutim to ostavljamo kao zadatak za zadaću i u nastavku dokazujemo nešto jaču lemu koja pametnije koristi strukturu tenzorske potencije vektora i dat će ocjenu u većem rasponu.

**Lema 21.** Neka su $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ jedinični vektori takvi da je $|\langle v_i, v_j \rangle| \leq 2^{-\frac{1}{k}}\binom{d+k-1}{k}^{-\frac{1}{2k}}$ za sve $i \neq j$. Tada vrijedi:

$$n < 2\binom{d+k-1}{k}.$$

*Dokaz.* Za dane vektore $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ promotrimo $v_1^{\otimes k}, \dots, v_n^{\otimes k}$. Za $v \in \mathbb{R}^d$ označimo li koordinatni raspis kao $v = \sum_{j=1}^n v(j)e_j$, vrijedi:

$$v^{\otimes k} = \left(\sum_{j=1}^d v(j)e_j\right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{j=1}^d v(j)e_j\right) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^d v(j_1)\dots v(j_k)e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}.$$

Iz gornjeg zapisa vidimo da su koeficijenti uz elemente $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}$ koji u tenzorskom produktu imaju isti broj svih vektora baze $e_1, \dots, e_d$ jednaki. Konkretno, koeficijent uz element baze tenzorskog produkta koja ima $r_i$ puta ponovljen element $e_i$ za $i = 1, 2, \dots, d$ jednak je $v(1)^{r_1} \cdots v(d)^{r(d)}$. Zapišimo formalno navedenu opservaciju. Za uređenu $k$-torku $(i_1, \dots, i_k)$ brojeva iz skupa $\{1, \dots d\}$ označimo

$$T^k_{r_1,\dots,r_d} = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in S^k_{r_1,\dots,r_d}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k},$$

gdje je $S^k_{r_1,\dots,r_d}$ skup svih $k$-torki brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, d\}$ takvih da sadrže točno $r_i$ brojeva $i$ za sve $i = 1, 2 \dots, d$. Prema tome, kako svaki vektor $v^{\otimes k}$ nalazi se u potprostoru razapetom tenzorima $T^k_{r_1,\dots,r_d}$, gdje $(r_1, \dots, r_d)$ ide po svim $d$-torkama nenegativnih brojeva kojima je suma jednaka $k$. Taj prostor označava se sa $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{R}^d)$. Kako takvih $d$-torki ima $\binom{k+d-1}{d}$, zaključujemo da su svi $v_i^{\otimes k}$ elementi vektorskog prostora dimenzije $\binom{k+d-1}{d}$. Konačno, kako je:

$$|\langle v_i^{\otimes k}, v_j^{\otimes k}\rangle| = |\langle v_i, v_j\rangle|^k \leq \frac{1}{2}\binom{d+k-1}{k}^{-\frac{1}{2}},$$

iz leme 20 slijedi tvrdnja. $\square$

U praksi je poesbno interesantna ocjena za $\varepsilon = O(d^{-\frac{1}{2}})$ pa je sljedeći teorem iskazan na način da se naglasi ojačanje ocjene .

**Teorem 22** (Kabatjanskii-Levenstein). *Neka je $\frac{1}{2} \leq A \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$ i neka su $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ jedinični vektori takvi da je $|\langle v_i, v_j\rangle| \leq Ad^{-\frac{1}{2}}$ za sve $i \neq j$. Tada vrijedi:*

$$n \leq (CA^{-2}d)^{CA^2}.$$

*Dokaz.* Za dani $A$ tražimo što manji $k$ tako da vrijedi:

$$Ad^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{-\frac{1}{k}}\binom{d+k-1}{k}^{-\frac{1}{2k}}$$

Koristeći redom ocjene $\binom{d+k-1}{k} \leq \frac{(d+k-1)^k}{k!}$, $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$ i $2^{-\frac{1}{k}} \geq 2^{-\frac{1}{2}}$ za $k \geq 2$ slijedi:

$$2^{-\frac{1}{k}}\binom{d+k-1}{k}^{-\frac{1}{2k}} \geq 2^{-\frac{1}{k}}(d+k-1)^{-\frac{1}{2}}(k!)^{\frac{1}{2k}} \geq 2^{-\frac{1}{k}}(d+k-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}} \geq (d+k-1)^{-\frac{1}{2}}(2e)^{-\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}},$$

iz čega slijedi, nakon kvadriranja i sređivanja izraza da je dobar svaki $k$ za koji vrijedi

$$k \geq \frac{2eA^2(d-1)}{d-2eA^2}.$$

Međutim, iz uvjeta teorema slijedi da je $A^2 \leq \frac{d}{9}$, možemo odabrati $k := \lfloor \alpha A^2 \rfloor$, gdje je $\alpha = (\frac{1}{2e} - \frac{1}{9})^{-1}$, ali njegova eksplicitna vrijednost nije važna. Lema 21 uz ocjene kao ranije za odabrani $k$ impliciraju:

$$n < 2\binom{d+k-1}{k} \leq \frac{e^k(d+k-1)^k}{k^k} \leq \left[e\alpha^{-1}\left(1+\frac{2\alpha}{9}\right)d\right]^{2\alpha A^2},$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz ocjena $\alpha A^2 \leq k \leq \frac{2\alpha}{9}d$, tvrdnja zadatka slijedi odabirom $C$ da bude jednak većoj od dvije konstante u gornjem raspisu. □

