Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2021./2022.
`https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Tema br. 8:

Teoremi srednje vrijednosti

Vjekoslav Kovač, 20. 5. 2022.

Teorem (Rolleov[1] teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su dani realni brojevi $a < b$. Ako je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$, derivabilna na $\langle a,b\rangle$ i zadovoljava $f(a) = f(b) = 0$, tada postoji točka $\xi \in \langle a,b\rangle$ takva da je $f'(\xi) = 0$.*

Primjer 1. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ako jednadžba $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = 0$ ima barem jedno strogo pozitivno rješenje, dokažite da jednadžba $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ također ima barem jedno strogo pozitivno rješenje.

Rješenje primjera 1. Pretpostavimo da je $x = c > 0$ rješenje prve jednadžbe. Primjenom Rolleovog teorema srednje vrijednosti na (polinomijalnu, dakle i derivabilnu) funkciju

$$f\colon [0,c] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

i opservacijom $f(0) = 0$, $f(c) = 0$, dobivamo točku $\xi \in \langle 0,c\rangle$ takvu da vrijedi $f'(\xi) = 0$, tj. jednadžba $f'(x) = 0$ ima rješenje $x = \xi > 0$. Preostaje primijetiti

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

pa je $f'(x) = 0$ upravo druga jednadžba iz iskaza.

Primjer 2. Ako je funkcija $f\colon [a,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,+\infty\rangle$, derivabilna na $\langle a,+\infty\rangle$ te zadovoljava $f(a) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dokažite da tada postoji točka $\xi \in \langle a,+\infty\rangle$ takva da je $f'(\xi) = 0$. (Dakle, ovaj primjer proširuje Rolleov teorem srednje vrijednosti i na jednostrano neograničene intervale.)

Rješenje primjera 2. Ideja je komponirati f s nekom funkcijom koja će stisnuti neograničeni interval $[a,+\infty\rangle$ na ograničeni. Definirajmo $g\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ formulom

$$g(t) := \begin{cases} f(a + \operatorname{tg} t) & \text{za } t \in [0,\frac{\pi}{2}\rangle, \\ 0 & \text{za } t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Očigledno je g neprekidna na $[0,\frac{\pi}{2}\rangle$, a zbog

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} g(t) = \big[x = a + \operatorname{tg} t\big] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

je ona neprekidna na cijelom segmentu $[0,\frac{\pi}{2}]$. Osim toga, g je derivabilna na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ (kao kompozicija dviju derivabilnih funkcija) te vrijedi

$$g'(t) = f'(a + \operatorname{tg} t)\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Prema Rolleovom teoremu srednje vrijednosti primijenjenom na funkciju g postoji točka $\zeta \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ takva da je $g'(\zeta) = 0$, odakle je $f'(a + \operatorname{tg}\zeta) = 0$.

[1] Michel Rolle (1652–1719), francuski matematičar. Posebni slučaj ovog rezultata, za polinomijalne funkcije, dokazao je 1691.

Primjer 3. *Hermiteovi*[2] *polinomi* $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ definirani su formulom

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Tako je naprimjer prvih nekoliko članova tog niza dano formulama:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12.
\end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da je i općenito H_n polinom i to stupnja n. Pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ Hermiteov polinom H_n ima sve nultočke realne i kratnosti 1.

Rješenje primjera 3. Označimo $f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, tako da H_n i f_n imaju iste nultočke. Matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazujemo da f_n ima n realnih (međusobno različitih) nultočaka. Kako je H_n stupnja n, slijedit će da su to sve njegove nultočke.

Baza indukcije $n = 1$ je trivijalna, jer je $x = 0$ jedina nultočka od $f_1(x) = -2xe^{-x^2}$. Za korak indukcije uzmimo $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da f_n ima realne nultočke

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n.$$

Za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ po Rolleovom teoremu srednje vrijednosti primijenjenom na intervalu $[x_k, x_{k+1}]$ postoji $y_k \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$ takav da je $f_n'(y_k) = 0$. Nadalje, kako je $f_n(x) = \frac{(-1)^n H_n(x)}{e^{x^2}}$, odmah vidimo $\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0$ pa po Primjeru 2 postoje $y_0 \in \langle -\infty, x_1 \rangle$ i $y_n \in \langle x_n, +\infty \rangle$ takvi da je $f_n'(y_0) = f_n'(y_n) = 0$. Zato su

$$y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n$$

realne nultočke funkcije $f_{n+1} = f_n'$.

