VEKTORSKI PROSTORI

GORAN MUIĆ I MIRKO PRIMC

Sadržaj

1. Dualni prostor 4
1.1. Uvodne napomene 4
1.2. Linearna kombinacija vektora. Linearna nezavisnost vektora 4
1.3. Koordinatizacija 5
1.4. Linearni operatori 5
1.5. Kompozicija linearnih preslikavanja 6
1.6. Linearan operator zadan na bazi. Matrica operatora 6
1.7. Jezgra i slika operatora 6
1.8. Dualan prostor 7
1.9. Kanonska bilinearna forma 8
1.10. Adjungirani operator 8
1.11. Kanonski izomorfizam 10
1.12. Anihilatori skupova u V i V'. 11
1.13. Rang adjungiranog operatora 12
2. Minimalni polinom linearnog operatora 13
2.1. Algebra operatora 13
2.2. Regularni operatori 14
2.3. Koordinatizacija 14
2.4. Matrica operatora i algebra matrica 15
2.5. Determinanta i svojstveni polinom operatora 17
2.6. Algebra polinoma i evaluacija 18
2.7. Minimalni polinom operatora 19
2.8. Računanje minimalnog polinoma 21
2.9. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori 23
3. Nilpotentni operatori 24
3.1. Invarijantni potprostori 24
3.2. Nilpotentni operatori i indeks nilpotentnosti 25
3.3. Važna lema 25
3.4. Elementarna Jordanova klijetka; slučaj $p = \dim V = n$ 27
3.5. Opći slučaj: $p \leq \dim V = n$ 29
3.6. Minimalni polinom nilpotentnog operatora 36
4. Poluprosti operatori 37
4.1. Definicija 37
4.2. Minimalni polinom poluprostog operatora 37
4.3. Karakterizacija poluprostog operatora 40

5. Jordanova forma 43
5.1. Nilpotentni i poluprosti operatori 43
5.2. Faktorizacija minimalnog i svojstvenog polinoma 43
5.3. Rastavljanje racionalne funkcije $1/\mu_A(\lambda)$ na parcijalne razlomke 43
5.4. Potprostori $\ker(A-\lambda I)^m$ za svojstvenu vrijednost λ 45
5.5. Korijeni potprostori linearnog operatora 46
5.6. Teorem o Jordanovom rastavu linearnog operatora 48
5.7. Jordanova forma operatora 51
5.8. Elementarni divizori linearnog operatora 53
6. Funkcija operatora 55
6.1. Deriviranje polinoma 55
6.2. Taylorova formula 56
6.3. Polinom operatora 56
6.4. Funkcija operatora $f(A)$ 57
6.5. Funkcija operatora i Jordanova forma 57
6.6. Funkcionalni račun 58
6.7. Klasa funkcija $\mathcal{F}(A)$ 60
6.8. Baza algebre polinoma od A 60
6.9. Elementarni divizori od $f(A)$ 62
6.10. Pojam konvergencije na n-dimenzionalnom prostoru 64
6.11. Redovi potencija operatora 65
6.12. Deriviranje vektor-značne funkcije 66
6.13. Deriviranje eksponencijalne funkcije 66
7. Geometrija unitarnih prostora 68
7.1. Bilinearne forme 68
7.2. Seskvilinearne forme 69
7.3. Pozitivne i strogo pozitivne hermitske forme 69
7.4. Skalarni produkt; Unitaran prostor 70
7.5. Gramova matrica i determinanta 75
7.6. Gram–Schmidtov postupak ortogonalizacije 76
7.7. Ortogonalna suma potprostora; ortogonalan komplement 81
7.8. Teorem o projekciji i najbolja aproksimacija 82
8. Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje 83
8.1. Antilinearna preslikavanja; konjugirani vektorski prostor 83
8.2. Reprezentacija linearnog funkcionala 84
8.3. Hermitski adjungirani operator 85
8.4. Matrična realizacija hermitskog adjungiranja 88
8.5. Seskvilinearne forme 89
9. Unitarni i hermitski operatori 91
9.1. Unitarni operatori 91
9.2. QR-faktorizacija 94
9.3. Teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora 95
9.4. Hermitski operatori 96
9.5. Teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora 99
9.6. Pozitivni i strogo pozitivni hermitski operatori 100

10. Normalni operatori 106
10.1. Projektori 106
10.2. Hermitski projektori 107
10.3. Normalni operatori 109
10.4. Normalni operatori na realnim prostorima 111

1. Dualni prostor

1.1. **Uvodne napomene.** Ovaj kolegij se nastavlja na ranije kolegije iz linearne algebre. Neke pojmove i rezultate od ranije koristiti ćemo. Njih ćemo ponoviti kroz teorijske zadatke koji se nalaze na službenom web-u kolegija.

