Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2022./2023.
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/

Tema br. 5:

Fourierova analiza na natjecanjima

Adrian Beker, Aleksandar Bulj

1 Fourierovi redovi - uvod i motivacija

Razmislimo li koje sve glatke 2π - periodične funkcije znamo, nakon nešto razmišljanja, došli bismo do funkcija $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, kako je linearna kombinacija 2π - periodičnih funkcija opet 2π - periodična, dobivamo vektorski prostor konačnih kombinacija trigonometrijskih funkcija koji ćemo označavati sa:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{1}\} \cup \{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(kx) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Prirodno pitanje je je li konačnodimenzionalan i možemo li mu odrediti neku bazu? Nadalje, postoji li neka (neprekidna/glatka) 2π - periodična funkcija koja nije u tom prostoru?

Koristeći trigonometrijske identitete za prevođenje produkta u sumu, lako vidimo da vrijede sljedeći identiteti.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}\\
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{N},\ k \neq l\\
&\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{N}\\
&\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{1}$$

Dakle, definiramo li skalarni produkt na skupu Riemann - integrabilnih funkcija na $[0, 2\pi]$ sa:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

vidimo da su sve funkcije u $\mathcal{T}$ u parovima ortogonalne. Odatle odmah slijedi i linearna nezavisnost funkcija u $\mathcal{T}$. Naime, ako je $f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx))$ konačna linearna kombinacija za koju vrijedi $f(x) = 0$ za sve $x \in [0, 2\pi]$, tada iz gornjih računa za $k \geq 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(a_0 \cos(kx) + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx)\cos(kx) + b_j \sin(jx)\cos(kx)) \right) dx \\
&= \pi a_k.
\end{aligned}$$

te analognim računom dobijemo da su svi koeficijenti jednaki 0.

Dakle, span($\mathcal{T}$) je beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, a skup $\mathcal{T}$ čini ortogonalnu bazu. Navedene opservacije daju poprilično dobru karakterizaciju prostora span($\mathcal{T}$), ali prostor konačnih linearnih kombinacija možemo prirodno povezati prirodno sa poznatijim prostorom konačnih linearnih kombinacija - polinomima u jednoj varijabli.

Naime, iskoristimo li identitete:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

zaključujemo da svaku funkciju u span($\mathcal{T}$) možemo prikazati $\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}$, odnosno u obliku $e^{-inx}P(e^{ix})$ za neki polinom P stupnja najviše $2n$. Dakle, "namatanjem" intervala $[0, 2\pi)$ na kružnicu, zaključujemo da je svaka funkcija iz span($\mathcal{T}$) jednaka vrijednosti na kružnici neke funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika $f(z) = z^{-n}P(z)$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i neki polinom P.

Time smo zapravo potpuno okarakterizirali navedeni vektorski prostor pa tako možemo i naći i funkcije koje se ne nalaze u span($\mathbb{T}$) (zadatak za zadaću), ali ostaje pitanje koje smo sve funkcije mogli dobiti da smo umjesto konačnih suma promatrali sume oblika:

$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Joseph Fourier (1768. - 1830.) mislio da se svaka funkcija može razviti u red gornjeg oblika, ali iako to nije istina, njegove opservacije su se pokazale toliko interesantnima i korisnima u raznim područjima matematike da su pokrenule cijelo područje matematike, koje je i danas aktivno - harmonijsku analizu.

1.1 Teorijski rezultati

Važna napomena. Budući da točkovni limes Riemann integrabilnih funkcija ne mora biti Riemann integrabilna funkcija i Riemannov integral nije u pravom smislu definiran za neograničene funkcije, za proučavanje Fourierovih redova esencijalan je bio razvoj Lebesguove mjere i Lebesgueovog integrala. Zbog toga u iskazima teorema koristimo L^p prostore, ali zbog primjerenosti predavanja mlađim studentima, **svaki $L^p([0,1])$ prostor ćemo tumačiti kao prostor Riemann integrabilnih funkcija** i tvrdnje dokazivati za njih.

Zbog ljepših normalizacija, koje ćemo uskoro vidjeti, u ovom odjeljku promatrat ćemo 1 - periodične funkcije umjesto 2π - periodičnih, ali svi rezultati se mogu analogno reformulirati i za 2π - periodične promatranjem $\tilde{f}(x) = f(2\pi x)$.

Kako je 1 - periodična funkcija potpuno definirana vrijednostima na $[0,1)$, često se periodične funkcije shvaćaju kao funkcije definirane na torusu $\mathbb{T}$, što je skup $[0,1)$ koji uz zbrajanje definirano sa $x \oplus y := \{x+y\}$ (gdje je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$) čini grupu.

U želji za što manje apstrakcije, u daljnjem tekstu ćemo oznaku $\mathbb{T}$ koristiti u sljedećem kontekstu:

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ predstavlja 1 - periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$ sa vrijednostima u $\mathbb{C}$.
- $\int_{\mathbb{T}} f$ označava integral 1 - periodične funkcije f po bilo kojem intervalu duljine 1. Naime, ako je f 1- periodična, tada za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $\int_a^{1+a} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ pa je definicija dobra.

U nastavku ćemo trebati integrale kompleksnih funkcija pa navedimo jednostavnu definiciju tog integrala.

Definicija 1. Nadalje, za $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiramo integral funkcije kao zbroj integrala realnog i kompleksnog dijela:

$$\int_0^1 f(x)dx := \int_0^1 \Re(f(x))dx + i\int_0^1 \Im(f(x))dx$$

Kako bismo mjerili sličnost funkcija, uvodimo sljedeće funkcije norme.

Definicija 2. Za $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ definiramo:

$$\|f\|_u = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

te ako je f integrabilna, za $1 \le p < \infty$ definiramo:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Radi kraćeg zapisa, kad se prostor po kojem integriramo podrazumijeva, pišemo samo $\|f\|_p$.

Za prvu funkciju se lako provjeri da zadovoljava svojstva norme, dok za drugu nejednakost trokuta nije očita. To je sadržaj sljedećeg teorema

Teorem 1 (Nejednakost Minkowskog)**.** *Za integrabilne funkcije* $f, g \in L^p([0,1])$ *vrijedi:*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Nastavljamo sa razvojem Fourierovih redova. Primijetimo da se uz definiciju

$$e_n(x) := e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

svi identiteti iz (1) mogu sažeti u

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

U prijevodu, koristeći kompleksne identitete, zaključujemo da je $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormirana baza prostora konačnih linearnih kombinacija 1 - periodičnih trigonometrijskih funkcija $\{\sin(2\pi k x), \cos(2\pi k x) : k \in \mathbb{N}_0\}$. Zbog jednostavnog identiteta (2) ćemo u nastavku koristiti navedenu bazu umjesto trigonometrijskih funkcija.

Definicija 3. Za $f \in L^1(\mathbb{T})$ uvodimo oznaku

$$\widehat{f}(n) := \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

za projekciju funkcije f na e_n.

Činjenicu da je e_n ortonormirana baza možemo zapisati na način da za svaku linearnu kombinaciju 1-periodičnih trigonometrijskih funkcija postoji dovoljno velik n takav da vrijedi

$$f = \sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e_j.$$

Uvedimo oznake za parcijalne sume reda funkcija.

Definicija 4. Za $f \in L^1([0,1])$ definiramo sljedeće operatore parcijalnih suma

$$S_n[f](x) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}$$

i sljedeći operator prosjeka prvih parcijalnih suma

$$\sigma_n[f](x) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j[f](x) = \sum_{|j| \leq n+1} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}.$$

Uskoro će biti jasno zbog čega je drugi operator važan, ali vać po Cesaro - Stolzovom teoremu znamo da ako za neki $x \in [0,1]$ postoji $\lim_{n \to \infty} S_n[f](x)$, onda postoji i $\lim_{n \to \infty} \sigma_n[f](x)$ pa zaključujemo da je konvergenciju druge sume lakše (ili barem jednako teško) dokazati.

Uvedimo sljedeću važnu operaciju na funkcijama.

Definicija 5 (Konvolucija)**.** Za $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ definiramo funkciju $f * g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sa

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{T}} f(y)g(x-y)dy$$

Promotrimo sada ekvivalentne zapise gornjih operatora.

Lema 2. *Za $f \in L^1(\mathbb{T})$ vrijedi:*

$$S_n[f](x) = f * D_n(x) \quad i \quad \sigma_n[f](x) = f * F_n(x),$$

gdje su

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \quad i \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \tag{3}$$

funkcije koje nazivamo Dirichletovom i Fejerovom jezgrom.

Dokaz. Zapišemo li po definiciji $\widehat{f}(n)$, tada vrijedi

$$S_n[f](x) = \sum_{j=-n}^{n} \int_0^1 f(y)e^{2\pi ij(x-y)}dx = \int_0^1 \sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi ij(x-y)} f(y)dy$$

Izlučivanjem $e^{-2\pi inx}$ i korištenjem sume geometrijskog niza dobijemo:

$$\sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi ijx} = e^{-2\pi inx}\frac{e^{2\pi i(2n+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1} = \frac{e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-2\pi i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

i time je dokazana prva jednakost.

Za drugu jednakost, koristeći gore izvedenu formulu za Dirichletovu jezgru i teleskopiranjem izraza:

$$\sin(t)\sin((2j+1)t) = \frac{\cos(2jt) - \cos((2j+2)t)}{2}$$

uz $t = \pi x$, dobivamo

$$\sum_{j=0}^{n} D_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1-\cos((2n+2)\pi x)}{2\sin^2(\pi x)} = \left(\frac{\sin((n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$$

pa vrijedi:

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(y)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_n(x-y)dy = f * F_n(x),$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Važno svojstvo konvolucije je to da u frekvencijskoj domeni predstavljaju množenje koeficijenata.

Lema 3. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Tada vrijedi $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$*

Dokaz. Iz Fubinijevog teorema i zamjene varijabli $x - y \to z$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} f * g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x-y) g(y) dy e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-y) e^{-2\pi i n (x-y)} dx g(y) e^{-2\pi i y} dy = \int_{\mathbb{T}} \widehat{f}(n) g(y) e^{-2\pi i y} dy \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

□

Alternativni dokaz. Dokaz za konačne kombinacije elemenata baze možemo vidjeti i jednostavnije. Neka su $f(x) = \sum_{j=-m}^{m} a_j e^{2\pi i j x}$ i $g(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{2\pi i k x}$. Tada korištenjem identiteta (2) vrijedi:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{j,k} a_j b_k e^{2\pi i j (x-y)} e^{2\pi i k y} dy = \sum_{k,j} a_j b_k e^{2\pi i j x} \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i (k-j) y} dy = \sum_{j} a_j b_j e^{2\pi i j x}.$$

Sada se iz desne strane iščitaju Fourierovi koeficijenti. □

Nastavimo sa tehničkom lemom o aproksimaciji integrabilnih funkcija neprekidnima. Navedena lema vrijedi za sve L^p norme za $p \in [1, \infty)$, ali predavač nije upoznat sa dokazom koji ne koristi neku varijantu Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji za $p > 1$.

Lema 4. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{T})$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g takva da je $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, $M := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Po definiciji gornje Darbouxove sume postoji particija $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ i funkcija $h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j \mathbb{1}_{[x_j, x_j+1)}$, gdje je $M_j := \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$ koja odgovara nekoj gornjoj Darbouxovoj sumi za koju vrijedi

$$\int_0^1 h(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 h(x) dx.$$

Po definiciji funkcije h vrijedi $f(x) \leq h(x)$ pa tvrdimo da možemo definirati funkciju g kao modifikaciju funkcije h tako spojimo visine M_{j-1} i M_j na malim okolinama točke x_j, a da integral ne povećamo za više od $\frac{\varepsilon}{2}$ ukupno.

