

Tema br. 1:

Račun veličina i ocjenjivanje u matematičkoj analizi

Vjekoslav Kovač, 8. 3. 2024.

<https://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/>

Asimptotska notacija: O i o

Poznati matematičar Terence Tao jednom je prilikom izjavio da je (u prošlom stoljeću) matematička analiza naglo počela napredovati nakon što je prestala mariti za točne konstante. Naučit ćemo korisnu notaciju i neke trikove, koji nam mogu olakšati račun i ubrzati razmišljanje ako su nam jedino važni redovi veličina i kvalitativna svojstva, a ne i konkretni brojevi koji se pojavljuju u ocjenama. Notaciju koja slijedi osmislili su Paul Bachmann (1837.–1920.), Edmund Landau (1877.–1938.) i drugi te se ona nekada naziva i *Bachmann–Landau-ova notacija*.

Definicija. Za realne funkcije f i g pišemo

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow c$$

ako postoje $M > 0$ i okolina U točke c tako da za svaki $x \in U \setminus \{c\}$ vrijedi

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Definicija. Za realne funkcije f i g pišemo

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow c$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina U točke c takva da za svaki $x \in U \setminus \{c\}$ vrijedi

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

U ovim definicijama obično smatramo da su f i g definirane na nekom podskupu od \mathbb{R}^n , ali definicije u istoj formulaciji imaju smisla i kada je domena funkcija općeniti topološki prostor (za one koji znaju što je to). Isto tako, funkcije mogu biti i kompleksne, tj. kodomena im može biti \mathbb{C} . Konačno, ako su f i g definirane na nekom podskupu od \mathbb{R} , dozvoljavamo i mogućnosti $c = -\infty$ ili $c = +\infty$. Ponekad se točka c podrazumijeva pa izostavljamo dodatak “ $x \rightarrow c$ ”; recimo to je česti slučaj u teorijskom računarstvu, gdje su f i g tipično definirane na \mathbb{N} i gleda se $c = +\infty$, tj. riječ je o usporedbi brzina rasta nizova realnih brojeva.

Kod korištenja gornje notacije često dozvoljavamo sljedeću nepreciznost u svrhu elegantnijeg zapisa. U izrazima pišemo samo $O(g(x))$ ili $o(g(x))$ na mjestu neke (možda nepoznate) funkcije $f(x)$ koja zadovoljava $f(x) = O(g(x))$ odnosno $f(x) = o(g(x))$. Tako naprimjer pišemo:

- $\sin x = x + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ sa značenjem $\sin x = x + f(x)$, $f(x) = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

- $f(x) = e^x(3x+2+O(\frac{1}{x}))$, $x \rightarrow +\infty$ sa značenjem $f(x) = e^x(3x+2+g(x))$, $g(x) = O(\frac{1}{x})$, $x \rightarrow +\infty$.
- $O(2^n) + O(n!) + O(n^n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$ sa značenjem: ako je $f(n) = O(2^n)$, $g(n) = O(n!)$, $h(n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$, tada vrijedi $f(n) + g(n) + h(n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$.

Umjesto $f(x) = O(g(x))$ nekada se piše $f(x) \lesssim g(x)$ ili $f(x) \ll g(x)$, a koriste se i razne druge oznake.

Svojstva simbola O:

- Ako postoji okolina U od c takva da je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi:
 $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow c} |\frac{f(x)}{g(x)}| < +\infty$
 $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$ je omeđena na nekoj okolini od c bez točke c .
- $f(x) = O(1)$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow f$ je omeđena na nekoj okolini od c
- $f_1(x) = O(g(x))$, $f_2(x) = O(g(x))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = O(g(x))$
- $f_1(x) = O(g_1(x))$, $f_2(x) = O(g_2(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$
- $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = O(h(x))$
- $f \in C^{p+1}(\langle c - \delta, c + \delta \rangle)$, $p \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + O((x - c)^{p+1})$, $x \rightarrow c$
- Ako je $f(y) = O(g(y))$, $y \rightarrow d$, zatim $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$ te još postoji okolina U od c takva da je $h(x) \neq d$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi $f(h(x)) = O(g(h(x)))$, $x \rightarrow c$.
(Kao da smo supstituirali $y = h(x)$.)

Svojstva simbola o:

- Ako postoji okolina U od c takva da je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi:
 $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$
- $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
- $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = o(g(x))$
- $f_1(x) = o(g_1(x))$, $f_2(x) = O(g_2(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$
- $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$
 $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) = o(h(x))$
- $f \in C^p(\langle c - \delta, c + \delta \rangle)$, $p \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + o((x - c)^p)$, $x \rightarrow c$
- Ako je $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow d$, zatim $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$ te još postoji okolina U od c takva da je $h(x) \neq d$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi $f(h(x)) = o(g(h(x)))$, $x \rightarrow c$.
(Kao da smo supstituirali $y = h(x)$.)