Uvodimo notaciju koju ćemo koristiti u cijelom kolegiju:

- K je polje; za nas najčešće polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$
- $V, W, U, \ldots$ označava, ako se ne naglasi drugačije, konačno dimenzionalan vektorski prostor nad K
- $v, w, u, x, y, \ldots$ su oznake za vektore
- $A, B, C, \ldots$ su oznake za linearne operatore ili matrice
- 0 označava nul–vektor ili nulu u K
- skalari su obično označeni grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

1.2. **Linearna kombinacija vektora. Linearna nezavisnost vektora.** U sljedećih nekoliko definicija V je proizvoljan vektorski prostor. Neka su $v_1, \ldots, v_n \in V$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Tada se vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

naziva linearna kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_n$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Neka je $S \subset V$ bilo koji neprazan podskup. Iz linearne algebre znamo da je skup svih linearnih kombinacija $[S]$ vektora iz S vektorski potprostor u V. Kažemo da S razapinje V ako $[S] = V$. Ponekad ćemo za konačan skup $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ pisati i $[S] = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.

Skup S se sastoji od linearno nezavisnih vektora ako za svaki konačan niz $v_1, \ldots, v_n \in S$ vrijedi

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Tada nul–vektor nije element skupa S.

Neka je $S \subseteq V$ bilo koji neprazan podskup koji se sastoji od linearno nezavisnih vektora. Kažemo da je S baza za V ako je $[S] = V$.

Neka je V vektorski prostor različit od nul–vektorskog prostora tj. $V \neq \{0\}$. Neka je $S \subset V$ bilo koji neprazan podskup koji razapinje V. Tada postoji $S' \subseteq S$ koji je baza za V.

V je konačno dimenzionalan nad K ako postoji konačan i neprazan skup S koji razapinje V. Posebno, prema prethodnome paragrafu, postoji baza

S s konačno mnogo elemenata. Sve baze imaju isti broj elemenata i taj broj nazivamo dimenzija prostora V.

1.3. **Koordinatizacija.** Od sada su svi vektorski prostori konačno dimenzionalni. Uređena baza za V, $n = \dim V$ je uređena n-torka vektora iz V

$$e = (e_1, \ldots, e_n).$$

takva da je

$$S = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

baza za V. Razlog za prelazak na uređenu bazu je koordinatizacija od V koja je temeljena na slijedećem principu:

Za svaki $v \in V$ postoji jedinstvena uređena n-torka skalara $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ takva da

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

To nam omogućuje identifikacije

$$V \longleftrightarrow M_{n\times 1}(K), \quad v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

ili

$$V \longleftrightarrow M_{1\times n}(K), \quad v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots & , \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$M_{m\times n}(K)$ je vektorski prostor svih matrica koje imaju m redaka i n stupaca:

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}. \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} \in K.$$

Njegova je dimenzija mn.

1.4. **Linearni operatori.** Preslikavanje $A : V \to W$ naziva se linearan operator ako vrijedi

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay, \quad \forall x, y \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Skup svih linearnih operatora $V \to W$ označavamo s $L(V, W)$. Skup $L(V, W)$ je vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja vektora s skalarom:

- $(A + B)x \overset{def}{=} Ax + Bx, \quad A, B \in L(V, W), \ x \in V;$
- $(\lambda A)x \overset{def}{=} \lambda Ax, \quad A \in L(V, W), \ x \in V, \ \lambda \in K.$

1.5. **Kompozicija linearnih preslikavanja.** Neka je $A \in L(V,W)$ i $B \in L(W,U)$. Tada definiramo linearan operator $BA \in L(V,U)$ kao kompoziciju preslikavanja:

$$(BA)x \stackrel{def}{=} B(Ax), \quad x \in V.$$

1.6. **Linearan operator zadan na bazi. Matrica operatora.** Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza za V i $w_1, \dots, w_n$ bilo koji niz vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A \in L(V,W)$ takav da

$$Ae_i = w_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Eksplicitno, za vektor

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V,$$

imamo

$$Av = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

Ako je $f = (f_1, \dots, f_m)$ baza za W. Onda možemo pisati

$$\begin{cases} Ae_1 = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \cdots + \alpha_{m1} f_m \\ Ae_2 = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \cdots + \alpha_{m2} f_m \\ \vdots \\ Ae_n = \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \cdots + \alpha_{mn} f_m \end{cases}$$

te na taj način operatoru A pridružujemo matricu

$$A(f,e) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}. \end{pmatrix}.$$

Matrica $A(f,e)$ naziva se matrica operatora A u paru baza f i e. Na taj način dolazimo do identifikacije

$$A \longleftrightarrow A(f,e), \quad L(V,W) \longleftrightarrow M_{m\times n}(K),$$

koja pokazuje da je

$$\dim L(V,W) = mn = \dim V \cdot \dim W.$$

Ova identifikacija ovisi o izboru baze e za V i baze f za W.