Teorem (Lagrangeov[3] teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su dani realni brojevi $a < b$. Ako je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b \rangle$, tada postoji točka $\xi \in \langle a, b \rangle$ takva da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

(*Rolle*)$\Rightarrow$(*Lagrange*): Primijenimo Rolleov teorem srednje vrijednosti na funkciju definiranu formulom $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ te uočimo $g(a) = g(b) = 0$ i $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(*Lagrange*)$\Rightarrow$(*Rolle*): Uzmimo poseban slučaj kada je $f(a) = f(b) = 0$.

Primjer 4. (Darbouxov[4] teorem o međuvrijednostima derivacije) Neka su $\alpha < \beta$ realni brojevi i $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Ako je $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$, tada za svaki broj y između $f'(\alpha)$ i $f'(\beta)$ postoji $\xi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takav da je $f'(\xi) = y$.

Kratko kažemo da derivacija funkcije ima svojstvo međuvrijednosti (poput neprekidnih funkcija, premda ona sama ne mora biti neprekidna).

[2]Charles Hermite (1822–1901), francuski matematičar. Pisao je o tim polinomima 1864., ali prije njega su ih već proučavali Laplace 1810. i Čebišev 1859.

[3]Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), rođen kao Giuseppe Lodovico Lagrangia, talijansko-francuski matematičar i astronom. Rezultat je u ovom obliku prvi dokazao Cauchy 1823.

[4]Jean-Gaston Darboux (1842–1917), francuski matematičar.

Rješenje primjera 4. Definirajmo novu funkciju $g\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ formulom

$$g(x) := \begin{cases} f'(\alpha) & \text{za } x=\alpha, \\ \frac{f(2x-\alpha)-f(\alpha)}{2x-2\alpha} & \text{za } x\in\left\langle \alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \\ \frac{f(\beta)-f(2x-\beta)}{2\beta-2x} & \text{za } x\in\left\langle \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right\rangle, \\ f'(\beta) & \text{za } x=\beta. \end{cases}$$

Lako se provjeri da je ona neprekidna. Naprimjer,

$$\lim_{x\to\alpha+} g(x) = \lim_{x\to\alpha+} \frac{f(2x-\alpha)-f(\alpha)}{2x-2\alpha} = [t=2x-\alpha] = \lim_{t\to\alpha+} \frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha).$$

Kako je y broj između $g(\alpha)$ i $g(\beta)$, po Bolzano[5]-Weierstrassovom[6] teoremu o međuvrijednostima neprekidne funkcije postoji $\gamma\in\langle\alpha,\beta\rangle$ takav da je $g(\gamma)=y$.

- Ako je $\gamma\in\left\langle \alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, tada po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi\in\langle\alpha, 2\gamma-\alpha\rangle$ takav da je $f'(\xi) = \frac{f(2\gamma-\alpha)-f(\alpha)}{2\gamma-2\alpha} = g(\gamma) = y$.
- Ako je $\gamma\in\left\langle \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right\rangle$, tada po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi\in\langle 2\gamma-\beta, \beta\rangle$ takav da je $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(2\gamma-\beta)}{2\beta-2\gamma} = g(\gamma) = y$.

Teorem (Cauchyjev[7] teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su dani realni brojevi $a<b$. Ako su funkcije $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidne na $[a,b]$, derivabilne na $\langle a,b\rangle$ i $g'(x)\neq 0$ za svaki $x\in\langle a,b\rangle$, tada postoji točka $\xi\in\langle a,b\rangle$ takva da je*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(*Rolle*)⇒(*Cauchy*): Napomenimo da iz Rolleovog teorema srednje vrijednosti slijedi $g(b)-g(a)\neq 0$. Primijenimo još Rolleov teorem srednje vrijednosti na funkciju definiranu formulom $h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ te uočimo $h(a)=h(b)=0$ i $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$.
(*Cauchy*)⇒(*Lagrange*): Uzmimo poseban slučaj kada je $g(x)\equiv x$.