Uvodni primjeri

Primjer 1. Ako su poznati razvoji

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad \text{kada } x \rightarrow 0,$$

izvedite razvoj funkcije tangens:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

(Naravno da se može i direktno, primjenom Taylorovog teorema na tg .)

Rješenje primjera 1. Zapišimo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} + O(x^4) \right)}.$$

Sada supstituirajmo $y = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ u razvoj $\frac{1}{1-y} = 1 + y + O(y^2)$, $y \rightarrow 0$. Dobivamo

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + O(x^5),$$

što je i trebalo pokazati.

Primjer 2. Ako je $f : \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad x \rightarrow 1^+ \quad \text{i} \quad f(x) = O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

pokažite da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|f(x)| \leq C \frac{x}{x-1} \quad \text{za svaki } x \in \langle 1, +\infty \rangle.$$

Rješenje primjera 2. Po definiciji postoje $1 < \alpha < \beta$ i $M_1, M_2 > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{M_1}{x-1} \quad \text{za } x \in \langle 1, \alpha \rangle \quad \text{i} \quad |f(x)| \leq M_2 \quad \text{za } x \in \langle \beta, +\infty \rangle.$$

Na segmentu $[\alpha, \beta]$ je funkcija f neprekidna pa je i ograničena, tj. postoji konstanta $N > 0$ takva da je $|f(x)| \leq N$ za $x \in [\alpha, \beta]$. Primijetimo konačno da za svaki $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ zbog $x > 1$ i $\frac{x}{x-1} > 1$ vrijedi $|f(x)| \leq \max\{M_1, M_2, N\} \frac{x}{x-1}$.

Primjer 3. Lako je vidjeti da za svaki $x \in \mathbb{R}$ jednadžba $t + \ln t = x$ ima jedinstveno rješenje $t = f(x) > 0$. Dokažite:

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Rješenje primjera 3. Za $x \geq 1$ vrijedi $t \geq 1$, jer bi $t < 1$ zbog strogog rasta lijeve strane jednadžbe dalo $t + \ln t < 1 \leq x$. Sada se odmah vidi da za $x \geq 1$ mora biti $t \leq x$, odakle pak slijedi $f(x) = t \geq x - \ln x$, što ima za posljedicu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Sada napišimo

$$f(x) = t = x - \ln t = x - \ln(x - \ln t) = x - \ln x - \ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right).$$

Korištenjem $\ln(1 + y) = y + O(y^2)$, $y \rightarrow 0$ i $\frac{\ln t}{x} \leq \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ dobivamo

$$\ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right) = -\frac{\ln t}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

što pak u kombinaciji s prethodnim daje

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln t}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Koristeći se istim trikom zaključujemo i

$$\frac{\ln t}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{\ln t}{x}\right) = \frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty$$

pa je konačno

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + O\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) + O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Preostaje uočiti $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{\ln x}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$.

Primjene na limese

Primjer 4. Zapišite *Stirlingovu formulu* za aproksimaciju faktorijela

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1$$

koristeći gornju notaciju. Pronađite u literaturi profinjenje Stirlingove formule.

Rješenje primjera 4. Kako imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} - 1 \right) = 0,$$

možemo pisati

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} - 1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

tj.

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Preciznija varijanta Stirlingove formule glasi:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Primjer 5. Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

Rješenje primjera 5. Koristeći razvoje

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

dobivamo

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

a supstitucija daje i

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(\sin^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(\sin^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x), \quad x \rightarrow 0 \\ &= x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zato je traženi limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 + o(1))}{x^3(\frac{1}{2} + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = 2.$$

Primjer 6. Niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan je rekurzivno sa

$$x_1 \in \langle 0, \pi \rangle \text{ proizvoljan, } \quad x_{n+1} = \sin x_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je on asimptotski jednak nizu $\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{3/n}} = 1.$$

Rješenje primjera 6. Tvrdnju možemo ekvivalentno formulirati kao

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = \frac{1}{3}.$$

Lako je vidjeti da niz konvergira u 0 pa je relevantan razvoj

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

kojeg primjenjujemo ovako:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} = \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pa supstitucija $x = x_n$ daje

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{3} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Dakle je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

pa iz *Stolzovog teorema* slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{(n+1) - n} = \frac{1}{3}.$$

Ocjene integrala i redova

Primjer 7. Dokažite:

$$\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt = x + \frac{x^3}{18} + O(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Rješenje primjera 7. Lako se (kao ranije) dobije razvoj

$$\frac{t}{\sin t} = 1 + \frac{t^2}{6} + O(t^4), \quad t \rightarrow 0.$$

To znači da postoje $\delta > 0$ i $M > 0$ takvi da za $t \in \langle -\delta, \delta \rangle$ vrijedi

$$\frac{t}{\sin t} = 1 + \frac{t^2}{6} + f(t), \quad |f(t)| \leq Mt^4.$$

Integriranje za svaki $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$ daje

$$\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt = x + \frac{x^3}{18} + \int_0^x f(t) dt, \quad \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq M \left| \int_0^x t^4 dt \right| = \frac{M|x|^5}{5},$$

što je upravo tražena tvrdnja.