1.7. **Jezgra i slika operatora.** Neka je $A \in L(V,W)$. Tada definiramo:

- Slika operatora A je vektorski potprostor u W zadan s $R(A) \stackrel{def}{=} \mathrm{im} A \stackrel{def}{=} \{w \in W;\ \ \exists v \in V,\ w = Av\}$. Dimenzija vektorskog prostora $R(A)$ naziva se rang operatora A i označava s $r(A)$.
- Jezgra operatora A je vektorski potprostor u V zadan s $N(A) \stackrel{def}{=} \ker A \stackrel{def}{=} \{v \in V;\ \ Av = 0\}$. Dimenzija vektorskog prostora $N(A)$ naziva se defekt operatora A i označava s $d(A)$.

Neka je $A \in L(V, W)$. Iz Linearne algebre znamo:

- A je injektivan ako i samo ako $N(A) = \{0\}$ ako i samo ako $d(A) = 0$;
- A je surjektivan ako i samo ako $R(A) = W$ ako i samo ako $r(A) = \dim W$.
- Teorem o rangu i defektu: $r(A) + d(A) = \dim V$.

1.8. **Dualan prostor.** Dualni prostor, u oznaci V' (ili V^*), prostora V definira se s $V' = L(V, K)$. Kako je K jednodimenzionalan vektorski prostor nad K to nalazimo da je

$$\dim V' = \dim L(V, K) = \dim V \cdot \dim K = \dim V \cdot 1 = \dim V.$$

Elemente (ili vektore) prostora V' nazivamo linearni funkcionali: $f : V \to K$. Uočimo da je $f(v) \in K$ za svaki $v \in V$. Nadalje, funkcija $f : V \to K$ je linearan funkcional na V ako vrijedi

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \forall x, y \in V, \ \forall \lambda, \mu \in K.$$

Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza za V. Tada definiramo n–torku funkcionala

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n)$$

na sljedeći način:

$$\begin{array}{llll} e'_1(e_1) = 1 & e'_1(e_2) = 0 & e'_1(e_3) = 0 \dots & e'_1(e_n) = 0 \\ e'_2(e_1) = 0 & e'_2(e_2) = 1 & e'_2(e_3) = 0 \dots & e'_2(e_n) = 0 \\ & & \vdots & \\ e'_n(e_1) = 0 & e'_n(e_2) = 0 & e'_n(e_3) = 0 \dots & e'_n(e_n) = 1. \end{array} \tag{1.1}$$

Lema 1.2. *e' je baza vektorskog prostora V'. Takva baza naziva se* ***dualna baza*** *baze e. Nadalje, za svaki $f \in V'$, vrijedi slijedeći prikaz u bazi e':*

$$f = f(e_1)e'_1 + f(e_2)e'_2 + \dots + f(e_n)e'_n.$$

Dokaz. Kako je $\dim V' = n$, dovoljno je dokazati da su funkcionali $e'_1, \dots, e'_n$ linearno nezavisni. Neka je

$$\lambda_1 e'_1 + \cdots \lambda_n e'_n = 0.$$

Uočimo da je 0 u toj relaciji nul-funckional.

Relacija je ekvivalentna sa

$$\lambda_1 e'_1(v) + \cdots \lambda_n e'_n(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Sada uzimajući redom $v = e_1, \dots, e_n$ i koristeći (1.1) nalazimo da je $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

Ostaje dokazati zadnju tvrdnju u lemi. Kako je prema prvom dijelu dokaza e' baza za V', to postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tako da

$$f = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Ova relacija je ekvivalentna sa

$$f(v) = \alpha_1 e'_1(v) + \alpha_2 e'_2(v) + \cdots + \alpha_n e'_n(v), \quad \forall v \in V.$$

Sada uzimajući redom $v = e_1, \ldots, e_n$ i koristeći (1.1) nalazimo da je $\alpha_1 = f(e_1), \ldots, \alpha_n = f(e_n)$. □

1.9. **Kanonska bilinearna forma.** Neka je V vektorski prostor i neka je V' dualan prostor. Često se koristi oznaka

$$\langle x, f\rangle_V = f(x) \quad \text{ili samo} \quad \langle x, f\rangle = f(x).$$

Tada je preslikavanje

$$V \times V' \to K, \quad (x, f) \mapsto \langle x, f\rangle$$

bilinearno, tj. linearno u svakom argumentu:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, f\rangle = \alpha_1 \langle v_1, f\rangle + \alpha_2 \langle v_2, f\rangle$$
$$\langle v, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2\rangle = \beta_1 \langle v, f_1\rangle + \beta_2 \langle v, f_2\rangle,$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K,\ v, v_1, v_2 \in V,\ f, f_1, f_2 \in V'$. Primijetimo da je linearnost u prvom argumentu u stvari linearnost funkcije $f \in V'$, a linearnost u drugom argumentu je u stvari definicija zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom.

Bilinearnu formu $\langle\ ,\ \rangle_V$ zovemo kanonskom bilinearnom formom. Koristeći ove oznake i Kroneckerov simbol δ_{ij}, definiciju dualne baze možemo zapisati kao

$$\langle\, e_i, e'_j \,\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

1.10. **Adjungirani operator.** Neka je $A \in L(V, W)$ zadan. Tada za svaki linearan funkcional $g \in W' = L(W, K)$ definiramo linearan funkcional na sljedeći način:

$$v \mapsto g(Av) \ \ \forall v \in V.$$

Lagano se uvjerimo da smo na taj način dobili linearan funkcional na V. Taj funkcional označimo s $f = A'g$.