To napravimo na sljedeći način Ako je $M_{j-1} < M_j$, onda možemo funkciju h na intervalu $[x_j - \delta_j, x_j]$ zamijeniti pravcem koji spaja točke $(x_j - \delta_j, M_{j-1})$ i (x_j, M_j), dok u slučaju $M_{j-1} > M_j$ modificiramo analogno funkciju desno od x_j. Konačno, moramo paziti i da je $g(0) = g(1)$ pa modificiramo funkciju h na okolini 0 ili 1 na isti način kao i ranije, samo za brojeve M_N i M_0.

Gore navedenim postupkom integral funkcije povećamo za sumu površina trokuta od kojih svaki ima površinu $\delta_j M$ pa odabirom dovoljno malog δ_j oko svake točke x_j, tako da vrijedi $\sum_j \delta_j M < \frac{\varepsilon}{2}$ dobivamo funkciju g za koju vrijedi $f(x) \leq g(x)$ i

$$0 \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx < \int_0^1 h(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_0^1 f(x)dx < \varepsilon.$$

□

Lema 5 (Riemann - Lebesgueova lema). *Za* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *vrijedi* $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju za neprekidne funkcije. Zbog $e^{\pi i} = -1$ vrijedi

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi inx}dx = -\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi in(x-\frac{1}{2n})}dx$$

pa uzimanjem prosjeka gornja dva integrala i korištenjem nejednakosti trokuta dobijemo

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\left|f(x) - f\left(x - \frac{1}{2n}\right)\right|dx.$$

Sa analize znamo da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu uniformno neprekidna. Prema tome, ako primijenimo tvrdnju na malo veći skup od $[0,1]$, npr. $[-1/2, 3/2]$, zaključujemo da za svaki dovoljno velik n i za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$|f(x) - f(x - \frac{1}{2n})| < \varepsilon$$

pa iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ nakon integriranja slijedi tvrdnja.

Ako je sada f proizvoljna Riemann integrabilna funkcija, tada po prethodnoj lemi postoji neprekidna funkcija g takva da je $\int_{\mathbb{T}}|f-g| < \frac{\varepsilon}{2}$ pa vrijedi:

$$|\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| = \left|\int_{\mathbb{T}}(f(x) - g(x))e^{-2\pi i\xi x}dx\right| \leq \int_{\mathbb{T}}|f(x) - g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odabirom proizvoljnog $\varepsilon > 0$ i korištenjem prethodnog dijela dokaza, znamo da je $\widehat{g}(n) < \frac{\varepsilon}{2}$ čim je n dovoljno velik. Iz nejednakosti trokuta i prethodne ocjene zaključujemo da čim je n dovoljno velik, vrijedi

$$|\widehat{f}(n)| < |\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| + |\widehat{g}(n)| < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi tvrdnja. □

Sljedeća lema ključni je rezultat ovog predavanja.

Teorem 6 (Fejerov teorem). *Ako je funkcija* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *neprekidna u točki* $x \in \mathbb{T}$, *tada* $\sigma_n[f](x) \to f(x)$. *Ako je dodatno* $f \in C(\mathbb{T})$, *tada je konvergencija uniformna, tj. vrijedi* $\sigma_n[f] \xrightarrow{u} f$.

Dokaz. Fejerova jezgra zadovoljava sljedećea svojstva:

(S1) $\int_0^1 F_n(x)dx = 1.$

(S2) $F_n(x) \geq 0$, za sve $x \in [0,1]$

(S3) Za $\delta > 0$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(x)dx = 0.$$

Prvo svojstvo slijedi iz jednadžbe (2) i definicije:

$$\int_0^1 F_n(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x) \right) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 D_j(x)dx = 1.$$

Drugo svojstvo slijedi iz (3), dok za treće svojstvo primijetimo da iz iste jednadžbe i ocjene $\sin(t) \geq \frac{\pi}{2}t$ za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (koja je posljedica konkavnosti funkcije sinus na $[0, \frac{\pi}{2}]$) slijedi

$$F_n(x) \leq \frac{C}{(n+1)x^2}, x \in [0, \frac{1}{2}]$$

pa vrijedi:

$$\int_{(-\delta,\delta^c)} F_n(x)dx \leq \frac{2C}{n+1} \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{C}{n+1} \left(\frac{1}{\delta} - 2 \right).$$

pa puštanjem $n \to \infty$ slijedi tvrdnja.

Za dokaz prve tvrdnje teorema odaberemo $\delta > 0$ tako da je $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $y \leq \delta$. Označimo i $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
|\sigma_n[f](x) - f(x)| &= \left| \int_0^1 (f(x-y) - f(x)) F_n(y) dy \right| \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy + \int_{(-\delta,\delta)^c} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 F_n(y) dy + M \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(y) dy \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + M \int_{(-\delta,\delta)^c} F_n(y) dy
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom redu koristili svojstvo S2, u drugom nejednakost trokuta i svojstvo S1. Konačno, koristeći svojstvo S3 zaključujemo da je posljednji izraz manji od ε čim je n dovoljno velik.

Dokaz druge tvrdnje je isti samo primijetimo da u slučaju neprekidne funkcije možemo odabrati $\delta > 0$ neovisno o x budući da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $\mathbb{T}$ uniformno neprekidna. $\square$

Napomena. U prethodnom rezultatu nismo mogli promatrati promatrati $S_n[f]$ umjesto $\sigma_n[f]$ jer jezgra od S_n ne zadovoljava svojstva S2 i S3, a može se pokazati (ali iz) da postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red ne konvergira u proizvoljnoj točki, recimo $x = 0$.

Sljedeći teorem djelomično odgovara na početno pitanje o razvoju funkcija u beskonačnu sumu umjesto konačne.

Teorem 7 (Parsevalov teorem). *Neka je $f \in L^2(\mathbb{T})$, tada vrijedi*

$$\|f - S_n[f]\|_{L^2} \to 0.$$

Posebno, to znači

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

Napomena. Dokaz koji prestavljamo dokazuje tvrdnju samo za $f \in C(\mathbb{T})$ umjesto za Riemann integrabilne funkcije jer svaki dokaz kojeg je autor svjestan općenitije funkcije zahtjeva neki oblik Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Dokaz. Suma u drugom dijelu iskaza je suma pozitivnih brojeva pa ne ovisi o poretku sumiranja i limes postoji. Označimo

$$S := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} |\widehat{f}(j)|^2.$$

Iz ortonormiranosti funkcija e_j slijedi

$$\sum_{j=-n}^{n} |\widehat{f}(j)|^2 = \|S_n[f]\|_2^2 \quad \text{i} \quad \langle f - S_n[f], S_n[f]\rangle = 0$$

pa iz definicije od S i Pitagorinog poučka u obliku

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n[f]\|_2^2 + \|S_n[f]\|^2.$$

slijedi da su tvrdnje u iskazu teorema ekvivalentne.

Dokažimo da je $\lim_{n\to\infty}\|f - S_n[f]\|_2 = 0$. Iz nejednakosti trokuta vrijedi

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - \sigma_n[f]\|_2 + \|\sigma_n f - S_n[f]\|_2. \tag{4}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, i neka je n_0 t.d. je $S(n_0) =: \sum_{|j|>n_0} |\widehat{f}(j)|^2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Iz Fejerovog teorema postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_1$ vrijedi $\|f - \sigma_n[f]\|_u < \frac{\varepsilon}{3}$ pa slijedi

$$\|f - \sigma_n[f]\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x) - \sigma_n[f](x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f - \sigma_n[f]\|_u \left(\int_0^1 1 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

S druge strane, za $n > n_0$ vrijedi

$$\|\sigma_n f - S_n f\|_2^2 = \sum_{|j|\leq n} \frac{j^2}{n^2}|\widehat{f}(j)|^2 \leq \sum_{|j|\leq n_0} \frac{n_0^2}{n^2}|\widehat{f}(j)|^2 + \sum_{n_0<|j|\leq n} \frac{n^2}{n^2}|\widehat{f}(j)|^2 \leq \frac{n_0^2}{n^2}S + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Biranjem dovoljno velikog n da je $\frac{n_0^2 S}{n^2} < \frac{\varepsilon}{3}$, iz prethodne ocjene i (4) dobivamo da za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|f - S_n[f]\|_2 < \varepsilon,$$

što je i trebalo dokazati. □

Zapišemo li prethodni rezultat neformalno u obliku

$$f(x)" = " \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

to je zapravo rezultat koji smo htjeli na početku, ali uz **važnu napomenu** da konvergencija na desnoj strani nije točkovna nego u smislu da L^2 norma razlike konvergira u 0 .

Da bismo gornju konvergenciju u smislu norme zamijenili točkovnom, potrebno je zahtijevati nešto jači uvjet na glatkoću funkcije. Navodimo samo iskaz jer dokaz ne stignemo napraviti na ovom predavanju.

Teorem 8 (Dirichletov teorem). *Neka je $f \in L^1(\mathbb{T})$ takva da za svaki $x \in \mathbb{T}$ postoje $\lim_{t\to x-} f'(t)$ i $\lim_{t\to x+} f'(t)$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)e^{2\pi ijx} \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

gdje je $f(x+) = \lim_{t\to x+}$ i $f(x-) = \lim_{t\to x-} f(t)$.

Posebno ako je $f \in C^1(\mathbb{T})$, tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)e^{2\pi ijx} = f(x).$$

1.2 Primjene

Kao prvu primjenu navodimo rezultat koji je dio rezultata o ekvidistribuiranosti niza $(\{k\alpha\})_{k\in\mathbb{N}}$ za iracionalan broj α.

Primjer 1. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ iracionalan broj i $f \in C^1([0,1])$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x)dx$$

Rješenje. Dokažimo najprije tvrdnju funkcije f oblika $f(x) = e^{2\pi ijx}$, $j \in \mathbb{Z}$. Kada je $j = 0$, obje strane su jednake 1. Za $j \neq 0$ vrijedi $\int_0^1 f(x)dx = 0$ i zbog toga što je α iracionalan, vrijedi $e^{2\pi ij\alpha} \neq 1$ pa zaključujemo da vrijedi

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\{k\alpha\})\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} e^{2\pi ijk\alpha}\right| = \left|\frac{1-e^{2\pi ij(n+1)\alpha}}{n(1-e^{ij\alpha})}\right| < \frac{2}{n|1-e^{2\pi ij\alpha}|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Nadalje, po linearnosti obje strane jednakosti, tvrdnja vrijedi za sve funkcije f oblika $f(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}$.

Proširimo tvrdnju sada na sve neprekidne funkcije. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo $L_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\{k\alpha\})$ i $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Po Fejerovom teoremu postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $N > N_0$ vrijedi $\|f - \sigma_N[f]\|_u < \frac{\varepsilon}{2}$. Po nejednakosti trokuta za sumu i integral to iznači da za sve n i za sve $N > N_0$ vrijedi

$$|L_n(f - \sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |I(f - \sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po prvom dijelu zadatka, budući da je Fejerova jezgra funkcija navedenog oblika, postoji n_0 takav da za sve $n > n_0$ vijedi $|L_n(\sigma_N[f]) - I(\sigma_N[f])| < \frac{\varepsilon}{2}$ pa koristeći nejednakost trokuta zaključujemo da za sve $n > n_0$ vrijedi:

$$|L_n(f) - I(f)| < |L_n(f - \sigma_N[f]) - I(f - \sigma_n[f])| + |L_n(\sigma_N[f]) - I(\sigma_N[f])| < \varepsilon.$$

□

Primjer 2 (Weierstrassov teorem o aproksimaciji)**.** Za neprekidnu funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji polinom p takav da je $\|p - f\|_u < \varepsilon$.