Primjer 5. Neka su $0<a<b$ i $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Dokažite da postoji $\xi\in\langle a,b\rangle$ takav da je

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

Rješenje primjera 5. Definirajmo funkcije $u,v\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ formulama

$$u(x) := \frac{f(x)}{x}, \quad v(x) := \frac{1}{x},$$

tako da je

$$u'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}, \quad v'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Cauchyjev teorem srednje vrijednosti primijenjen na funkcije u i v daje točku $\xi\in\langle a,b\rangle$ takvu da je

$$\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} = \frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)},$$

[5]Bernard Bolzano (1781–1848), rođen kao Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano, češki matematičar, logičar, filozof i teolog.
[6]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), njemački matematičar.
[7]Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francuski matematičar.

što se transformira u

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

Teorem (Taylorov[8] teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka su dani realni brojevi $a < b$ i cijeli broj $n \geq 0$. Ako je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ klase C^n na $[a,b]$ i $f^{(n+1)}$ postoji na $\langle a,b\rangle$, tada postoji točka $\xi \in \langle a,b\rangle$ takva da je*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Analogna tvrdnja vrijedi kada je $b < a$ te se obično dva slučaja objedinjuju i samo se kaže da je ξ između a i b.

(*Rolle*)⇒(*Taylor*): Primijenimo Rolleov teorem srednje vrijednosti na funkciju definiranu formulom $h(x) := g(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} g(a)$, pri čemu je $g(x) := f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$ te uočimo

$$\begin{aligned}
&h(a) = 0, \quad h(b) = g(b) = 0,\\
&g'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x),\\
&h'(x) = (b-x)^n \Big(-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{n+1}{(b-a)^{n+1}} g(a) \Big),\\
&g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.
\end{aligned}$$

(*Taylor*)⇒(*Lagrange*): Uzmimo poseban slučaj kada je $n = 0$.

Primjer 6. Neka je $a \in \mathbb{R}$, neka je f dvaput derivabilna na $\langle a, +\infty\rangle$ i neka su

$$M_i := \sup_{x \in \langle a,+\infty\rangle} |f^{(i)}(x)|$$

za $i = 0, 1, 2$. Ako je $M_2 > 0$, dokažite da vrijedi $M_1^2 \leq 4 M_0 M_2$.

Rješenje primjera 6. Primijetimo da iz $M_2 > 0$ slijedi i $M_0 > 0$. Uzmimo $x \in \langle a, +\infty\rangle$, $h > 0$. Prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi \in \langle x, x+h\rangle$ takav da je

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi

$$|f'(x)| \leq \Big| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \Big| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2,$$

a uzimanjem supremuma po x dobivamo $M_1 \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$. Tražena nejednakost slijedi odabirom $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$.

Primjer 7. Pretpostavimo da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ triput derivabilna i da su funkcije f, f', f'', f''' strogo pozitivne na cijelom $\mathbb{R}$. Ako je $f'''(x) \leq f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, dokažite da vrijedi $f'(x) < 2f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

[8] Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar. Formulirao je verziju ovog rezultata 1712., ali je tek Lagrange ponudio ovu precizniju formulaciju.

Rješenje primjera 7. Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}$ i $h > 0$ te označimo $A = f(x)$, $B = f'(x)$, $C = f''(x)$. Poznato je da su funkcije f, f', f'' rastuće. Prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi_1 \in \langle x - h, x\rangle$ takav da je

$$0 < f(x-h) = A - Bh + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2 \leq A - Bh + \frac{1}{2}Ch^2,$$

a uzimanjem $h = B/C$ (formula za tjeme parabole) dobivamo $B^2 < 2AC$. Također prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi_2 \in \langle x - h, x\rangle$ takav da je

$$0 < f'(x-h) = B - Ch + \frac{1}{2}\underbrace{f'''(\xi_2)}_{\leq f(\xi_2)}h^2 \leq B - Ch + \frac{1}{2}Ah^2,$$

a uzimanjem $h = C/A$ dobivamo $C^2 < 2AB$. Dakle, imamo

$$B^4 < 4A^2C^2 < 8A^3B = (2A)^3B,$$

tj. $B < 2A$.