Uočimo nadalje da smo na taj način dobili preslikavanje $W' \longrightarrow V'$ koje preslikava funkcional g na funkcional $f = A'g$ za svaki $g \in W'$. Dakle imamo

$$f(v) = (A'g)(v) = g(Av) \ \ \forall v \in V. \tag{1.3}$$

Uvjerimo se da je zapravo to preslikavanje linearno tj. $A' \in L(W', V')$.

Zaista, treba pokazati

$$A'(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 A' g_1 + \lambda_2 A' g_2, \quad \forall g_1, g_2 \in W',\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K.$$

Ekvivalento, treba pokazati

$$\left(A'(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)\right)(v) = \lambda_1 (A' g_1)(v) + \lambda_2 (A' g_2)(v),$$

za sve $v \in V$, $g_1, g_2 \in W'$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

Koristeći (1.3), drugačije zapisana gornja relacija poprima ekvivalentan oblik

$$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(Av) = \lambda_1 g_1(Av) + \lambda_2 g_2(Av),$$

koji je očigledno točan.

Neka je $A \in L(V, W)$. Operator $A' \in L(W', V')$ nazivamo **adjungirani operator** operatora A. Koristeći uvedene oznake za kanonsku bilinearnu formu definiciju adjungiranog operatora možemo zapisati kao

$$\langle x, A'g \rangle_V = \langle Ax, g \rangle_W.$$

Ako je e baza za V i f baza za W, onda vrijedi:

Propozicija 1.4.

$$A'(e', f') = A(f, e)^t,$$

gdje t označava transponiranu matricu.

Dokaz. Stavimo

$$A(f, e) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ili ekvivalentno

$$\begin{cases} Ae_1 = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \cdots + \alpha_{m1} f_m \\ Ae_2 = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \cdots + \alpha_{m2} f_m \\ \vdots \\ Ae_n = \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \cdots + \alpha_{mn} f_m. \end{cases}.$$

Također, stavimo

$$A'(e', f') = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nm} \end{pmatrix}$$

ili ekvivalentno

$$\begin{cases} A' f_1' = \beta_{11} e_1' + \beta_{21} e_2' + \cdots + \beta_{n1} e_n' \\ A' f_2' = \beta_{12} e_1' + \beta_{22} e_2' + \cdots + \beta_{n2} e_n' \\ \vdots \\ A' f_m' = \beta_{1m} e_1' + \beta_{2m} e_2' + \cdots + \beta_{nm} e_n' \end{cases}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= \beta_{ij} \cdot e_i'(e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e_k'\right)(e_i) \\ &= \left(A' f_j'\right)(e_i) \\ &= f_j'\left(A e_i\right) \\ &= f_j'\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_j'\left(f_k\right) \\ &= \alpha_{ji}.\end{aligned}$$

□

1.11. **Kanonski izomorfizam.** Stavimo

$$V'' = (V').$$

Očigledno imamo sljedeće

$$\dim V'' = \dim V' = \dim V.$$

Nadalje, imamo kanonsko preslikavanje $v \mapsto v''$ sa V u V'' definirano ovako

$$v''(f) = f(v), \quad \forall f \in V'. \tag{1.5}$$

Lema 1.6. *Kanonsko preslikavanje je linearno i bijektivno (= izomorfizam vektorskih prostora) između V i V''. To nam omogućuje identificirati V sa dualom od V'. U tom smislu, svaka baza e prostora V je dualna baza svoje dualne baze e'.*

Dokaz. Iz Linearne algebre znamo da je dovoljno pokazati da je kanonsko preslikavanje linearno i injektivno. Dokaz linearnosti je sličan dokazu da je A' linearan operator i može se provesti ovako.

Neka su $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$. Treba dokazati da vrijedi

$$(\alpha x + \beta y)'' = \alpha x'' + \beta y''.$$

Ekvivalentno

$$(\alpha x + \beta y)''(f) = \alpha x''(f) + \beta y''(f), \quad \forall f \in V'.$$

Koristeći (1.5), nalazimo

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

a to je definicija linearnosti od f.