Dokaz. Promatranjem funkcije $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ zadane s $f_1(x) := f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x)$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $[a,b] = [-1,1]$.

Definirajmo sada funkciju $g : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) := f(\cos(2\pi x)).$$

Ona je očito neprekidna, parna i 1 - periodična. Zbog parnosti funkcije g, vrijedi:

$$\widehat{g}(-n) = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{2\pi inx}dx = \big|x \mapsto -x\big| = \int_{\mathbb{T}} g(-x)e^{-2\pi inx}dx = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi inx}dx = \widehat{g}(n),$$

a zbog toga što je g realna i prethodnog računa slijedi:

$$\overline{\widehat{g}(n)} = \overline{\int_{\mathbb{T}} g(x)e^{-2\pi inx}dx} = \int_{\mathbb{T}} \overline{g(x)e^{-2\pi inx}}dx = \int_{\mathbb{T}} g(x)e^{2\pi inx}dx = \widehat{g}(-n) = \widehat{g}(n)$$

pa zaključujemo da je $\widehat{g}(n) \in \mathbb{R}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Koristeći prethodne opservacije računamo slijedi

$$
\begin{aligned}
\sigma_n[g](x) &= \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)e^{2\pi ijx} \\
&= \widehat{g}(0) + \sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)(e^{2\pi ijx}+e^{-2\pi ijx}) \\
&= \widehat{g}(0) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{g}(j)\cos(2\pi jx).
\end{aligned}
$$

Indukcijom po j se lako vidi da se se funkcija $\cos(jt)$ može zapisati kao polinom stupnja j u varijabli $\cos(t)$, a polinom T_j za koji vrijedi $\cos(jt) = T_j(\cos t)$ zove se Čebiševljev polinom 1. vrste pa iz gornjeg raspisa zaključujemo da postoji polinom p_n stupnja najviše n takav da je

$$\sigma_n[g](x) = p_n(\cos(2\pi x)).$$

Biranjem n dovoljno velikog slijedi da za svaki $x \in [0,1]$, iz teorema 6 slijedi da je

$$\sup_{x\in[0,1]} |g(x) - p(\cos(2\pi x))| < \varepsilon.$$

Prethodno znači posebno i da je $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|f(\cos(2\pi x)) - p(\cos(2\pi x))| < \varepsilon$ pa supstitucijom $y = \cos(2\pi x)$ slijedi $\sup_{y\in[-1,1]}|f(y) - p(y)| < \varepsilon$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sljedeća primjena je dokaz poznatog identiteta.

Primjer 3 (Basel problem)**.** Dokažite da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rješenje. Neka je f definirana kao 1-periodično proširenje funkcije $x \mapsto |x|\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Tada je $\widehat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}xdx = \frac{1}{4}$. Nadalje, budući da je f parna funkcija, to je funkcija $x \mapsto f(x)\sin(2\pi nx)$ neparna pa je njen integral po simetričnom intervalu oko 0 jednak 0. Korištenjem navedene opservacije i parcijalne integracije, slijedi:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|e^{-2\pi inx}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|\cos(2\pi nx) = 2\int_0^{\frac{1}{2}}x\cos(2\pi nx)dx \\
&= x\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\bigg|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi nx)dx \\
&= \frac{-1+\cos(\pi n)}{2\pi^2 n^2} = -\frac{1}{\pi^2 n^2}\mathbb{1}_{2\mathbb{Z}+1}(n)
\end{aligned}
$$

Budući da funkcija zadovoljava uvjete Dirichletovog teorema, primjenom teorema u točki $x = 0$ dobijemo da je $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, ali kako taj teorem nismo dokazali, zbog potpunosti dokaza u nastavku koristimo Fejerov teorem i Cesaro - Stolzov toerem za dokaz navedene tvrdnje.

Koristeći Fejerov teorem za $x = 0$, znamo da je

$$0 = f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n[f](0) = \frac{1}{4} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{2j+1}{2n+1}\right) \frac{1}{\pi^2(2j+1)^2},$$

odnosno ekvivalentno:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{2j+1}{2n+1}\right) \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Označimo li $N = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$ (znamo da limes postoji jer je suma pozitivnih članova), iz Cesaro-Stolzovog teorema i prethodnog računa slijedi:

$$\frac{\pi^2}{8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n}(2n-2j)\frac{1}{(2j+1)^2}}{2n+1} \overset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)^2} = N.$$

Konačno, opservacijom da je

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{S}{4} + N,$$

slijedi da je $S = \frac{4}{3}N = \frac{\pi^2}{6}$.

$\square$

Primjer 4 (Putnam 2020, A6)**.** Neka je

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n+\frac{1}{2}-k}{(n+1)(2k+1)}\right) \sin((2k+1)x).$$

Odredite najmanji $M > 0$ tako da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|f_n(x)| \leq M$.

Rješenje. Primijetimo da je navedeni izraz zapravo $2n+1$-va Cesraova suma Fourierovog reda $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$. Odredimo funkciju f kojoj je to Fourierov red. Po neparnosti je dovoljno odrediti za $x \in [0, \pi]$. Računamo za $0 < x < \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \cos((2k+1)t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin t} dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin(2(n+1)t)dt + \frac{1}{2} \int_0^{(2n+1)x} \frac{\sin(u)}{u} du \end{aligned}$$

Kako je funkcija $t \mapsto (\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t})\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ Riemann integrabilna, po Riemann-lebesgueovoj lemi prvi integral ide u 0, a drugo je poznati integral i jednak je $\frac{\pi}{4}$ (dokaz za zadaću). Dakle, tražena funkcija je $f(x) = \frac{\pi}{4}\mathbb{1}_{(0,\pi)} - \frac{\pi}{4}\mathbb{1}_{(-\pi,0)}$. Sada koristeći svojstva S1 i S2 Fejerove jezgre i ocjenu $|f| \leq \frac{\pi}{2}$, zaključujemo:

$$|f_n(x)| = \left|\int_0^{2\pi} f(x-y)F_{2n+1}(y)dy\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x-y)|F_{2n+1}(y)dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4}F_{2n+1}(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Konačno, budući da je f neprekidna u svim točkama $x \neq k\pi$, iz Fejerovog teorema slijedi da $f_n(x) \to \pm\frac{\pi}{4}$ pa zaključujemo da je $M = \frac{\pi}{4}$ optimalna ocjena.

Napomena. Alternativno rješenje može se naći na `https://kskedlaya.org/putnam-archive/2020s.pdf` □

Primjene završavamo teškim problemom sa IMC-a kojega navedene godine nitko nije riješio, a poznavanje osnovnih pojmova iz Fourierovih redova značajno pomaže u rješenju zadatka.

Primjer 5 (IMC 2009, Day 1 P4)**.** Neka je $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ kompleksni polinom, neka je $1 \geq c_0 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ konveksan niz (takav da vrijedi $c_k \leq \frac{c_{k-1}+c_{k+1}}{2}$ za $k = 1, \ldots, n-1$) i neka je polinom q zadan s:

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + \cdots + c_n a_n z^n.$$

Dokažite da je

$$\sup_{z:|z|\leq 1} |q(z)| \leq \sup_{z:|z|\leq 1} |p(z)|.$$

Rješenje. Zapišemo li $z = re^{2\pi i t}$, vrijedi

$$p(re^{2\pi it}) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{2\pi ikt}, \quad q(re^{2\pi it}) = \sum_{k=0}^{n} c_k a_k r^k e^{2\pi ikt}.$$

Primijeitmo li sada da za fiksan r vrijedi da je k-ti Fourierov koeficijent desne sume, jednak k-tom koeficijentu lijeve sume pomnoženom sa c_k i sjetimo li se da se množenje koeficijenata dobije promatranjem konvolucije funkcija (a za konvoluciju samo smo rekli da je "uprosječivanje" funkcije), to nam sugerira sljedeću jaču formulaciju.

Dokazat ćemo da za svaki $r \in [0,1]$ vrijedi

$$\sup_{t\in[0,1]} |q(re^{2\pi it})| \leq \sup_{t\in[0,1]} |p(re^{2\pi it})|.$$

Primijetimo još da je dovoljno gornju tvrdnju dokazati samo za $r = 1$ zbog supstitucije $\tilde{a_k} := r^k a_k$. Prema tome, označimo li

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{2\pi ikt}, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k a_k e^{2\pi ikt},$$

treba dokazati da je $\|g\|_u \leq \|f\|_u$.

Za funkciju K s kojom trebamo konvoluirati f da bi vrijedilo $\widehat{f * K}(k) = c_k \widehat{f}(k)$ za $k \geq 0$ očito vrijedi $\widehat{K}(k) = c_k$, $k \geq 0$. Međutim, htjeli bismo da K bude realna i, po mogućnosti, nenegativna funkcija da možemo primijeniti nejednakost trokuta za integrale pa onda ima smisla definirati i $\widehat{K}(k) = c_{-k}$ za $k < 0$. Na taj način dobijemo funkciju

$$K(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(e^{2\pi ikt} + e^{-2\pi ikt}) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k(e^{2\pi ikt} + e^{-2\pi ikt}).$$

Ukoliko je $c_k = 1$ za sve k, navedena jezgra je samo D_n i ona nije nenegativna, ali vrijedi $f * D_n = D_n$ pa nam to sugerira da je dobro odvojiti taj izraz.

Skica veličine koeficijenata sugerira nam da postoji niz $(\alpha_k)_{k=0}^{n-1}$ nenegativnih realnih brojeva takav da je $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = 1 - c_n$. Prema tome, postoji rastav

$$K(t) = c_n D_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k F_k(t).$$

Koristeći svojstva Fejerove jezgre S1 i S2, za svaki k vrijedi

$$\|f * F_k\|_u \leq \int_0^1 |f(x-y)| F_k(y) dy \leq \|f\|_u \int_0^1 F_k(y) dy = \|f\|_u.$$

Konačno, tražena nejednakost sada slijedi iz:

$$\|g\|_u = \|f * K\|_u \leq c_n \|f * D_n\|_u + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \|f * F_n\|_u = c_n \|f\|_u + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|f\|_u = 1.$$

Napomena 1. Rastav se formalno, uz oznaku $d_0(t) = 1$, $d_j(t) = e^{2\pi ijt} + e^{-2\pi ijt}$ i opservaciju da je $\sum_{j=0}^{k} d_j(t) = D_k(t)$ može dobiti dvostrukom primjenom Abelove sumacije na način:

$$\begin{aligned}
K(t) &= \sum_{k=0}^{n} c_k d_k(t) = c_n \left(\sum_{k=0}^{n} d_k(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} d_k(t) \\
&= c_n D_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) D_k(t) \\
&= c_n D_n(t) + (c_{n-1} - c_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-2} (c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2}) \sum_{j=0}^{k} D_j(t) \\
&= c_n D_n(t) + (c_{n-1} - c_n) n F_{n-1}(t) + \sum_{k=0}^{n-2} (c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2})(k+1) F_k(t)
\end{aligned}$$

Napomena 2. Student koji zna kompleksnu analizu uočit će da je navedena "jača" formulacija zadatka zbog principa maksimuma modula za holomorfne funkcije zapravo ekvivalentna polaznom zadatku i mogli smo odmah reći da je dovoljno promotriti supremum po z takvima da je $|z| = 1$, ali kako nismo dokazali taj teorem, nismo ga koristili u dokazu. $\square$

2 Diskretna Fourierova analiza

Neka je $(G, +)$ Abelova grupa. U aditivnoj kombinatorici/teoriji brojeva, često se pitamo koliko postoji načina za prikazati dani element $x \in G$ kao zbroj dvaju (ili više) elemenata nekog fiksnog skupa $A \subseteq G$ te je li uopće moguće naći takav prikaz. Na primjer, ako je $G = \mathbb{Z}$ te je A skup svih potpunih kvadrata, tada je poznata činjenica da se prirodan x može prikazati na opisani način ako i samo ako mu se svaki prost faktor kongruentan 3 modulo 4 u rastavu na proste faktore javlja s parnim eksponentom. Također, moguće je izvesti formulu za broj prikaza od x kao zbroja dvaju kvadrata preko rastava na proste faktore. S druge strane, ako je A skup svih prostih brojeva, tada poznata Goldbachova slutnja tvrdi da je željeni prikaz moguć kad god je x paran broj veći od 2. Iako Goldbachova slutnja nije dokazana, poznato je da vrijedi slaba verzija te slutnje – svaki se neparan broj veći od pet može prikazati kao suma triju prostih brojeva.