Primjer 8. Za $f \in \mathrm{C}^1([a,b])$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$\Delta_n := \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) - \int_a^b f(x)dx.$$

Dokažite

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Rješenje primjera 8. Primijetimo da je Δ_n razlika Riemannove[9] sume funkcije f za ekvidistantnu subdiviziju na intervale $I_k := \big[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\big]$ evaluirane u desnim krajevima tih intervala i integrala funkcije f na segmentu $[a,b]$. Zapišimo:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{k=1}^{n}\bigg(\frac{b-a}{n}f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) - \int_{I_k} f(x)dx\bigg)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{I_k}\Big(f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) - f(x)\Big)dx.\end{aligned}$$

Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in I_k$ postoji $\xi \in I_k$ tako da vrijedi

$$f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) - f(x) = f'(\xi)\Big(\underbrace{\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) - x}_{\geq 0}\Big).$$

Označimo li s m_k i M_k redom minimum i maksimum od f' na I_k, integriranje po $x \in I_k$ i korištenje

$$\int_{I_k}\Big(\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) - x\Big)dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2$$

daju

$$m_k\frac{1}{2}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \leq \int_{I_k}\Big(f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) - f(x)\Big)dx \leq M_k\frac{1}{2}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2,$$

[9] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njemački matematičar.

odakle je

$$\frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} m_k \le \Delta_n \le \frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k,$$

tj.

$$\frac{b-a}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \le n\Delta_n \le \frac{b-a}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

U gornjoj ocjeni prepoznajemo izraze za donje i gornje Darbouxove sume funkcije f'. Kako je ta funkcija Riemann-integrabilna, a očice subdivizija teže u 0, te Darbouxove sume konvergiraju prema integralu pa (po teoremu o sendviču) dobivamo i

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx = \frac{b-a}{2}\big(f(b)-f(a)\big).$$

Primjer 9. Dokažite

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k \sim \sqrt{2}\Big(\frac{4n}{e}\Big)^n, \quad \text{kada } n\to\infty,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\left(\frac{4n}{e}\right)^n} = \sqrt{2}.$$

Rješenje primjera 9. Logaritmiranjem razlomka iz zadatka dobivamo:

$$\begin{aligned}\ln\frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\left(\frac{4n}{e}\right)^n} &= \sum_{k=n+1}^{2n}\ln k - n(\ln 4+\ln n-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(n+k)-\ln n\big) - n\ln\frac{4}{e} = \sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\ln\frac{4}{e}.\end{aligned}$$

Promotrimo funkciju $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+x)$. Kako je

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = \begin{bmatrix} u=\ln(1+x) & du=\frac{dx}{1+x}\\ dv=dx & v=x\end{bmatrix} = \big(x\ln(1+x)\big)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{xdx}{1+x} = 2\ln 2-1 = \ln\frac{4}{e},$$

gornji logaritamski izraz je upravo $n\Delta_n$ za

$$\Delta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_0^1 f(x)dx,$$

a iz prethodnog primjera znamo

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{1}{2}(1-0)\big(f(1)-f(0)\big) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}.$$

Alternativno se zadatak može riješiti korištenjem Stirlingove formule:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n, \quad \text{kada } n\to\infty,$$

tako da se zapiše:

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k = \frac{(2n)!}{n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2}\Big(\frac{4n}{e}\Big)^n.$$

Zadaci za vježbu.

Zadatak 1. Za realne brojeve $a < b$ neka su $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije koje su derivabilne na $\langle a,b\rangle$. Dokažite da postoji točka $\xi \in \langle a,b\rangle$ takva da je

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Zadatak 2. Ako je f realna, dvaput derivabilna na $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ i $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$, dokažite da postoji $x_0 \in \langle 0,1\rangle$ takav da je $f''(x_0) \geq 8$.

Zadatak 3. Pretpostavimo da je f realna, tri puta derivabilna na $[-1,1]$ i takva da je $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Dokažite da postoji $x_0 \in \langle -1,1\rangle$ takav da je $f^{(3)}(x_0) \geq 3$.