Kako smo pokazali da je kanonsko preslikavanje linearno, ostaje vidjeti da je injektvno, a za to je dovoljno pokazati da $x'' = 0$ povlači $x = 0$. Zaista, opet koristeći (1.5), nalazimo

$$0 = x''(f) = f(x), \quad \forall f \in V'.$$

Dakle, $x \in V$ zadovoljava da $f(x) = 0$ za svaki linearan funkcional. Ako x ne bi bio nužno nul–vektor, onda bismo mogli konstruirati bazu e tako da $e_1 = x$. Međutim tada $e_1'(x) = e_1'(e_1) = 1$. To je kontradikcija. $\square$

U svjetlu identifikacije V i V'' promotrimo pojam adjungiranog operatora. Kako je $V'' = V$ i $W'' = W$, zanima nas što je adjungirani operator A'' od A', gdje je $A \in L(V, W)$ zadan. Po definiciji vrijedi $A' \in L(W', V')$. Zato

$$A'' \in L(V'', W'') = L(V, W).$$

Nadalje, ako (1.3) primjenimo na A' to nalazimo

$$(A''x'')(g) = x''(A'g), \quad \forall x \in V, \forall g \in W'.$$

Raspisano u svjetlu identifikacija (u kojima je $x'' = x$), gornja jednakost glasi

$$g(A''x) = (A'g)(x).$$

Konačno, desna strana se zbog (1.3) može napisati kao

$$g(A''x) = (A'g)(x) = g(Ax).$$

Ostaje sjetiti se da ovo vrijedi za svaki $g \in W'$ i $x = x'' \in V$. Dakle

$$A''x = Ax.$$

To povlači $A = A''$.

1.12. **Anihilatori skupova u V i V'.** Neka je $S \subseteq V$. Onda definiramo anihilator od S

$$S^0 = \{f \in V'; \quad f(s) = 0, \ \forall s \in S\}.$$

Jednostavno se utvrdi da se radi o vektorskom potprostoru u V'. Isto tako za $T \subseteq V'$ definiramo

$$T^0 = \{v \in V; \quad t(v) = 0, \ \forall t \in T\}.$$

Jednostavno se utvrdi da se radi o vektorskom potprostoru u V.

Lema 1.7. *Neka je W potprostor u V. Tada vrijedi:*

(i) $\dim W^0 = \dim V - \dim W$.

(ii) $\left(W^0\right)^0 = W$.

Dokaz. Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza za V takva da je $(e_1, \ldots, e_k)$ baza za W ukoliko je $W \neq \{0\}$, a inače bilo koja baza i stavimo $k = 0$. Neka je, kao što je uobičajeno, e' dualna baza od e. Tada (1.1) pokazuje da $e'_{k+1}, \ldots, e'_n \in W^0$. A ako je $f \in W^0$, onda iz (vidi lemu 1.2)

$$f = f(e_1)e_1' + f(e_2)e_2' + \cdots + f(e_1)e_n' = f(e_{k+1})e_{k+1}' + \cdots + f(e_1)e_n'.$$

Dakle, $(e'_{k+1}, \ldots, e'_n)$ je baza za W^0. Dakle

$$\dim W^0 = n - (k+1) + 1 = n - k = \dim V - \dim W.$$

Ovim je (i) dokazano.

Za dokaz tvrdnje (ii), uočimo da polazeći od baze $(e'_{k+1}, \ldots, e'_n, e'_1, \ldots, e'_k)$ za V' čiji početak je baza za W^0 dualna baza je upravo $(e_{k+1}, \ldots, e_n, e_1, \ldots, e_k)$. Stoga, dokaz tvrdnje (i) pokazuje da je baza za $\left(W^0\right)^0$ upravo $(e_1, \ldots, e_k)$. Ovim je (ii) dokazano. $\square$

1.13. **Rang adjungiranog operatora.**

Teorem 1.8. *Neka je $A \in L(V, W)$. Tada vrijedi*

(i) $N(A') = R(A)^0$ *(ili ekvivalentno $R(A) = N(A')^0$).*
(ii) $N(A) = R(A')^0$ *(ili ekvivalentno $R(A') = N(A)^0$).*
(iii) $r(A') = r(A)$.

Dokaz. Iskazana ekvivalencija tvrdnji u (i) i (ii) je posljedica prethodne leme 1.7 (ii). Nadalje, (ii) slijedi iz (i) primjenom na operator A' umjesto A te uz identifikaciju $A = A''$. Zato, za dokaz (i) i (ii) dovoljno je dokazati samo $N(A') = R(A)^0$.

Podsjetimo da je $A' \in L(W', V')$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} g \in N(A') &\iff A'g = 0 \iff A'g(v) = 0, \forall v \in V \\ &\iff g(Av) = 0, \forall v \in V \\ &\iff g(w) = 0, \forall w \in R(A) \\ &\iff g \in R(A)^0. \end{aligned}$$

Ovim je $N(A') = R(A)^0$ dokazano.

Ostaje dokazati još (iii). Imamo

$$\begin{aligned} r(A) &= \dim R(A) = \text{(zbog (i))} \\ &= \dim N(A')^0 = \text{(lema 1.7 (i))} \\ &= \dim W' - \dim N(A') = \\ &= \dim W' - d(A') = \text{(teorem o rangu i defektu)} \\ &= r(A'). \end{aligned}$$

$\square$

2. Minimalni polinom linearnog operatora

2.1. **Algebra operatora.** Neka je K polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i V konačno dimenzionalan vektorski prostor nad K,

$$\dim V = n.$$

Vektorski prostor $L(V,V)$ linearnih operatora sa V u V obično označavamo kao $L(V)$. To je isto konačno dimenzionalan vektorski prostor,

$$\dim L(V) = (\dim V)^2 = n^2.$$

Osim operacija zbrajanja $A+B$ i množenja skalarom λA za $A, B \in L(V)$ i $\lambda \in K$, na $L(V)$ imamo i operaciju množenja AB operatora definiranu kao kompoziciju preslikavanja $AB = A \circ B$, tj.