Mi ćemo se fokusirati na slučaj kada je G konačna Abelova grupa, npr. ciklička grupa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tj. grupa ostataka modulo n sa zbrajanjem. Iz tehničkih razloga, s takvim je grupama nešto jednostavnije raditi nego s beskonačnima. No, čak i ako se ograničimo na taj okvir, moguće je reći mnogo toga zanimljivog o pitanjima iz aditivne kombinatorike. Spomenimo samo kao jedan primjer slavni Rothov teorem o skupovima bez aritmetičkih nizova duljine tri, koji je i dan-danas predmet intenzivnih istraživanja te doživljava značajna poboljšanja. Zbog manjka vremena, o njemu nažalost nećemo stići reći puno u ovom predavanju, ali zainteresiranog čitatelja upućujemo na opširnu literaturu vezanu uz taj rezultat.

2.1 Teorijski rezultati

U ovom potpoglavlju, G označava konačnu Abelovu grupu, čiju operaciju označavamo kao zbrajanje (osim ako je drugačije navedeno). Zanimat će nas kompleksne funkcije na G. One tvore vektorski prostor $\mathbb{C}^G$, koji postaje unitaran prostor ako mu damo skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}.$$

S $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ označavat ćemo normalizirani skalarni produkt $\frac{1}{|G|}\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definicija 6. Za funkcije $f, g : G \to \mathbb{C}$ definiramo njihovu *konvoluciju* kao funkciju

$$f * g : G \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{y \in G} f(y)g(x - y).$$

Primjer 6. Ako su $A, B \subseteq G$ podskupovi, možemo se pitati na koliko načina možemo prikazati dani element $x \in G$ kao zbroj $a + b$, gdje je $a \in A$, $b \in B$. Odgovor na to pitanje leži u vrijednosti $(1_A * 1_B)(x)$, gdje za $S \subseteq G$ s 1_S označavamo njegovu indikatorsku funkciju.

Primjer 7. Neka su $p(z), q(z)$ kompleksni polinomi stupnja najviše n. Njih možemo promatrati kao kompleksne funkcije na cikličkoj grupi $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ tako da ostatku $r \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$

pridružimo koeficijent uz z^r. Konvolucija tih funkcija tada odgovara upravo produktu polinoma $p(z)$ i $q(z)$.

Propozicija 9. *$*$ je bilinearna, asocijativna i komutativna operacija na $\mathbb{C}^G$.*

Definicija 7. Za $g \in \mathbb{C}^G$ definiramo pripadni *konvolucijski operator*

$$T_g : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G, \quad f \mapsto f * g,$$

koji je po Propoziciji 9 linearan operator na $\mathbb{C}^G$.

Želimo razumjeti konvolucijske operatore. Htjeli bismo naći bazu za $\mathbb{C}^G$ u kojoj oni imaju jednostavniji zapis. Postoji li možda šansa da sve takve operatore možemo istovremeno dijagonalizirati? Uočimo da iz Propozicije 9 slijedi

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbb{C}^G \quad T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_2}T_{g_1},$$

tj. svaka dva operatora iz familije $\{T_g \mid g \in \mathbb{C}^G\}$ međusobno komutiraju. Nadalje, za $f, g, h \in \mathbb{C}^G$ uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle T_g f, h\rangle &= \sum_{x \in G} (f * g)(x)\overline{h(x)} \\
&= \sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} f(y)g(x-y) \right) \overline{h(x)} \\
&= \sum_{y,z \in G} f(y)g(z)\overline{h(y+z)} \\
&= \sum_{y \in G} f(y) \overline{\sum_{z \in G} \overline{g(-z)}h(y-z)} \\
&= \langle f, g^* * h\rangle \\
&= \langle f, T_{g^*}h\rangle,
\end{aligned}$$

pri čemu g^* definiramo kao funkciju

$$g^* : G \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \overline{g(-x)}.$$

Odavde vidimo da je $T_g^* = T_{g^*}$, stoga je adjungirani operator konvolucijskog operatora ponovo konvolucijski operator. Posebno, svaki je takav operator *normalan*, odnosno za njega vrijedi $T_g T_g^* = T_g^* T_g$. Prisjetimo se sada sljedećih rezultata iz linearne algebre, koji govore o dijagonalizaciji operatora:

Teorem 10 (Spektralni teorem za normalne operatore)**.** *Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor te neka je $\alpha : V \to V$ normalan operator. Tada imamo*

(i) svojstveni vektori operatora α koji imaju različite svojstvene vrijednosti međusobno su ortogonalni;

(ii) postoji ortonormirana baza za V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora α; posebno, α je dijagonalizabilan.

Propozicija 11. *Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor te neka je $\mathcal{A}$ familija dijagonalizabilnih operatora na V. Tada je $\mathcal{A}$ istovremeno dijagonalizabilna ako i samo ako svaka dva operatora iz $\mathcal{A}$ komutiraju.*

Teorem 10 i Propozicija 11 garantiraju nam postojanje baze za $\mathbb{C}^G$ s obzirom na koju su svi operatori T_g dijagonalni! Preostaje nam samo naći takvu bazu.

Pokušajmo vidjeti što mora zadovoljavati zajednički svojstveni vektor γ svih operatora T_g. Odaberimo najprije najjednostavnije moguće funkcije, tj. funkcije oblika $1_{\{t\}}$ za $t \in G$, kao g. Pripadni konvolucijski operator ima oblik $T_{1_{\{t\}}} f(x) = f(x-t)$, stoga se još naziva *translacijski operator* i označava τ_t. Vidimo da za svaki $t \in G$ mora postojati $\lambda_t \in \mathbb{C}$ takav da $\gamma(x-t) = \lambda_t \gamma(x)$ za sve $x \in G$. Posebno, uzimanjem $x = 0$ slijedi $\gamma(-t) = \lambda_t \gamma(0)$. Kada bi bilo $\gamma(0) = 0$, slijedilo bi $\gamma(-t) = 0$ za sve $t \in G$, odnosno $\gamma = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, $\gamma(0) \neq 0$ pa skaliranjem možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da vrijedi $\gamma(0) = 1$. Tada je $\lambda_t = \gamma(-t)$ pa dobivamo da za sve $t, x \in G$ vrijedi $\gamma(x-t) = \gamma(-t)\gamma(x)$, odnosno

$$\forall x, y \in G \quad \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

Zbog $\gamma(x)\gamma(-x) = \gamma(0) = 1$ slijedi $\gamma(x) \neq 0$ za $x \in G$. Dakle, γ je homomorfizam iz G u $\mathbb{C}^\times$. Motivirani ovime, uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 8. Neka je G proizvoljna Abelova grupa. *Karakter* grupe G je homomorfizam $\gamma : G \to \mathbb{C}^\times$. *Trivijalan karakter* je trivijalan homomorfizam, tj. konstantna funkcija 1. Skup svih karaktera grupe G označavamo $\widehat{G}$.

Napomena 1. Ako je grupa G u Definiciji 8 konačna, tada za $\gamma \in \widehat{G}$ te $x \in G$ iz Lagrangeovog teorema slijedi

$$\gamma(x)^{|G|} = \gamma(|G| \cdot x) = \gamma(0) = 1,$$

dakle γ ima vrijednosti u skupu $|G|$-tih korijena iz jedinice. Posebno, za proizvoljan $x \in G$ imamo $|\gamma(x)| = 1$ pa slijedi $\gamma(-x) = \gamma(x)^{-1} = \overline{\gamma(x)}$.

Iz gornje diskusije slijedi da su zajednički svojstveni vektori translacijskih operatora upravo skalarni kratnici karaktera. Štoviše, karakter γ ima svojstvenu vrijednost $\gamma(-t) = \overline{\gamma(t)}$ kao svojstveni vektor operatora τ_t. Dakle, za različite karaktere γ_1, γ_2, biranjem $t \in G$ takvog da $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, iz dijela (i) Teorema 10 dobivamo da su γ_1, γ_2 ortogonalni. Općenit konvolucijski operator možemo prikazati kao linearnu kombinaciju translacijskih operatora: $T_g = \sum_{t \in G} g(t)\tau_t$. Odavde slijedi da je proizvoljan karakter γ svojstveni vektor operatora T_g sa svojstvenom vrijednošću $\sum_{t \in G} g(t)\overline{\gamma(t)}$. Zaključujemo da su karakteri zajednički svojstveni vektori svih konvolucijskih operatora. Dolazimo do sljedećeg rezultata:

Teorem 12. *Karakteri čine ortogonalnu bazu prostora $\mathbb{C}^G$ s obzirom na skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ta je baza ortonormirana s obzirom na $\langle \cdot, \cdot \rangle'$. Posebno, imamo $|\widehat{G}| = |G|$.*

Dokaz. Već smo komentirali da postoji baza prostora $\mathbb{C}^G$ čiji je svaki element zajednički svojstveni vektor svih konvolucijskih operatora, odnosno skalarni kratnik karaktera. Dakle, karakteri zasigurno razapinju prostor $\mathbb{C}^G$. Također, vidjeli smo da karakteri čine ortogonalan skup, stoga su linearno nezavisni. Dakle, $\widehat{G}$ je baza prostora $\mathbb{C}^G$ pa $|\widehat{G}| = \dim \mathbb{C}^G = |G|$. Na kraju, iz Napomene 1 slijedi

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \sum_{x \in G} |\gamma(x)|^2 = \sum_{x \in G} 1 = |G|,$$

odnosno $\langle \gamma, \gamma \rangle' = 1$. □

Sada na prirodan način dolazimo do pojma Fourierove transformacije:

Definicija 9. Za funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ definiramo njenu *Fourierovu transformaciju* kao funkciju

$$\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}, \quad \gamma \mapsto \langle f, \gamma \rangle = \sum_{x \in G} f(x)\overline{\gamma(x)}.$$

Vrijednosti $\widehat{f}(\gamma)$ za $\gamma \in \widehat{G}$ još se nazivaju *Fourierovi koeficijenti* funkcije f.

Napomena 2. Iz definicije posebno slijedi $\widehat{f}(1) = \sum_{x \in G} f(x)$, odnosno Fourierov koeficijent u trivijalnom karakteru jednak je zbroju vrijednosti funkcije. Također, iz nejednakosti trokuta dobivamo ocjenu

$$|\widehat{f}(\gamma)| \leq \sum_{x \in G} |f(x)\overline{\gamma(x)}| = \sum_{x \in G} |f(x)| = \|f\|_1.$$

Drugim riječima, Fourierova transformacija je samo zapis funkcije f u bazi koja se sastoji od karaktera. Iz Teorema 12 odmah dobivamo sljedeće rezultate:

Propozicija 13 (Formula inverzije)**.** *Za funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ vrijedi $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma$, odnosno za sve $x \in G$ imamo*

$$f(x) = \mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x).$$

Dokaz. Uz pripremu u obliku Teorema 12, ovo je samo pitanje sređivanja normalizacije. Naime, iz generalne teorije ortonormiranih baza slijedi

$$f = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \langle f, \gamma \rangle' \gamma = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \frac{\langle f, \gamma \rangle}{|G|} \gamma = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma,$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorem 14 (Parsevalov teorem)**.** *Za funkcije $f, g : G \to \mathbb{C}$ vrijedi*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle,$$

pri čemu je prostor $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$ opskrbljen skalarnim produktom

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\widehat{G}} u(\gamma)\overline{v(\gamma)}.$$

Posebno, imamo

$$\sum_{x\in G}|f(x)|^2 = \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{G}}|\widehat{f}(\gamma)|^2,$$

odnosno $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ te je

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}, \quad f \mapsto \widehat{f}$$

unitaran operator.