Zadatak 4. Ako je funkcija $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[0,+\infty\rangle$ i derivabilna na $\langle 0,+\infty\rangle$ te ako vrijedi $f(0) = 1$ i $|f(x)| \leq e^{-x}$ za svaki $x > 0$, dokažite da postoji točka $\xi > 0$ takva da je $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

Zadatak 5. Ako je $f\colon \langle 0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 takva da je $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0+} f''(x) = +\infty$, dokažite da vrijedi $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

Zadatak 6. Profesor Zbunjić izračunao je vrlo kompliciranu formulu za neku funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ klase C^1, a želi dokazati da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Objasnite mu da je dovoljno naći $\delta, \varepsilon, M > 0$ takve da je $M\delta < \varepsilon$ i brojeve $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ takve da vrijedi:

- $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$,
- $f(x_k) \geq \varepsilon$ za svaki $k = 0, 1, \ldots, n$,
- $|f'(x)| \leq M$ za svaki $x \in [a,b]$.

Zadatak 7. Neka su $a < b$ realni brojevi i neka je $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Pretpostavimo da za svake različite $x, y \in \langle a,b\rangle$ postoji jedinstveni $z \in \langle a,b\rangle$ takav da je $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$. Dokažite da je funkcija f ili strogo konveksna ili strogo konkavna.

Zadatak 8. Neka su dani $n \in \mathbb{N}_0$, realni brojevi $a < b$, realni brojevi $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ iz intervala $[a,b]$, neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ koja ima $(n+1)$-vu derivaciju na $\langle a,b\rangle$ i polinom P stupnja najviše n takav da je $P(x_j) = f(x_j)$ za $j = 0, 1, \ldots, n$. Dokažite da za svaki $x \in [a,b]$ postoji točka $\xi \in \langle a,b\rangle$ takva da vrijedi

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n).$$

Zadatak 9. Za $f \in \mathrm{C}^2([a,b])$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$\widetilde{\Delta}_n := \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\Big).$$

Dokažite

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \widetilde{\Delta}_n = \frac{1}{24}(b-a)^2\big(f'(b) - f'(a)\big).$$

Zadatak 10. Označimo:

$$U_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad V_n := \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \frac{2}{2n+5} + \cdots + \frac{2}{4n-1}.$$

Dokažite da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ln 2, \quad \lim_{n\to\infty} V_n = \ln 2, \quad \lim_{n\to\infty} n(\ln 2 - U_n) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - V_n) = \frac{1}{32}.$$

Napomenimo da se posljednje dvije jednakosti mogu alternativno zapisati:

$$U_n = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad V_n = \ln 2 - \frac{1}{32n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Domaća zadaća. Riješite barem 5 zadataka od gore navedenih 10 zadataka za vježbu.
Rok predaje: petak 10. 6. 2022. (3 tjedna od izlaganja)
Rješenja mi možete poslati skenirana ili uslikana e-mailom.

Tema br. 8:

Teoremi srednje vrijednosti

Rješenja zadataka za vježbu

Vjekoslav Kovač

Rješenje zadatka 1. Ako definiramo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ formulom

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix},$$

tada linearnost deriviranja za $x \in \langle a,b \rangle$ daje

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Kako determinanta s dva jednaka retka mora iznositi 0, zaključujemo $F(a) = F(b) = 0$. Preostaje primijeniti Rolleov teorem srednje vrijednosti.

Rješenje zadatka 2. Kako je f neprekidna na $[0,1]$, postiže se minimum iz zadatka, tj. postoji $c \in \langle 0,1 \rangle$ za kojeg je $f(c) = -1$. Kako je c točka lokalnog minimuma, imamo i $f'(c) = 0$. Prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi_1 \in \langle 0,c \rangle$ takav da vrijedi

$$0 = f(0) = \underbrace{f(c)}_{=-1} - \underbrace{f'(c)c}_{=0} + \frac{1}{2} f''(\xi_1) c^2, \qquad \text{tj. } f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}$$

te postoji $\xi_2 \in \langle c,1 \rangle$ takav da vrijedi

$$0 = f(1) = \underbrace{f(c)}_{=-1} + \underbrace{f'(c)(1-c)}_{=0} + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(1-c)^2, \qquad \text{tj. } f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2}.$$

Ako je $c \leq \frac{1}{2}$, onda imamo $f''(\xi_1) \geq 8$, a ako je $c \geq \frac{1}{2}$, onda imamo $f''(\xi_2) \geq 8$.