- $(AB)x \overset{def}{=} A(Bx), \quad A, B \in L(V),\ x \in V.$

Općenito je kompozicija preslikavanja asocijativna jer je po definiciji

$$(A(BC))(x) = A((BC)(x)) = A(B(C(x))) = (AB)(C(x)) = ((AB)C)(x),$$

pa posebno za množenje u $L(V)$ vrijedi asocijativnost

$$A(BC) = (AB)C.$$

Množenje operatora je distributivno u odnosu na zbrajanje, tj. za sve operatore $A, B, C \in L(V)$ vrijedi

$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$A(B+C) = AB + AC.$$

Prva relacija slijedi iz definicija množenja i zbrajanja jer za svaki $x \in V$ imamo

$$((A+B)C)x = (A+B)(Cx) = A(Cx)+B(Cx) = (AC)x+(BC)x = (AC+BC)x.$$

Na sličan način dokazujemo i drugu relaciju koristeći definicije množenja i zbrajanja operatora i aditivnost preslikavanja A:

$$(A(B+C))x = A((B+C)x) = A(Bx+Cx) = A(Bx)+A(Cx) = \cdots = (AB+AC)x.$$

Na sličan se način provjerava i homogenost množenja operatora u odnosu na množenje skalarom, tj. za sve $\lambda \in K$ i operatore $A, B \in L(V)$ vrijedi

$$(\lambda A)B = \lambda(AB),$$
$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Na kraju, identitetu $I \in L(V)$,

$$Ix = x \quad \text{za sve} \quad x \in V,$$

zovemo jediničnim operatorom jer s obzirom na množenje imamo

$$IA = AI = A$$

za svaki $A \in L(V)$.

Zbog svih navedenih svojstava zbrajanja, množenja skalarom i množenja u $L(V)$ kažemo da je $L(V)$ asocijativna algebra s jedinicom I.

2.2. **Regularni operatori.** Za operator $A \in L(V)$ kažemo da je regularan ako ima inverz u $L(V)$, tj. operator $B \in L(V)$ takav da je

$$AB = BA = I.$$

Takav B je jedinstven (jer $AC = CA = I$ povlači $C = CI = CAB = IB = B$) i označava se $B = A^{-1}$.

Lema 2.1. *Linearni operator $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je $A\colon V \to V$ bijekcija.*

Dokaz. Ako je A regularan i B njegov inverz, onda $Ax = Ay$ i $BA = I$ povlači

$$y = Iy = BAy = BAx = Ix = x.$$

Znači da je A injekcija. Relacija $AB = I$ i $x \in V$ daje

$$x = Ix = ABx,$$

pa je A surjekcija.

Obratno, ako je A bijekcija, onda postoji inverzno preslikavanje B. Za x i y u V postoje jedinstveni u i v takvi da je $x = Au$ i $y = Av$. Zbog aditivnosti preslikavanja A imamo

$$B(x + y) = B(Au + Av) = B(A(u + v)) = I(u + v) = u + v = Bx + By,$$

a zbog homogenosti preslikavanja A za $\lambda \in K$ imamo

$$B(\lambda x) = B(\lambda Au) = B(A(\lambda u)) = I(\lambda u) = \lambda u = \lambda Bx.$$

Znači da je B linearno. No onda je B inverz od A u $L(V)$. □

Podsjetimo se da iz teorema o rangu i defektu slijedi da je za operator $A \in L(V)$ ekvivalentno:

- A je bijekcija,
- A je injekcija,
- A je surjekcija.

Iz dokaza leme 2.1 i gornje tvrdnje vidimo da je za operatore $A, B \in L(V)$ ekvivalentno

- $AB = BA = I$,
- $BA = I$,
- $AB = I$.

2.3. **Koordinatizacija.** Neka je $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uređena baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoji jedinstvena n-torka skalara $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ takva da

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \tag{2.2}$$

Tu n-torku skalara zovemo koordinatama vektora v u uređenoj bazi e i obično je zapisujemo kao vektor-stupac $v(e)$,

$$v(e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Preslikavanje $v \mapsto v(e)$ zovemo koordinatizacijom vektorskog prostora V u uređenoj bazi e. Budući da je koordinatizacija linearna bijekcija, ona nam omogućuje identifikacije vektorskog prostora V s vektorskim prostorom jednostupčanih matrica $M_{n\times 1}(K) \cong K^n$,

$$V \leftrightarrow M_{n\times 1}(K), \quad v \leftrightarrow v(e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Svojstvo linearnosti koordinatizacije možemo zapisati kao

$$(v+w)(e) = v(e) + w(e), \quad (\alpha v)(e) = \alpha v(e), \tag{2.3}$$

pri čemu su na lijevim stranama jednakosti operacije u V, a na desnim stranama operacije u K^n.