Dokaz. Kao i Propozicija 13, ovo slijedi iz generalne teorije ortonormiranih baza, uz sređivanje normalizacije:

$$\langle f, g\rangle = |G|\langle f, g\rangle' = |G|\sum_{\gamma\in\widehat{G}}\langle f,\gamma\rangle'\langle g,\gamma\rangle' = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\widehat{G}}\langle f,\gamma\rangle\langle g,\gamma\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\widehat{G}}\widehat{f}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)} = \langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle.$$

Dakle, $\mathcal{F}$ čuva skalarni produkt. Također, za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathbb{C}^G$ te $\gamma \in \widehat{G}$ imamo

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\gamma) = \langle \lambda f + \mu g, \gamma\rangle = \lambda\langle f,\gamma\rangle + \mu\langle g,\gamma\rangle = \lambda\widehat{f}(\gamma) + \mu\widehat{g}(\gamma),$$

dakle operator $\mathcal{F}$ je linearan. □

Korolar 15. Za $x, y \in G$ vrijedi

$$\mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{G}}\gamma(x)\overline{\gamma(y)} = \begin{cases} 1 & \text{ako } x = y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prve jednakosti u Propoziciji 14 uzimanjem $f = 1_{\{x\}}$, $g = 1_{\{y\}}$ te uočavanjem da za $z \in G$, $\gamma \in \widehat{G}$ vrijedi $\widehat{1_{\{z\}}}(\gamma) = \overline{\gamma(z)}$. □

Na kraju, komentirajmo još i rezultat koji je bio prvotna motivacija za uvođenje Fourierove transformacije:

Propozicija 16. *Za funkcije $f, g : G \to \mathbb{C}$ vrijedi $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.*

Dokaz. Fiksirajmo $\gamma \in \widehat{G}$. Iz prijašnjih razmatranja znamo da je γ svojstveni vektor operatora T_g, sa svojstvenom vrijednošću

$$\sum_{t\in G} g(t)\overline{\gamma(t)} = \langle g, \gamma\rangle = \widehat{g}(\gamma).$$

Dakle, imamo

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \widehat{T_g f}(\gamma) = |G|\langle T_g f, \gamma\rangle' = |G|\widehat{g}(\gamma)\langle f,\gamma\rangle' = \widehat{f}(\gamma)\widehat{g}(\gamma),$$

što je i trebalo dokazati. □

Napomena 3. Posebno, promatranjem Fourierovih koeficijenata u trivijalnom karakteru te imajući u vidu Napomenu 2, dobivamo da je suma vrijednosti konvolucije jednaka produktu suma vrijednosti individualnih funkcija. Napomenimo da je to lako vidjeti i direktno iz definicije konvolucije, bez korištenja Fourierove analize.

Propozicija 16 daje način za računanje konvolucije koji je često koristan u praksi. Za dane funkcije f i g, izračunamo njihove Fourierove transformacije $\widehat{f}$ i $\widehat{g}$ te ih pomnožimo po točkama. Konvoluciju $f * g$ tada možemo rekonstruirati pomoću Propozicije 13.

Ovo je sve lijepo u teoriji, no kako bismo postupak iz prethodnog odlomka znali provesti u praksi, postavlja se pitanje kako za danu grupu G odrediti njene karaktere. Prva opservacija koja nam pomaže pri tome sljedeći je rezultat:

Propozicija 17. *Neka je G proizvoljna Abelova grupa. Tada je $\widehat{G}$ s operacijom množenja po točkama također Abelova grupa, s trivijalnim karakterom kao neutralnim elementom. Ona se naziva* dualna grupa *grupe G.*

Osnovna ideja u određivanju dualne grupe bit će korištenje strukturnog teorema za konačne Abelove grupe. U tu svrhu želimo razumjeti dvije stvari: što je dual cikličke grupe te kako se dualne grupe ponašaju s obzirom na direktne sume.

Propozicija 18. *Neka su $(G_i)_{i\in I}$ proizvoljne Abelove grupe. Tada je*

$$\prod_{i\in I}\widehat{G_i} \to \widehat{\bigoplus_{i\in I} G_i}, \quad (\gamma_i)_{i\in I} \mapsto \left(\bigoplus_{i\in I} G_i \to \mathbb{C}^\times,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I}\gamma_i(x_i)\right)$$

izomorfizam grupa.

Propozicija 19. *Neka je $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ konačna ciklička grupa. Tada je*

$$G \to \widehat{G}, \quad x + n\mathbb{Z} \mapsto \left(G \to \mathbb{C}^\times,\ y + n\mathbb{Z} \mapsto e^{\frac{2\pi i x y}{n}}\right)$$

izomorfizam grupa.

Kombiniranjem Propozicija 18 i 19 dobivamo sljedeći rezultat:

Teorem 20. *Neka je $G = \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$, gdje su $n_1, \dots, n_k$ prirodni brojevi. Tada je*

$$G \to \widehat{G}, \quad (x_j + n_j\mathbb{Z})_{1\le j\le k} \mapsto \left(G \to \mathbb{C}^\times,\ (y_j + n_j\mathbb{Z})_{1\le j\le k} \mapsto \prod_{j=1}^k e^{\frac{2\pi i x_j y_j}{n_j}}\right)$$

izomorfizam grupa. Posebno, svaka je konačna Abelova grupa izomorfna svojoj dualnoj grupi.

Napomena 4. Napomenimo da ako je G konačna Abelova grupa, tada izomorfizam $\widehat{G} \cong G$ koji dobivamo iz Teorema 20 nije kanonski, tj. ovisi o prikazu grupe G kao direktne sume cikličnih grupa. S druge strane, imamo sljedeći kanonski izomorfizam između G i $\widehat{\widehat{G}}$:

$$G \to \widehat{\widehat{G}}, \quad x \mapsto (\widehat{G} \to \mathbb{C}^\times, \ \gamma \mapsto \gamma(x)).$$

Ova se pojava naziva *Pontryaginova dualnost* te predstavlja temelj za Fourierovu analizu na općenitijoj klasi tzv. lokalno kompaktnih Abelovih grupa.

Primjer 8. Ako je p prost broj, tada su karakteri grupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n = \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{n}$ dani preslikavanjima

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \to \mathbb{C}^\times, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto e^{\frac{2\pi i \sum_{j=1}^n a_j x_j}{p}}$$

za $(a_1, \ldots, a_p) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

Za kraj, spomenimo još alternativni dokaz činjenice da karakteri čine ortogonalnu bazu prostora $\mathbb{C}^G$ koji se često može naći u literaturi. Uočimo da za različite $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ zbog Napomene 1 imamo

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \sum_{x \in G} \gamma_1(x) \overline{\gamma_2(x)} = \sum_{x \in G} \gamma_1(x) \gamma_2(x)^{-1} = \langle \gamma_1 \gamma_2^{-1}, 1 \rangle,$$

pri čemu γ_2^{-1} ovdje označava multiplikativni inverz od γ_2 u grupi $\widehat{G}$. Dakle, kako bismo dokazali ortogonalnost, dovoljno je pokazati da je proizvoljan netrivijalan karakter γ ortogonalan na trivijalan karakter. No za takav γ možemo odabrati $t \in G$ takav da $\gamma(t) \neq 1$ te je tada

$$\langle \gamma, 1 \rangle = \sum_{x \in G} \gamma(x) = \sum_{x \in G} \gamma(x + t) = \sum_{x \in G} \gamma(x) \gamma(t) = \gamma(t) \langle \gamma, 1 \rangle,$$

odakle slijedi $\langle \gamma, 1 \rangle = 0$. Time smo dokazali da je $\widehat{G}$ ortogonalan skup pa je posebno linearno nezavisan. Da se radi o bazi sada slijedi iz činjenice da $|\widehat{G}| = |G| = \dim \mathbb{C}^G$, koja je posljedica Teorema 20.

2.2 Primjene

Primjene započinjemo zadatkom s jednog recentnog natjecanja:

Primjer 9 (Državno 2022.)**.** Dana je ploča dimenzija 2020×2022. Za dva polja te ploče kažemo da su *susjedna* ako imaju zajedničku stranicu ili se nalaze na početku i kraju istog retka ili stupca. Dakle, svako polje ima točno četiri susjedna polja.

Viktor u svakom koraku bira jedno polje ploče i na ploču postavlja pet žetona: po jedan na odabrano polje i na svako polje susjedno odabranom. Nakon konačnog broja takvih koraka, na svakom polju nalazi se točno d žetona.

Odredi najmanji mogući d.

Rješenje. Tvrdimo da je odgovor $d = 5$, što se lako postiže tako da svako polje odaberemo točno jednom. Dokažimo da je to ujedno optimalno. Zbog cikličnosti redaka/stupaca, ploču možemo zamisliti kao konačnu Abelovu grupu $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$, gdje je $n_1 = 2020$, $n_2 = 2022$. Neka je $f : G \to \mathbb{N}_0$ funkcija koja predstavlja koliko smo puta odabrali pojedino polje ploče. Uvedemo li skup $S = \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$, tada će se na polju $x \in G$ na kraju nalaziti

$$\sum_{s\in S} f(x-s) = (f * 1_S)(x)$$

žetona. Dakle, uvjet da se na svakom polju nalazi točno d žetona možemo zapisati kao

$$f * 1_S = d 1_G.$$

Primijenimo li Fourierovu transformaciju na obje strane, iz Propozicije 16 dobivamo da vrijedi

$$\widehat{f}\widehat{1_S} = d|G|1_{\{1\}},$$

pri čemu smo koristili da je Fourierova transformacija konstantne funkcije 1_G svugdje jednaka nuli, osim u trivijalnom karakteru, gdje je jednaka $|G|$. Kako je $\widehat{1_S}(1) = |S| = 5$, iz jednakosti u trivijalnom karakteru iščitavamo informaciju da $\sum_{x\in G} f(x) = \frac{d|G|}{5}$, što smo lako mogli dobiti i dvostrukim prebrojavanjem. Međutim, iz netrivijalnih karaktera dobivamo da vrijedi $\widehat{f}(\gamma) = 0$ za sve $\gamma \in \widehat{G} \setminus \{1\}$ takve da $\widehat{1_S}(\gamma) \neq 0$! Dakle, po Propoziciji 13, uz trivijalan karakter, f će biti linearna kombinacija samo onih $\gamma \in \widehat{G}$ takvih da $\widehat{1_S}(\gamma) = 0$. Odredimo sada koji su to karakteri.