Primjer 8. Dokažite da konvergira red

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})}.$$

Rješenje primjera 8. Za $n \geq 0$ ocijenimo

$$\frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})} \lesssim \frac{2^n}{1 \cdot 2^{2n}} = 2^{-n},$$

dok za $n < 0$ ocijenimo

$$\frac{2^n}{(0.01 + n^2)(0.01 + 2^{2n})} \lesssim \frac{2^n}{1 \cdot 1} = 2^n.$$

Zato je traženi red dominiran s (konstantnim višekratnikom od)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n < +\infty.$$

Primjer 9. Dokažite da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} \leq C \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Rješenje primjera 9. Najprije ocijenimo gornju sumu odozgo (nepravim) integralom

$$I(n) := \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x \ln x}}.$$

Supstitucijom $t = \sqrt{\frac{\ln x}{2}}$, tj. $x = e^{2t^2}$ dobivamo

$$I(n) = \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} \frac{e^{2t^2} 4t dt}{e^{t^2} \sqrt{2} t} = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} e^{t^2} dt = \sqrt{2\pi} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{\ln n}{2}} \right),$$

pri čemu je

$$\operatorname{erfi}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

tzv. *imaginarna funkcija greške*. Koristeći poznatu asimptotiku

$$\begin{aligned} \operatorname{erfi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty \\ &= O\left(\frac{e^{z^2}}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

dobivamo

$$I(n) = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Posebno je

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

pa tvrdnja slijedi za dovoljno velike n , dok je za prvih konačno mnogo vrijednosti od n trivijalna.

Domaća zadaća

Za domaću zadaću riješite neka 4 zadatka od navedenih 6 zadataka za vježbu. Rok za predaju domaće zadaće je tri tjedna od izlaganja, tj. najkasnije u petak 29.3.2024. Napišite rješenja vlastoručno i najbolje ih uslikajte ili skenirajte pa pošaljite na moju email adresu vjekovac@math.hr. Rješenja će biti objavljena na web stranici nakon isteka roka za predaju.

Zadatak 1. Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)^5}{(\operatorname{sh} x + \sin x - 2x)^4}.$$

Zadatak 2. Dokažite da limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$$

postoji i izračunajte ga.

Zadatak 3. Dokažite da za svaki parametar $p \in [2, +\infty)$ postoji konstanta $c_p \in \langle 0, +\infty \rangle$ takva da za svake $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$|a|^p - |b|^p - p(a-b)b|b|^{p-2} \geq c_p |a-b|^p.$$

Zadatak 4. Dokažite da za svaki $a \in \langle 1, +\infty \rangle$ postoji konstanta $C_a \in \langle 0, +\infty \rangle$ takva da za svaki $b > 0$ vrijedi

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^a} \leq C_a \min\{b, 1\}.$$

Zadatak 5. Ako su $1 > a > b > 0$, dokažite da konvergira red

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{(b+1-a)j} \int_0^\infty e^{-2^j s} \frac{s^a ds}{1+s^{2a}}.$$

Zadatak 6. Koristeći literaturu (knjige, internet i sl.) za fiksirani parametar $\beta > 1$ izračunajte prva tri člana asimptotskog razvoja funkcije $I_\beta(R) := \int_R^{+\infty} \frac{dx}{(x \ln x)^\beta}$ kada $R \rightarrow +\infty$.

Tema br. 1:

Račun veličina i ocjenjivanje u matematičkoj analizi

Rješenja zadataka

Vjekoslav Kovač

Rješenje zadatka 1. Iz standardnih Taylorovih razvoja se odmah dobije

$$\operatorname{ch} x + \cos x - 2 = \frac{x^4}{12} + o(x^4), \quad \operatorname{sh} x + \sin x - 2x = \frac{x^5}{60} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

pa je traženi limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)^5}{\left(\frac{x^5}{60} + o(x^5)\right)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{20}}{12^5} + o(x^{20})}{\frac{x^{20}}{60^4} + o(x^{20})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12^5} + o(1)}{\frac{1}{60^4} + o(1)} = \frac{60^4}{12^5} = \frac{5^4}{12} = \frac{625}{12}.$$

