Matematička analiza 2 — Teži zadaci za vježbu

1. Što je veće: e^π ili π^e ? Pokušajte formulirati i dokazati nešto općenitiju tvrdnju.

2. Odredite broj rješenja jednadžbe $\cos x + \ln\cos x + x^2 = 0$ u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

3. Pretpostavimo da su α, β, γ kutovi nekog šiljastokutnog trokuta. Dokažite nejednakosti:

   (a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

   (b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \ge \frac{9\sqrt{3}}{2}$

   (c) $\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{\sin\gamma}{\gamma} \le \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$

4. (a) Dokažite verziju *Rolleovog teorema* za neograničeni interval:
   Ako je funkcija $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[0,+\infty\rangle$ i derivabilna na $\langle 0,+\infty\rangle$ te ako je $f(0) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, onda postoji $c \in \langle 0,+\infty\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.

   (b) Funkcija $g\colon \langle 0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je derivabilna te zadovoljava $|g(x)-1| \le x$ i $|g(x)| \le \frac{1}{x}$ za svaki $x > 0$. Dokažite da postoji $c > 0$ takav da je $g'(c) = -e^{-c}$.

5. Neka su $n \in \mathbb{N}$ te $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dokažite da jednadžba $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(k\pi x) = 0$ ima barem dva rješenja u intervalu $[0, 2\rangle$.

6. (a) Dokažite *Darbouxov teorem*:
   Ako je funkcija f derivabilna na otvorenom intervalu koji sadrži točke a i b, onda za svaki broj d između $f'(a)$ i $f'(b)$ postoji točka c između a i b takva da je $f'(c) = d$.
   (*Ukratko*: Derivacija funkcije poprima sve međuvrijednosti.)

   (b) Dokažite da funkcija $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa

   $$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ 1 & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

   nema primitivnu funkciju.

   (c) Nađite primjer funkcije sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koja nema primitivnu funkciju, nema uklonjivih prekida niti prekida prve vrste te je Riemann-integrabilna na svakom segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

7. Ako je $f(x) = \operatorname{arctg} x$ te ako označimo $M_n := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$, izračunajte limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{n!}$.

8. Funkcija $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ je klase C^2 i takva da vrijedi $f(0) = f(1) = 1$ te $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$. Kolika je najmanja moguća vrijednost od $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)$? Nađite neku funkciju f za koju se ta vrijednost postiže.

9. Dokažite da za svaku neprekidnu funkciju $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ vrijedi

   $$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx.$$

10. Izračunajte integral $\displaystyle\int\limits_{-2006\pi}^{2006\pi} \min\{|\cos 4x|, |\sin 8x|\}\ dx$.

11. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ izračunajte nepravi integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.