Iz Propozicije 18 znamo da je svaki $\gamma \in \widehat{G}$ dan s $\gamma(x_1, x_2) = \gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)$ za neke karaktere $\gamma_1 \in \widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}}$, $\gamma_2 \in \widehat{\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}}$. Nadalje, iz Propozicije 19 znamo da $\gamma_j(x_j) = e^{2\pi i k_j x_j/n_j}$ za neki $k_j \in \{0, 1, \ldots, n_j - 1\}$. Dakle, imamo

$$\widehat{1_S}(\gamma) = \sum_{s\in S} \overline{\gamma(s)} = 1 + \overline{\gamma_1(1)} + \overline{\gamma_1(-1)} + \overline{\gamma_2(1)} + \overline{\gamma_2(-1)} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi k_2}{n_2}\right),$$

što znači da se problem svodi na traženje k_1, k_2 za koje $\cos\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi k_2}{n_2}\right) = -\frac{1}{2}$. U ovom trenutku nećemo moći izbjeći korištenje nešto naprednijih algebarskih tehnika. Naime, označimo li $\alpha_j = \cos\left(\frac{2\pi k_j}{n_j}\right)$ za $j \in \{1, 2\}$, tada α_j pripada polju algebarskih brojeva $\mathbb{Q}(\zeta_{n_j})$, pri čemu za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. No zbog $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2}$ imamo i $\alpha_1 \in \mathbb{Q}(\zeta_{n_2})$, $\alpha_2 \in \mathbb{Q}(\zeta_{n_1})$, dakle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}(\zeta_{n_1}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_{n_2})$. Međutim, iz Galoisove teorije znamo da je $\mathbb{Q}(\zeta_{n_1}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_{n_2}) = \mathbb{Q}(\zeta_{\gcd(n_1,n_2)})$. Kako je $\zeta_{\gcd(2020,2022)} = \zeta_2 = -1$, slijedi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Kako su α_1, α_2 kosinusi racionalnih kratnika od π, poznata je činjenica da iz ovog slijedi $\alpha_1, \alpha_2 \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$ (razlog je što je $2\alpha_j$ algebarski *cijeli* broj koji je ujedno racionalan pa mora biti cijeli), odnosno $\frac{k_1}{n_1}, \frac{k_2}{n_2} \in \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\}$. Odavde lako slijedi da mora biti $\frac{k_1}{n_1} \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, $\frac{k_2}{n_2} \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ ili $\frac{k_1}{n_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{k_2}{n_2} \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$. U svakom slučaju, vidimo da je γ_1 4-periodičan, a γ_2 6-periodičan.

Zaključujemo da je f $(4,6)$-periodična u smislu da je određena periodičnim ponavljanjem svojih vrijednosti na gornjem lijevom 4×6 pravokutniku ploče. Dakle, suma vrijednosti od f na tom pravokutniku iznosi $\frac{\frac{d|G|}{5}}{\frac{|G|}{24}} = \frac{24}{5}d$, što znači da d mora biti djeljiv s 5. Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Napomena 5. U rješenju prethodnog primjera nije bilo ključno da je najveći zajednički djelitelj brojeva 2020 i 2022 jednak 2. Isti argument prolazi i kada barem jedna od dimenzija ploče nije djeljiva s 5 jer tada na sličan način kao i u rješenju možemo dobiti da su γ_1, γ_2 periodični s periodima koji nisu djeljivi s 5, a to je sve što nam treba kako bismo mogli dovršiti rješenje. S druge strane, ako su obje dimenzije djeljive s 5, tada je najmanji d jednak 1. Zaista, u tom se slučaju ploča može popločati "plusevima" sa središtima u poljima (x, y) takvima da 5 dijeli $y - 2x$.

Prije nego što prijeđemo na idući primjer, trebat ćemo proći kratku pripremu u vidu upoznavanja s tzv. Gaussovim sumama. Fiksirajmo zato prost broj $p > 2$. Tada ostatci modulo p s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja čine polje, koje označavamo $\mathbb{F}_p$. Prisjetimo se da za cijeli broj a definiramo Legendreov simbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ kao 0 ako p dijeli a, a inače kao ± 1 ovisno o tome je li a kvadratni ostatak/neostatak modulo p. Uočimo da multiplikativnost Legendreovog simbola upravo govori da je preslikavanje

$$\chi : \mathbb{F}_p^\times \to \{\pm 1\}, \quad x \mapsto \left(\frac{x}{p}\right)$$

karakter multiplikativne grupe $\mathbb{F}_p^\times$, koji nazivamo *kvadratni (Dirichletov) karakter* modulo p. Nas će zanimati Fourierova transformacija funkcije χ s obzirom na aditivnu strukturu polja $\mathbb{F}_p$ (kada je proširimo s $\chi(0) = 0$). U tu svrhu bit će zgodno promotriti funkciju $q = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} 1_{\{x^2\}}$, za koju vrijedi $q - 1_{\mathbb{F}_p} = \chi$. Ideja za računanje Fourierovih koeficijenata od χ, tj. od q, bit će gledati njenu konvoluciju sa samom sobom jer ćemo nju moći izračunati direktno. Preciznije, gledat ćemo *razlikovnu konvoluciju*

$$(q \circ q)(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_p} q(y)q(y - x),$$

koju možemo promatrati kao konvoluciju $q * \widetilde{q}$, gdje je funkcija $\widetilde{q}$ definirana kao $\widetilde{q}(x) = q(-x)$. Dakle, iz Propozicije 16 dobivamo

$$\widehat{q \circ q} = \widehat{q * \widetilde{q}} = \widehat{q}\widehat{\widetilde{q}} = |\widehat{q}|^2,$$

pri čemu smo koristili da zbog toga što je q realna funkcija vrijedi

$$\widehat{\widetilde{q}}(\gamma) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} q(-x)\overline{\gamma(x)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} q(x)\overline{\gamma(-x)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} q(x)\gamma(x) = \overline{\widehat{q}(\gamma)}.$$

Međutim, uočimo da s druge strane imamo

$$
\begin{aligned}
(q \circ q)(x) &= \sum_{y \in \mathbb{F}_p} \left(\sum_{a \in \mathbb{F}_p} 1_{\{a^2\}}(y) \right) \left(\sum_{b \in \mathbb{F}_p} 1_{\{b^2\}}(y-x) \right) \\
&= \sum_{a,b \in \mathbb{F}_p} \sum_{y \in \mathbb{F}_p} 1_{\{a^2\}}(y) 1_{\{b^2\}}(y-x) \\
&= \sum_{a,b \in \mathbb{F}_p} \sum_{y \in \mathbb{F}_p} 1_{\{a^2\} \cap \{b^2+x\}}(y) \\
&= \sum_{a,b \in \mathbb{F}_p} 1_{\{a^2-b^2\}}(x) \\
&= |\{a, b \in \mathbb{F}_p \mid a^2 - b^2 = x\}| \\
&= |\{a, b \in \mathbb{F}_p \mid (a-b)(a+b) = x\}| \\
&= |\{c, d \in \mathbb{F}_p \mid cd = x\}|,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti iskoristili činjenicu da je preslikavanje

$$
\mathbb{F}_p^2 \to \mathbb{F}_p^2, \quad (a, b) \mapsto (a-b, a+b)
$$

bijekcija. Dakle, imamo

$$
(q \circ q)(x) = \begin{cases} 2p-1 & \text{ako } x = 0 \\ p-1 & \text{inače} \end{cases},
$$

odnosno $q \circ q = (p-1)1_{\mathbb{F}_p} + p1_{\{0\}}$. Sada je $\widehat{q \circ q} = p(p-1)1_{\{1\}} + p1_{\widehat{\mathbb{F}_p}}$, odakle slijedi $|\widehat{\chi}(\gamma)| = |\widehat{q}(\gamma)| = \sqrt{p}$ za sve $\gamma \in \widehat{\mathbb{F}_p} \setminus \{1\}$.

Dokazali smo da svi netrivijalni Fourierovi koeficijenti kvadratnog karaktera χ imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{p}$. To je zapravo sve što će nam trebati, no uz još malo truda možemo dobiti i dosta preciznije informacije o Fourierovim koeficijentima. Zaista, za $a \in \mathbb{F}_p$ označimo s γ_a karakter $\mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto e^{2\pi iax/p}$. Tada je $\widehat{\chi}(\gamma_0) = \widehat{\chi}(1) = 0$, dok za $a \neq 0$ zbog multiplikativnosti karaktera χ vrijedi

$$
\widehat{\chi}(\gamma_a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x)\overline{\gamma_a(x)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(a^{-1}x)\overline{\gamma_a(a^{-1}x)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(a^{-1})\chi(x)\overline{\gamma_1(x)} = \chi(a)\widehat{\chi}(\gamma_1).
$$

Drugim riječima, ako znamo vrijednost

$$
\widehat{\chi}(\gamma_1) = \widehat{q}(\gamma_1) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{-2\pi ik^2/p},
$$

čiji je kompleksni konjugat $G(p)$ još poznat pod nazivom *kvadratna Gaussova suma*, tada znamo čitavu Fourierovu transformaciju od χ. Dodatno, uočimo da iz gornje diskusije posebno slijedi

$$
\overline{\widehat{\chi}(\gamma_1)} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x)\gamma_1(x) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x)\overline{\gamma_{-1}(x)} = \widehat{\chi}(\gamma_{-1}) = \chi(-1)\widehat{\chi}(\gamma_1),
$$

što u kombinaciji s prethodno dokazanim daje $\widehat{\chi}(\gamma_1)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$. Time smo dokazali sljedeće: ako je $p \equiv 1 \pmod 4$, tada je $G(p) = \pm\sqrt{p}$, a ako je $p \equiv 3 \pmod 4$, tada je $G(p) = \pm i\sqrt{p}$, čime je Gaussova suma određena do na predznak. Ispostavlja se da je u oba slučaja točan predznak pozitivan, no to je netrivijalna činjenica kojom se nećemo stići ovdje baviti.

Prijeđimo sada na sljedeći primjer, koji ilustrira moć poznavanja preciznih ocjena za Gaussove sume, odnosno Fourierove koeficijente kvadratnog karaktera χ. Naime, stvarna vrijednost $\sqrt{p}$ znatno je manja od gornje ograde $p-1$ koju dobijemo trivijalnom ocjenom iz Napomene 2. Spomenimo još da se iz Parsevalovog teorema te argumenata sličnih prikazanima mogu izvesti istovjetne ocjene za proizvoljan karakter od $\mathbb{F}_p^\times$. Te ocjene onda povlače odgovarajuće ocjene za tzv. Jacobijeve sume, pomoću kojih se sljedeći primjer može riješiti s još boljim kvantitativnim ocjenama na p. No, mi ćemo se zadržati na promatranju kvadratnog karaktera.

Primjer 10 (IMO Shortlist 2012 N8)**.** Dokažite da za svaki prost broj $p > 100$ te svaki cijeli broj r postoje cijeli brojevi a, b takvi da p dijeli $a^2 + b^5 - r$.