2.4. **Matrica operatora i algebra matrica.** Ako je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ uređena baza za V, onda za operator $A\colon V \to V$ imamo matricu operatora u paru baza

$$A(e) = A(e, e),$$

tj. imamo $n \times n$ matricu $A(e) = (\alpha_{ij})$ definiranu relacijama

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i.$$

To znači da j-ti stupac matrice operatora $A(e)$ čine koordinate vektora Ae_j u bazi e, tj. vektor-stupac $Ae_j(e)$, a čitavu matricu po stupcima možemo zapisati kao

$$A(e) = (Ae_1(e), \ldots, Ae_n(e)).$$

Zbog linearnosti operatora A za vektor (2.2) imamo

$$Av = \lambda_1 Ae_1 + \lambda_2 Ae_2 + \cdots + \lambda_n Ae_n.$$

Odavle linearnost koordinatizacije (2.3) povlači

$$(Av)(e) = \lambda_1 (Ae_1)(e) + \lambda_2 (Ae_2)(e) + \cdots + \lambda_n (Ae_n)(e),$$

što obično zapisujemo kao produkt matrice $A(e)$ i vektora $v(e)$, tj.

$$(Av)(e) = A(e)v(e). \tag{2.4}$$

Već smo rekli da preslikavanje $A \mapsto A(e)$ daje identifikaciju vektorskog prostora linearnih operatora i vektorskog prostora matrica, u našem slučaju

$$A \leftrightarrow A(e), \quad L(V) \leftrightarrow M_{n\times n}(K).$$

Zadatak 2.5. *Dokažite da $A \leftrightarrow A(e)$ daje identifikaciju asocijativnih algebri s jedinicom, tj.*

- $(AB)(e) = A(e)B(e)$,
- $I(e) = I_n =$ *jedinična $n \times n$ matrica.*

Ako je $f = (f_1, \dots, f_n)$ neka druga uređena baza u V, onda je matrica prijelaza

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

iz baze e u bazu f definirana relacijama

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} e_i.$$

To znači da j-ti stupac matrice operatora T čine koordinate vektora f_j u bazi e, tj. vektor-stupac $f_j(e)$, a čitavu matricu po stupcima možemo zapisati kao

$$T = (f_1(e), \dots, f_n(e)).$$

Budući da su stupci matrice T baza u K^n, to je T regularna matrica, tj. ima inverz T^{-1}.

Zbog linearnosti koordinatizacije (2.3) za vektor

$$v = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_n f_n$$

prikazan u bazi f imamo

$$v(e) = \mu_1 f_1(e) + \dots + \mu_n f_n(e),$$

što obično zapisujemo kao produkt matrice T i vektora $v(f)$

$$v(e) = Tv(f).$$

Zbog regularnosti matrice prijelaza T dobivamo formulu

$$v(f) = T^{-1} v(e) \tag{2.6}$$

kojom su koordinate vektora u "novoj" bazi f izražene pomoću matrice prijelaza i koordinata vektora u "staroj" bazi e. S druge strane, matrica operatora u "novoj" bazi f dana je pomoću matrice operatora u "staroj" bazi e formulom

$$A(f) = T^{-1} A(e) T. \tag{2.7}$$

Naime, za $y = Ax$ iz (2.4) slijedi $y(e) = A(e)x(e)$ i $y(f) = A(f)x(f)$, a to i (2.6) povlači

$$A(f)x(f) = y(f) = T^{-1}y(e) = T^{-1}A(e)x(e) = T^{-1}A(e)Tx(f)$$

za sve vektore $x(f)$ u K^n.

2.5. **Determinanta i svojstveni polinom operatora.** Za $n \times n$ matricu $B = (\beta_{ij})$ definiramo determinantu

$$\det B = \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^\sigma \beta_{\sigma(1)1} \beta_{\sigma(2)2} \ldots \beta_{\sigma(n)n},$$

pri čemu sumiramo po grupi $S(n)$ svih permutacija σ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $(-1)^\sigma \in \{1, -1\}$ označava predznak permutacije σ. U Linearnoj algebri dokazana su četiri važna teorema

- Matrica B je regularna ako i samo ako je $\det B \neq 0$,
- Binet-Cauchyjev teorem: $\det(BC) = (\det B)(\det C)$,
- karakteristični ili svojstveni polinom matrice

$$k_B(x) = \det(xI_n - B)$$

  je normirani polinom stupnja n, tj polinom oblika

$$x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

  s vodećim koeficijentom $\alpha_n = 1$ i
- Hamilton-Cayleyjev teorem: $k_B(B) = 0$, tj.

$$B^n + \alpha_{n-1}B^{n-1} + \cdots + \alpha_1 B + \alpha_0 I_n = 0.$$

Ako je e uređena baza u V i A linearan operator na V, onda determinantu operatora definiramo kao determinantu njegove matrice u bazi e, tj.