Rješenje zadatka 2. Kako je funkcija $x \mapsto \sin(2\pi x)$ periodična s periodom 1, trebamo ispitati ponašanje od $en! - \lfloor en! \rfloor$. Najprije primijetimo

$$en! = \underbrace{\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots,$$

odakle se lako vidi

$$\begin{aligned} en! - \lfloor en! \rfloor &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(k-2)(k-1)k} \\ &= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zato je konačno

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(2\pi(en! - \lfloor en! \rfloor)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{2\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3. Primijetimo da je nejednakost homogena stupnja p pa dijeljenjem s $|b|^p \neq 0$ i supstitucijom $x = a/b$ ona postaje

$$|x|^p - 1 - p(x-1) \geq c_p |x-1|^p.$$

Definiramo li

$$f: \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{|x|^p - 1 - p(x-1)}{|x-1|^p},$$

zapravo moramo dokazati da je f omeđena odozdo nekom pozitivnom konstantom c_p . Računamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{|x|^p} - p\frac{x-1}{|x|^p}}{\left|1 - \frac{1}{x}\right|^p} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^p - 1 - p(x-1)}{(1-x)^p} = [y = 1-x] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1-y)^p - 1 + py}{y^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - py + \frac{p(p-1)}{2}y^2 + O(y^3) - 1 + py}{y^p} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{p(p-1)}{2} y^{2-p} (1 + O(y)) = \begin{cases} 1 & \text{za } p = 2, \\ +\infty & \text{za } p > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^p - 1 - p(x-1)}{(x-1)^p} = [y = x-1] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+y)^p - 1 - py}{y^p} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 + py + \frac{p(p-1)}{2}y^2 + O(y^3) - 1 - py}{y^p} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{p(p-1)}{2}y^{2-p}(1 + O(y)) = \begin{cases} 1 & \text{za } p = 2, \\ +\infty & \text{za } p > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Zato postoje $M, \delta, c'_p > 0$ takvi da je

$$f(x) \geq c'_p \text{ za svaki } x \in \langle -\infty, -M \rangle \cup \langle 1 - \delta, 1 + \delta \rangle \cup \langle M, +\infty \rangle,$$

a radi neprekidnosti od f i Bolzano–Weierstrassovog teorema postoji i $c''_p > 0$ takva da je

$$f(x) \geq c''_p \text{ za svaki } x \in [-M, 1 - \delta] \cup [1 + \delta, M].$$

Preostaje uzeti $c_p := \min\{c'_p, c''_p\} > 0$.

Rješenje zadatka 4. Za $0 < b \leq 1$ imamo

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^a} \leq \int_0^b 1 dx = b,$$

dok za $b > 1$ imamo

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^a} \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^a} < +\infty.$$

Rješenje zadatka 5. Prisjetimo se definicije gamma-funkcije:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

što je konačno za svaki $z \in \langle 0, \infty \rangle$. Za $j < 0$ ocijenimo $s^a/(1+s^{2a}) \leq s^{-a}$ pa je

$$\int_0^\infty e^{-2^j s} \frac{s^a ds}{1+s^{2a}} \leq \int_0^\infty e^{-2^j s} s^{-a} ds = [t = 2^j s] = \Gamma(1-a)2^{(a-1)j}$$

te za dio reda u rasponu $j < 0$ znamo da je

$$\lesssim \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{bj} < \infty.$$

Za $j > 0$ ocijenimo $s^a/(1+s^{2a}) \leq s^a$ pa je

$$\int_0^\infty e^{-2^j s} \frac{s^a ds}{1+s^{2a}} \leq \int_0^\infty e^{-2^j s} s^a ds = [t = 2^j s] = \Gamma(a+1)2^{-(a+1)j}$$

te za dio reda u rasponu $j > 0$ znamo da je

$$\lesssim \sum_{j=1}^\infty 2^{(b-2a)j} \leq \sum_{j=1}^\infty 2^{-aj} < \infty.$$

Rješenje zadatka 6. Koristimo nepotpunu gama funkciju

$$\Gamma(s, z) := \int_z^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

i njezin poznati asimptotski razvoj

$$\Gamma(s, z) = e^{-z} z^{s-1} \left(1 + \frac{s-1}{z} + \frac{(s-1)(s-2)}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty.$$

Supstitucijom $t = (\beta - 1) \ln x$, tj. $x = e^{t/(\beta-1)}$ dani integral postaje

$$(\beta - 1)^{\beta-1} \int_{(\beta-1) \ln R}^{+\infty} t^{-\beta} e^{-t} dt = (\beta - 1)^{\beta-1} \Gamma(-\beta + 1, (\beta - 1) \ln R)$$

pa dobivamo razvoj

$$I_{\beta}(R) = \frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{R^{\beta-1}} \frac{1}{(\ln R)^{\beta}} \left(1 - \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{1}{\ln R} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\beta - 1)^2} \frac{1}{(\ln R)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln R)^2}\right) \right), \quad R \rightarrow +\infty.$$