Rješenje. Drugim riječima, treba dokazati da ako uvedemo skupove $A = \{a^2 \mid a \in \mathbb{F}_p\}$ i $B = \{b^5 \mid b \in \mathbb{F}_p\}$, tada je njihov *sumset* $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ jednak čitavom $\mathbb{F}_p$. To ćemo ostvariti tako da za svaki element prebrojimo na koliko se načina on može prikazati kao zbroj $a + b$ za $a \in A$, $b \in B$. Preciznije, promotrit ćemo konvoluciju $\psi = q * 1_B$, gdje je funkcija $q = \sum_{a\in\mathbb{F}_p} 1_{\{a^2\}}$ definirana kao i prije. Uočimo da je nosač te funkcije sadržan u $A + B$, stoga je ideja pokazati da ona (gotovo) nigdje nije jednaka nuli. U tu svrhu koristit ćemo metodu drugog momenta. Naime, ako shvatimo ψ kao slučajnu varijablu na $\mathbb{F}_p$, pokazat ćemo da ona ima malu varijancu, što će zbog Čebiševljeve nejednakosti značiti da ona rijetko odstupa od svog očekivanja. Za početak, uočimo da je zbog Napomene 3 prosjek funkcije ψ jednak

$$\frac{1}{p}\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\psi(x) = \frac{1}{p}\left(\sum_{y\in\mathbb{F}_p} q(y)\right)\left(\sum_{z\in\mathbb{F}_p} 1_B(z)\right) = |B|.$$

S druge strane, primjenom Propozicije 16 te dvostrukom primjenom Parsevalova teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\|\psi - |B|1_{\mathbb{F}_p}\|_2^2 &= \|q * 1_B - 1_{\mathbb{F}_p} * 1_B\|_2^2 = \|\chi * 1_B\|_2^2 \\
&= \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{\mathbb{F}_p}} |\widehat{\chi * 1_B}(\gamma)|^2 = \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{\mathbb{F}_p}} |\widehat{\chi}(\gamma)|^2 |\widehat{1_B}(\gamma)|^2 \\
&= \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{\mathbb{F}_p}} p|\widehat{1_B}(\gamma)|^2 1_{\widehat{\mathbb{F}_p}\setminus\{1\}}(\gamma) = p\left(\|\widehat{1_B}\|_2^2 - \frac{|B|^2}{p}\right) \\
&= p\|1_B\|_2^2 - |B|^2 = p|B| - |B|^2.
\end{aligned}$$

Dakle, iz Čebiševljeve nejednakosti imamo

$$|\{x \in \mathbb{F}_p \mid \psi(x) = 0\}| \le \frac{\|\psi - |B|1_{\mathbb{F}_p}\|_2^2}{|B|^2} = \frac{p}{|B|} - 1.$$

No iz postojanja primitivnog korijena modulo p (tj. cikličnosti multiplikativne grupe $\mathbb{F}_p^\times$) slijedi da je $|B| = p$ ukoliko $5 \nmid p-1$ te $|B| = \frac{p-1}{5} + 1 = \frac{p+4}{5}$ ako $5 \mid p-1$. Stoga možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da $p \equiv 1 \pmod 5$, odnosno $p \equiv 1 \pmod{10}$. Tada zbog $|B| > \frac{p}{5}$ slijedi da je broj točaka u kojima je ψ jednaka nuli manji od $5 - 1 = 4$, odnosno $|\mathbb{F}_p \setminus (A+B)| \leq 3$.

Dakle, dobili smo da $A + B$ sadrži sve osim konstantnog broja ostataka modulo p, a kako bismo dovršili rješenje, potrebno je još jedno opažanje o strukturi skupa $A + B$. Naime, uočimo da su $A \setminus \{0\}$ i $B \setminus \{0\}$ podgrupe od $\mathbb{F}_p^\times$ pa je to i $C = (A \cap B) \setminus \{0\} = \{c^{10} \mid c \in \mathbb{F}_p^\times\}$. Dakle, za proizvoljne $x \in A + B$ te $c \in C$, biranjem $a \in A$, $b \in B$ takvih da $x = a + b$, dobivamo $ca \in A$, $cb \in B$ pa slijedi $cx = ca + cb \in A + B$. Dakle, skup $(A + B) \setminus \{0\}$ unija je *kosetova* podgrupe C, tj. skupova oblika $tC = \{tc \mid c \in C\}$ za $t \in \mathbb{F}_p^\times$. Kako kosetovi od C particioniraju $\mathbb{F}_p^\times$, slijedi da $|C|$ dijeli $|\mathbb{F}_p \setminus (A+B)|$. No već za $p > 31$ slijedi $|C| = \frac{p-1}{10} > 3$ pa mora biti $|\mathbb{F}_p \setminus (A+B)| = 0$, odnosno $A + B = \mathbb{F}_p$, što je i trebalo dokazati. □

Pokažimo još jedan primjer na kojem se kroz dijagonalizaciju konvolucije očituje moć Fourierove transformacije:

Primjer 11 (Putnam 2011 A6)**.** Neka je G Abelova grupa reda n. Neka je S pravi podskup od G koji sadrži 0 te generira G. Imamo kocku koja, kad je bacimo, pokazuje uniformno nasumičan element skupa S. Neka je g_m element grupe koji dobijemo zbrajanjem ishoda m nezavisnih bacanja te kocke. Dokažite da postoji realan broj $b \in (0,1)$ takav da limes

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{b^{2m}} \sum_{x \in G} \left(\mathbb{P}(g_m = x) - \frac{1}{n} \right)^2$$

postoji i pripada intervalu $(0, \infty)$.

Napomena 6. Ovaj rezultat možemo interpretirati na sljedeći način. Izgradimo (usmjeren) graf Γ sa skupom vrhova G te bridovima oblika $(x, x+s)$ za $x \in G$, $s \in S$, odnosno tzv. *Cayleyjev graf* grupe G s obzirom na skup generatora S. Tada slučajan niz $(g_m)_{m \geq 1}$ možemo promatrati kao slučajnu šetnju na Γ te nam ovaj rezultat daje informaciju o ponašanju te slučajne šetnje. Konkretno, on posebno govori da kvadratna udaljenost distribucije elementa g_m od uniformne distribucije opada eksponencijalno s m.

Rješenje. Neka je $k = |S|$ te neka je $\sigma = \frac{1}{k} 1_S$ normalizirana indikatorska funkcija skupa S. Uočimo da tada vjerojatnost od interesa možemo izraziti kao

$$\mathbb{P}(g_m = x) = \frac{|\{(x_1, \ldots, x_m) \in G^m \mid x_1 + \ldots + x_m = x\}|}{k^m} = \sigma^{(m)}(x),$$

pri čemu sa $\sigma^{(m)}$ označavamo m-terostruku konvoluciju $\underbrace{\sigma * \ldots * \sigma}_{m \text{ puta}}$. No iz Propozicije 16 znamo da Fourierova transformacija od $\sigma^{(m)}$ ima jednostavan oblik: $\widehat{\sigma^{(m)}} = \widehat{\sigma}^m$. Koristeći Parsevalov teorem, sada dobivamo

$$\sum_{x\in G}\left(\mathbb{P}(g_m = x) - \frac{1}{n}\right)^2 = \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{G}}\left|\widehat{\sigma^{(m)} - \tfrac{1}{n}1_G}(\gamma)\right|^2 = \mathbb{E}_{\gamma\in\widehat{G}}|\widehat{\sigma}(\gamma)^m - 1_{\{1\}}(\gamma)|^2 = \frac{1}{n}\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}|\widehat{\sigma}(\gamma)|^{2m},$$

pri čemu smo koristili činjenicu da zbog Napomene 2 vrijedi $\widehat{\sigma}(1) = 1$. Sada je prirodno odabrati $b = \max_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}|\widehat{\sigma}(\gamma)|$. Zaista, tada je $b > 0$ jer bi u suprotnom svi netrivijalni Fourierovi koeficijenti funkcije σ bili jednaki nuli, odnosno ona bi bila konstantna, što nije moguće jer je S neprazan pravi podskup od G. Također, iz nejednakosti trokuta, za netrivijalan karakter γ imamo

$$|\widehat{\sigma}(\gamma)| = \left|\frac{1}{k}\sum_{s\in S}\overline{\gamma(s)}\right| \le \frac{1}{k}\sum_{s\in S}|\overline{\gamma(s)}| = 1.$$

Štoviše, da bi se postigla jednakost, γ bi morao biti konstantan na S, i to jednak 1 jer $0 \in S$. No kako S generira G, to bi značilo da je γ konstantno jednak 1 na G, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, imamo $b \in (0, 1)$. Na kraju, promatrani je limes jednak

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}\left(\frac{|\widehat{\sigma}(\gamma)|}{b}\right)^{2m} = \frac{|\{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\} \mid |\widehat{\sigma}(\gamma)| = b\}|}{n},$$

što je očito pozitivan realan broj. □

Primjene završavamo zadatkom koji pokazuje kako možemo iskoristiti Fourierovu analizu da bismo klasificirali "aproksimativne" homomorfizme grupa.

Primjer 12 (Olympic Revenge 2018)**.** Neka je $p > 2$ prost broj. Identificiranjem polja $\mathbb{F}_p$ sa skupom $\left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 0, 1 \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$, za $x \in \mathbb{F}_p$ s $\|x\|_{\mathbb{F}_p}$ označavamo apsolutnu vrijednost od x. Neka je $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ funkcija takva da za sve $x, y \in \mathbb{F}_p$ vrijedi

$$\|f(x+y) - f(x) - f(x)\|_{\mathbb{F}_p} < 100.$$

Dokažite da postoji $m \in \mathbb{F}_p$ takav da za sve $x \in \mathbb{F}_p$ vrijedi $\|f(x) - mx\|_{\mathbb{F}_p} < 1000$.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p > 2000$ jer je tvrdnja inače trivijalna. Za početak, kako bismo mogli raditi Fourierovu analizu, moramo baratati kompleksnim funkcijama na $\mathbb{F}_p$ pa zato uvodimo funkciju

$$F : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times, \quad x \mapsto e^{2\pi i f(x)/p}.$$

Također, bit će korisno promatrati funkciju

$$F^* : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times, \quad x \mapsto \overline{F(-x)}.$$

Primijetimo da funkcija F poprima vrijednosti u jediničnoj kružnici pa posebno imamo $\|F\|_2^2 = p$. Mi trebamo pokazati da je F "blizu" nekog karaktera od $\mathbb{F}_p$. U tu svrhu primijetimo najprije da iz uvjeta zadatka za $x, y \in \mathbb{F}_p$ slijedi

$$\left|F(x)F(y)\overline{F(x+y)} - 1\right| = \left|e^{2\pi i (f(x)+f(y)-f(x+y))/p} - 1\right| < \frac{200\pi}{p},$$

pri čemu smo koristili nejednakost $|e^{2i\theta} - 1| = 2|\sin\theta| \leq 2\theta$, koja vrijedi za $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sumiranjem ovih nejednakosti te korištenjem nejednakosti trokuta dobivamo

$$\begin{aligned}
|(F * F * F^*)(0) - p^2| &\leq \sum_{x,y \in \mathbb{F}_p} |F(x)F(y)F(-x-y)^* - 1| \\
&= \sum_{x,y \in \mathbb{F}_p} |F(x)F(y)\overline{F(x+y)} - 1| \\
&< p^2 \cdot \frac{200\pi}{p} = 200\pi p.
\end{aligned}$$

S druge strane, iz Propozicija 13 i 16 imamo

$$(F * F * F^*)(0) = \mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} \widehat{F}(\gamma)^2 \widehat{F^*}(\gamma)\gamma(0) = \mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} |\widehat{F}(\gamma)|^2 \widehat{F}(\gamma),$$

pri čemu smo koristili da vrijedi $\widehat{F^*} = \overline{\widehat{F}}$. Uočimo da po Parsevalovu teoremu imamo $\mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} |\widehat{F}(\gamma)|^2 = p$. Ponovnom primjenom nejednakosti trokuta sada slijedi

$$\mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} |\widehat{F}(\gamma) - p||\widehat{F}(\gamma)|^2 \geq \left|\mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} |\widehat{F}(\gamma)|^2 \widehat{F}(\gamma) - p\mathbb{E}_{\gamma \in \widehat{F_p}} |\widehat{F}(\gamma)|^2\right| = |(F*F*F^*)(0) - p^2| < 200\pi p,$$

što znači da postoji $\gamma \in \widehat{\mathbb{F}_p}$ takav da $|\widehat{F}(\gamma) - p| < 200\pi$ te posebno $|\widehat{F}(\gamma)| > p - 200\pi$. Dakle, dobili smo da F jako korelira s karakterom γ pa očekujemo da je dobro aproksimirana s γ. Dokažimo sada to. Za proizvoljan $y \in \mathbb{F}_p$, uočimo da po nejednakosti trokuta vrijedi