Rješenje zadatka 3. Prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti postoje $\xi_1 \in \langle -1,0 \rangle$ i $\xi_2 \in \langle 0,1 \rangle$ takvi da je

$$0 = f(-1) = \underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{f'(0)}_{=0} + \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

te

$$1 = f(1) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{=0} + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_2).$$

Oduzimanje daje

$$f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2) = 6$$

pa barem jedan od brojeva $f^{(3)}(\xi_1), f^{(3)}(\xi_2)$ nije manji od 3.

Rješenje zadatka 4. Definirajmo $g\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ formulom $g(x) := e^{-x} - f(x)$. Ta funkcija je neprekidna na $[0,+\infty\rangle$ i derivabilna na $\langle 0,+\infty \rangle$ te je

$$g'(x) = -e^{-x} - f'(x).$$

Nadalje vrijedi $g(0) = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ pa po Primjeru 2 postoji točka $\xi \in \langle 0,+\infty \rangle$ takva da je

$$g'(\xi) = 0, \quad \text{tj. } f'(\xi) = -e^{-\xi}.$$

Rješenje zadatka 5. Postoji $r > 0$ takav da je $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 0, r\rangle$. Zato je f padajuća, a f' rastuća na $\langle 0, r\rangle$. Za svake $0 < x < \varepsilon < r$ po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi \in \langle x, \varepsilon\rangle$ takav da je

$$f(\varepsilon) - f(x) = f'(\xi)(\varepsilon - x) \geq f'(x)(\varepsilon - x),$$

odakle slijedi

$$\frac{f(\varepsilon)}{f'(x)} - \varepsilon + x \leq \frac{f(x)}{f'(x)} \leq \frac{f(\varepsilon)}{f'(x)}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0+} |f(\varepsilon)/f'(x)| = 0$, postoji $\delta \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ takav da za svaki $x \in \langle 0, \delta\rangle$ vrijedi $|f(\varepsilon)/f'(x)| < \varepsilon$, što povlači

$$-2\varepsilon < \frac{f(x)}{f'(x)} < \varepsilon.$$

Na taj način smo dobili $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)/f'(x) = 0$.

Rješenje zadatka 6. Uzmimo $x \in [a, b]$ i $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Štoviše, možemo pretpostaviti $x_{k-1} < x < x_k$, jer je za $x \in \{x_{k-1}, x_k\}$ očigledno $f(x) \geq \varepsilon > 0$. Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi \in \langle x_{k-1}, x\rangle$ takav da je

$$f(x) = f(x_{k-1}) + f'(\xi)(x - x_{k-1}) \geq \varepsilon - M\delta > 0.$$

Rješenje zadatka 7. Zbog neprekidnosti od f dovoljno je pokazati da:

- ili za svake $a < x < y < b$ vrijedi $f\big(\frac{x+y}{2}\big) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$,
- ili za svake $a < x < y < b$ vrijedi $f\big(\frac{x+y}{2}\big) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

U protivnom postoje $x_0 < y_0$ i $x_1 < y_1$ takvi da je $f\big(\frac{x_0+y_0}{2}\big) \geq \frac{f(x_0)+f(y_0)}{2}$, $f\big(\frac{x_1+y_1}{2}\big) \leq \frac{f(x_1)+f(y_1)}{2}$. Definirajmo funkciju

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(t) := f(z_t) - \frac{f(x_t) + f(y_t)}{2},$$

pri čemu je

$$x_t := (1-t)x_0 + tx_1, \quad y_t := (1-t)y_0 + ty_1, \quad z_t := \frac{x_t + y_t}{2}.$$

Ona je svakako neprekidna i $g(0) \geq 0$, $g(1) \leq 0$ pa postoji $s \in [0, 1]$ takav da je $g(s) = 0$, što posebno znači

$$\frac{f(z_s) - f(x_s)}{z_s - x_s} = \frac{f(y_s) - f(x_s)}{y_s - x_s} = \frac{f(y_s) - f(z_s)}{y_s - z_s}.$$

Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti primijenjenom na intervalima $[x_s, z_s]$ i $[z_s, y_s]$ postoje točke $\xi_1 \in \langle x_s, z_s\rangle$ i $\xi_2 \in \langle z_s, y_s\rangle$ takve da su $f'(\xi_1)$ i $f'(\xi_2)$ također jednaki gornjim razlomcima, što je u kontradikciji s pretpostavkom iz iskaza primijenjenom na $x = x_s$, $y = y_s$. (Vidimo da smo riješili i malo općenitiji zadatak, kod kojeg se pretpostavlja jedinstvenost točke z samo između x i y.)