Gornji teorem nam kaže da broj vektora u $\mathbb{R}^d$ koji su $Ad^{-\frac{1}{2}}$-skoro ortogonalni nalaze u $\mathbb{R}^d$ može biti rasti najviše polinomijalno brzo u ovisnosti o $d$ i pitamo se je li to optimalan rezultat, tj. je li moguće da ocjena zapravo linearno raste po $d$. Odgovor je, pomalo iznenađujuće, da je ocjena zapravo asimptotski dobra. Naime može se pokazati (u što nećemo ulaziti u ovom predavanju zbog korištenja dubokih rezultata) da za proizvoljan $K \geq 1$ postoje $C_1, C_2 > 0$ takvi da u $\mathbb{R}^d$ možemo izabrati $C_1 d^K$ vektora koji su $C_2 d^{-\frac{1}{2}}$- skoro ortogonalni. Za više detalja pogledati [Tao13].

# 5 Zadaci

1. Neka su $u, v \in \mathbb{R}^n$ linearno nezavisni vektori. Dokažite da ne postoje $a$ i $b$ takvi da je $u \otimes v - v \otimes u = a \otimes b$.

2. Neka su $A$ i $B$ mnogokuti iste površine. Dokažite da je za neki $n \geq 1$ moguće $A$ rastaviti na trokute $T_1, \ldots, T_n$ i presložiti te trokute tako da čine mnogokut $B$.

3. Niz matrica $A_n$ zadan je rekurzivno:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{bmatrix}$$

   Dokažite da $A_n$ ima $n+1$ različitih cjelobrojnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ sa multiplicitetom $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ respektivno.

   *Uputa.* Iskoristite teorem o spektru Kroneckerovog produkta.

4. Neka je $A = [a_1, \ldots, a_n]$ matrica gdje su $a_i$ vektor stupci.

   (a) Dokažite da vrijedi:

$$|\det A| \leq \|a_1\|_2 \cdots \|a_n\|_2$$

   te odredite slučaj jednakosti.

   *Uputa.* Svedite na slučaj kada su stupci norme 1 i zapišite determinantu pomoću svojstvenih vrijednosti matrice.

(b) Koristeći prvi dio dokažite da vrijedi:

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}} \|a_1\|_\infty \cdots \|a_n\|_\infty$$

te odredite slučaj jednakosti kad je $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Neka je $\frac{1}{2} \leq A < 1$ i neka su $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$ jedinični vektori takvi da je $|\langle v_i, v_j \rangle| \leq Ad^{-\frac{1}{2}}$ za sve $i \neq j$. Dokažite da vrijedi

$$n < 2d^C, \quad C = \lceil -(\log_2 A)^{-1} \rceil$$

*Uputa.* Iskoristite tensor power trik kao u dokazu AG nejednakosti i lemu 20.

6. Neka je $A \in M^n(\mathbb{R})$ realna matrica takva da je $a_{ii} = 1$ i $|a_{ij}| \leq \varepsilon$ za sve $i \neq j$. Dokažite da za rang matrice $A$ vrijedi

$$r(A) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1 + (n-1)\varepsilon^2}.$$

Posebno, za $\varepsilon \leq n^{-\frac{1}{2}}$ slijedi $r(A) \geq \frac{n}{4}$.

*Uputa.* Koristeći dokaz leme 20 dokažite najprije da za simetrične matrice vrijedi ocjena: $r(A) \geq \frac{n}{1+(n-1)\varepsilon^2}$ i zatim svedite problem na simetrične matrice.

# Literatura


[Lan02] Serge Lang. *Algebra.* Graduate text in mathematics. Springer-Verlag New York, 2002.

[Tao13] Terence Tao. *A cheap version of the Kabatjanskii-Levenstein bound for almost orthogonal vectors.* 2013. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2013/07/18/a-cheap-version-of-the-kabatjanskii-levenstein-bound-for-almost-orthogonal-vectors/`.

[Kov19] Vjekoslav Kovač. *Dokazivanje nejednakosti korištenjem simetrija.* 2019. URL: `https://amas.pmfst.unist.hr/amsd/show_paper.php?id=24`.