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{F}(\gamma) - F(y)\overline{\gamma(y)}\widehat{F}(\gamma)\right| &= \left|\sum_{x \in \mathbb{F}_p} F(x)\overline{\gamma(x)} - \sum_{x \in \mathbb{F}_p} F(x)F(y)\overline{\gamma(x)}\ \overline{\gamma(y)}\right| \\
&= \left|\sum_{x \in \mathbb{F}_p} F(x+y)\overline{\gamma(x+y)} - \sum_{x \in \mathbb{F}_p} F(x)F(y)\overline{\gamma(x+y)}\right| \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{F}_p} |F(x+y) - F(x)F(y)| \\
&< p \cdot \frac{200\pi}{p} = 200\pi,
\end{aligned}$$

Odaberemo li $m \in \mathbb{F}_p$ takav da $\gamma(y) = e^{2\pi i m y/p}$ za sve $y \in \mathbb{F}_p$, dobivamo

$$|e^{2\pi i (f(y) - my)/p} - 1| = |1 - F(y)\overline{\gamma(y)}| < \frac{200\pi}{|\widehat{F}(\gamma)|} < \frac{200\pi}{p - 200\pi}.$$

Na kraju, korištenjem ocjene $|e^{2i\theta} - 1| = 2|\sin\theta| \geq \frac{4}{\pi}\theta$, koja vrijedi za $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dobivamo

$$\|f(y) - my\|_{\mathbb{F}_p} < \frac{50\pi p}{p - 200\pi} < \frac{50\pi \cdot 400\pi}{400\pi - 200\pi} = 100\pi < 1000$$

jer je po početnoj pretpostavci $p > 400\pi$. Time je tvrdnja dokazana. □

3 Zadaci za domaću zadaću

Za uspješno polaganje zadaće potrebno je riješiti barem 6 od sljedećih 12 zadataka. Rok predaje je 19.5.2023.

Zadatak 1. Neka je $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, gdje je C_n skup funkcija oblika:

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k x)$$

za koje vrijedi:

(a) $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$

(b) $a_k = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$ koji su višekratnici od 3.

Odredite najveću vrijednost koju može postići $f(0)$, za neku funkciju $f \in C$ i dokažite da se ta vrijednost postiže.

Uputa. Promotrite vrijednosti funkcije u pogodnim točkama.

Zadatak 2. (a) Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \right) \sin((2n+1)\pi x) dx = 0.$$

(b) Dokažite da je

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak 3. (a) Dokažite da je funkcija

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

klase $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Uputa. Zapišite kao produkt dviju funkcija i pokažite da je svaka od njih klase $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

(b) Dokažite da je 2π - periodično proširenje od ϕ funkcija iz $C^\infty(\mathbb{R})$ koja se ne nalazi u $\mathrm{span}(\mathcal{T})$.

Uputa. Promotrite nultočke.

Zadatak 4. Neka je $\{t_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ skup različitih nenegativnih realnih brojeva. Dokažite da je skup funkcija $S = \{\sin(2\pi t_j x), \cos(2\pi t_j x) : j \in \mathbb{N}\}$ linearno nezavisan.

Uputa. Imitirajte dokaz ortogonalnosti, a umjesto $\int_0^1$ promotrite $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}$ za $T \to \infty$.

Zadatak 5. Cilj zadatka je dokazati tzv. Wirtingerovu nejednakost, koja se koristi za dokaz izoperimetrijskog teorema u $\mathbb{R}^2$ koji kaže da među svim likovima istog opsega najveću površinu ima krug.

a) Neka je $f \in C^1([0, \frac{1}{2}])$, takva da je $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Dokažite da je 1-periodično proširenje funkcije $g : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definirane s $g(x) = \mathrm{sgn}(x) f(|x|)$ funkcija klase $C^1(\mathbb{R})$.

b) Ako je $f \in C^1(\mathbb{R})$ 1-periodična, dokažite da je $\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n)$

c) Neka je $f \in C^1([a, b])$ takva da je $f(a) = f(b) = 0$. Dokažite da je

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

i dokažite da je konstanta $\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2$ najbolja moguća.

Uputa. Iskoristite prethodne podzadatke i Plancherelov teorem.

Zadatak 6. Cilj ovog zadatka je naći neprekidnu funkciju koja je nigdje derivabilna.

Za funkciju $f \in L^1(\mathbb{T})$ reći ćemo da je *lakunarna* ako je $\widehat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ koji nisu oblika 3^k, $k \in \mathbb{N}$.

a) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodična i derivabilna u 0. Dokažite da postoji 1- periodična funkcija g, takva da je $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ za sve $n \geq 2$ i da je $g(0) = g'(0) = 0$.

b) Neka je f *lakunarna* i neka su $k, N \in \mathbb{N}$ takvi da je $N < 3^k$. Ako je K_N polinom stupnja N takav da je $\widehat{K}(0) = 0$ dokaži da je $\widehat{fK_n}(3^k) = \widehat{f}(3^k)$.

c) Neka je F_N Fejerova jezgra. Za $K_N := (\frac{F_N}{\|F_N\|_2})^2$ dokažite da postoji $C > 0$ tako da za sve $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vrijedi:

$$K_N(x) \leq \frac{C}{N^3 x^4}.$$

d) Neka je f *lakunarna* funkcija koja je derivabilna u nekoj točki x_0. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} 3^k \widehat{f}(3^k) = 0.$$

Uputa. Dokažite da BSO možemo pretpostaviti da je derivabilna u $x_0 = 0$ i da je $f(0) = f'(0) = 0$. Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji k_0 takav da vrijedi $\sup_{|x|<3^{-\frac{k_0}{4}}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$. Za $k > k_0$ odabirom $N := 3^{k-1}$ i dokažite da postoji $C > 0$ (koji ovisi samo o f) takav da vrijedi

$$3^k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) K_N(x) e^{-2\pi i 3^k x} dx < C\varepsilon,$$

rastavom na skupove: $\{x : |x| < N^{-1}\}$, $\{x : N^{-1} < |x| < N^{-\frac{1}{4}}\}$ i $\{x : N^{-\frac{1}{4}} < |x| < \frac{1}{2}\}$.

e) Dokažite da je funkcija

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{i3^k x}$$

funkcija koja je neprekidna na $\mathbb{R}$, ali nigdje derivabilna. Ta funkcija naziva se i Weierstrassova funkcija.

Uputa. Iskoristite prethodne podzadatke i odredite što je $\lim_{k\to\infty} 3^k \widehat{f}(3^k)$.

Zadatak 7. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Uz oznaku $x_{n+1} = x_1$, odredite maksimalnu vrijednost sume $\sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+1}$ po svim n-torkama realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ takvima da $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ i $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$ te odredite slučaj jednakosti.

Uputa. Uz oznaku $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi $\sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+1} = \langle x, \tau_{-1} x\rangle$, gdje je τ_{-1} operator translacije. Koristeći Parsevalov identitet iskažite problem u terminima Fourierove transformacije danog niza na $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Zadatak 8. Neka je p prost broj. Koliko ima p-članih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ čija je suma elemenata djeljiva s p?

Uputa. Promatrajte grupu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Prva koordinata neka predstavlja veličinu, a druga zbroj elemenata podskupa.

Zadatak 9. Neka su k, n prirodni brojevi, pri čemu je k neparan. Za n-torku $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^n$ kažemo da je *sretna* ako sadrži element koji je kongruentan sumi preostalih elemenata modulo k. Dokažite da je broj sretnih n-torki jednak

$$k^n - (k-1)^n - (-1)^n(\gcd(k, n-2) - 1).$$

Zadatak 10. Za prirodan broj n, neka je S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za permutaciju $\pi \in S_n$, neka je $\mathrm{inv}(\pi)$ broj parova (i, j) takvih da je $1 \leq i < j \leq n$ te $\pi(i) > \pi(j)$. Neka je $f(n)$ broj permutacija $\pi \in S_n$ takvih da je $\mathrm{inv}(\pi)$ djeljivo s $n + 1$.

Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da je $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$ te beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da je $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$.

Uputa. Za permutaciju $\pi \in S_n$ definirajmo n-torku $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ gdje je ℓ_j broj elemenata permutacije prije j-tog koji su veći od njega. Pokažite da je $S_n \to \prod_{j=1}^{n}\{0, 1, \dots, j-1\}$, $\pi \mapsto \ell(\pi)$ bijekcija.

Zadatak 11. Neka je $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \{\pm 1\}$ funkcija takva da za barem $(1-c) \cdot 2^{2n}$ parova $(x, y) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ vrijedi $f(x+y) = f(x)f(y)$. Dokažite da tada postoji funkcija $g : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \{\pm 1\}$ takva da za sve $x, y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ vrijedi $g(x+y) = g(x)g(y)$ te za barem $(1-c) \cdot 2^n$ elemenata $x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ vrijedi $f(x) = g(x)$.

Zadatak 12. Cilj je ovog zadatka je dokazati verziju Rothovog teorema za vektorske prostore nad konačnim poljima. Ona je tehnički jednostavnija od verzije za cijele brojeve, ali sadrži glavninu bitnih ideja. Neka je zato $A \subseteq \mathbb{F}_3^n$ podskup gustoće $\alpha = \frac{|A|}{3^n}$ koji ne sadrži netrivijalan aritmetički niz duljine tri, tj. takav da ne postoje različiti $x, y, z \in A$ takvi da $x + z = 2y$. Kako u $\mathbb{F}_3^n$ vrijedi $2y = -y$, uočimo da je ovaj uvjet ekvivalentan s nepostojanjem različitih $x, y, z \in A$ sa sumom 0.

(i) Pokažite da postoji netrivijalan karakter γ od $\mathbb{F}_3^n$ takav da

$$|\widehat{1_A}(\gamma)| \geq |\alpha|A| - 1|.$$

Uputa. Promatrajte trostruku konvoluciju $1_A * 1_A * 1_A$ te koliko se ona mijenja ako u njoj jedno pojavljivanje funkcije 1_A zamijenimo njenom "uprosječenom verzijom" $\alpha 1_{\mathbb{F}_3^n}$ (potonja konvolucija odgovara onome što bismo očekivali za slučajan skup gustoće α).

(ii) Pokažite da A ima *prirast gustoće* (engl. *density increment*) na translatu nekog potprostora kodimenzije 1. Preciznije, pokažite da postoje $x \in \mathbb{F}_3^n$ te potprostor $V \leqslant \mathbb{F}_3^n$ dimenzije $n-1$ takvi da

$$\frac{|A \cap (x+V)|}{|x+V|} \geq \alpha \left(1 + \frac{1}{2}\left|\alpha - \frac{1}{|A|}\right|\right).$$

Posebno, dokažite da je $\alpha \leq \sqrt{\frac{2}{3^n}}$ ili postoji podskup $A' \subseteq \mathbb{F}_3^{n-1}$ gustoće barem $\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$ koji ne sadrži netrivijalan aritmetički niz duljine tri.

Uputa. Promatrajte balansiranu verziju indikatorske funkcije od A, odnosno funkciju $f_A = 1_A - \alpha 1_{\mathbb{F}_3^n}$. Njen je Fourierov koeficijent u trivijalnom karakteru jednak nuli, a svi ostali podudaraju se s onima za 1_A. V će biti jezgra karaktera γ iz dijela (i).

(iii) Iteriranjem zaključka iz dijela (ii) dokažite da postoji konstanta C (neovisna o n) takva da $\alpha \leq \frac{C}{n}$. Posebno, ovo znači da za proizvoljnu konstantu $\delta > 0$, ako je n dovoljno velik, tada svaki podskup od $\mathbb{F}_3^n$ veličine barem $\delta \cdot 3^n$ sadrži netrivijalan aritmetički niz duljine tri.