Rješenje zadatka 8. Ako je $x = x_j$ za neki j, onda su obje strane 0 za bilo koji ξ. Zato pretpostavimo $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$. Definirajmo funkciju $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ formulom

$$g(y) := f(y) - P(y) - \frac{(y - x_0)(y - x_1)\cdots(y - x_{n-1})(y - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)}\big(f(x) - P(x)\big).$$

Ona ima barem $n+2$ realne nultočke $x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ pa iz Rolleovog teorema induktivno (kao u Primjeru 3) zaključujemo da $g^{(n+1)}$ ima barem jednu nultočku $\xi \in \langle a, b\rangle$. Preostaje primijetiti

$$g^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - \frac{(n+1)!}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)}\big(f(x) - P(x)\big).$$

Rješenje zadatka 9. Primijetimo da je $\widetilde{\Delta}_n$ razlika integrala funkcije f na segmentu $[a, b]$ i Riemannove sume funkcije f za ekvidistantnu subdiviziju na intervale $I_k := \big[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\big]$ evaluirane u polovištima tih intervala. Zapišimo:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_n &= \sum_{k=1}^{n} \bigg(\int_{I_k} f(x)dx - \frac{b-a}{n} f\Big(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\Big)\bigg) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} \Big(f(x) - f\big(a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n}\big)\Big)dx.
\end{aligned}$$

Prema Taylorovom teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in I_k$ postoji $\xi \in I_k$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} & f(x) - f\big(a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n}\big) \\ & = f'\big(a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n}\big)\Big(x - (a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n})\Big) + \frac{1}{2} f''(\xi)\Big(x - (a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n})\Big)^2. \end{aligned}$$

Označimo li s m_k i M_k redom minimum i maksimum od f'' na I_k, integriranje po $x \in I_k$ i korištenje

$$\int_{I_k} \Big(x - (a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n})\Big)^2 dx = \int_{-\frac{b-a}{2n}}^{\frac{b-a}{2n}} y^2 dy = \frac{2}{3}\Big(\frac{b-a}{2n}\Big)^3$$

daju

$$0 + \frac{1}{2} m_k \frac{2}{3}\Big(\frac{b-a}{2n}\Big)^3 \le \int_{I_k} \Big(f(x) - f\big(a + (2k-1)\tfrac{b-a}{2n}\big)\Big) dx \le 0 + \frac{1}{2} M_k \frac{2}{3}\Big(\frac{b-a}{2n}\Big)^3,$$

odakle je

$$\frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=1}^{n} m_k \le \widetilde{\Delta}_n \le \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=1}^{n} M_k,$$

tj.

$$\frac{(b-a)^2}{24} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k \le n^2 \widetilde{\Delta}_n \le \frac{(b-a)^2}{24} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

U gornjoj ocjeni prepoznajemo izraze za donje i gornje Darbouxove sume funkcije f''. Kako je ta funkcija Riemann-integrabilna, a očice subdivizija teže u 0, te Darbouxove sume konvergiraju prema integralu pa (po teoremu o sendviču) dobivamo i

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \widetilde{\Delta}_n = \frac{(b-a)^2}{24} \int_a^b f''(x) dx = \frac{(b-a)^2}{24} \big(f'(b) - f'(a)\big).$$

Rješenje zadatka 10. Definiramo funkciju $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) := \frac{1}{1+x}$. Ona je očigledno klase C^2. Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = U_n, \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2n+2k-1} = V_n. \end{aligned}$$

Kako su to Riemannove sume za ekvidistantne subdivizije od $[0,1]$, odmah dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln 2, \quad \lim_{n\to\infty} V_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln 2.$$

Nadalje, iz Primjera 8 i prethodnog zadatka, uz korištenje $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, slijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n(\ln 2 - U_n) &= -\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = -\frac{1}{2}(1-0)(f(1)-f(0)) = \frac{1}{4}, \\ \lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - V_n) &= \lim_{n\to\infty} n^2 \widetilde{\Delta}_n = \frac{1}{24}(1-0)(f'(1)-f'(0)) = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$