$$\det A \stackrel{def}{=} \det A(e).$$

Ova definicija ne ovisi o izboru baze od V jer nam formula (2.6) i Binet-Cauchyjev teorem daju

$$\begin{aligned}\det A(f) &= \det(T^{-1}A(e)T) = \det T^{-1} \det A(e) \det T = \det A(e) \det T \det T^{-1} \\ &= \det A(e) \det(TT^{-1}) = \det A(e) \det(I_n) = \det A(e).\end{aligned}$$

Budući da je preslikavanje $A \mapsto A(e)$ izomorfizam algebri, iz prve dvije tvrdnje za matrice slijedi:

- $A \in L(V)$ je regularan operator ako i samo ako je $\det A \neq 0$ i
- za operatore vrijedi Binet-Cauchyjev teorem: $\det AD = \det A \det D$.

Naravno, karakteristični ili svojstveni polinom operatora $A \in L(V)$ definiramo kao

$$k_A(x) = \det(xI - A).$$

Vrlo često pišemo $k_A(\lambda)$ umjesto $k_A(x)$. Iz druge dvije tvrdnje za matrice slijedi:

- karakteristični (svojstveni) polinom operatora

$$k_A(x) = \det(xI - A)$$

  je normirani polinom stupnja n, tj polinom oblika

$$x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

s vodećim koeficijentom $\alpha_n = 1$ i
- Hamilton-Cayleyjev teorem: $k_A(A) = 0$, tj.

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0.$$

2.6. **Algebra polinoma i evaluacija.** U prethodnom razmatranju govorili smo o polinomu matrice $f(B)$ ili polinomu operatora $f(A)$ ako je zadan polinom $f(x) = \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. "Uvrštavanje operatora A u polinom $f(x)$" zaslužuje malo pažnje:

Budući da je polinom u potpunosti određen svojim koeficijentima, formalno polinom definiramo kao niz koeficijenata

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$$

u polju K od kojih je najviše konačno mnogo različitih od nula. Za takav polinom pišemo

$$f(X) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k X^k$$

i kažemo da je polinom u varijabli X. Ako je $\alpha_m \neq 0$ i $\alpha_k = 0$ za sve $k > m$, onda kažemo da je α_m vodeći koeficijent polinoma $f(X)$ i da je polinom stupnja m, pišemo $\deg f(X) = m$. Kažemo da je polinom normiran ako mu je vodeći koeficijent jednak $1 \in K$.

Operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane su na uobičajen način:

$$f(X) + g(X) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k X^k + \sum_{k\geq 0} \beta_k X^k \overset{def}{=} \sum_{k\geq 0} (\alpha_k + \beta_k) X^k,$$

$$\mu f(X) = \mu \sum_{k\geq 0} \alpha_k X^k \overset{def}{=} \sum_{k\geq 0} \mu \alpha_k X^k.$$

Lako je provjeriti da je skup svih polinoma $K[X]$ s koeficijentima u polju K beskonačno dimenzionalan vektorski prostor s bazom

$$1, X, X^2, \ldots, X^m, \ldots\ .$$

I množenje polinoma definiramo na uobičajen način:

$$f(X)g(X) = \left(\sum_{k\geq 0} \alpha_k X^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} \beta_k X^k\right) \overset{def}{=} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \alpha_i \beta_j\right) X^k.$$

Množenje polinoma je asocijativno, bilinearno[1] i ima jedinicu 1. Naravno, množenje je i komutativno, pa kažemo da je $K[X]$ asocijativna komutativna algebra s jedinicom. Valja se podsjetiti da za polinome različite od nule vrijedi

$$\deg(f(X)g(X)) = \deg f(X) \deg g(X).$$

[1] tj. množenje polinomom s lijeva i množenje polinomom s desna je distributivno u odnosu na zbrajanje i homogeno u odnosu na množenje skalarom

Kažemo da $g(X)$ dijeli $f(X)$ i pišemo $g(X)|f(X)$ ako je $f(X) = h(X)g(X)$ za neki polinom $h(X)$.

Ako je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s jedinicom I, npr. algebra operatora $\mathcal{A} = L(V)$ ili algebra $n \times n$ matrica $\mathcal{A} = M_{n\times n}(K)$ ili polje $\mathcal{A} = K$, i A element algebre $\mathcal{A}$, onda na bazi vektorskog prostora $K[X]$ definiramo linearno preslikavanje

$$X^i \mapsto A^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots ,$$

tj. $1 \mapsto I$, $X \mapsto A$, $X^2 \mapsto A^2$, $\dots$. Zbog linearnosti imamo

$$f(X) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k X^k \quad \mapsto \quad f(A) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k A^k.$$

Zato to preslikavanje $f(X) \mapsto f(A)$ zovemo evaluacijom polinoma na elementu A. Za operator A kažemo da poništava polinom $f(X)$ ako je

$$f(A) = 0.$$

Budući da su oba množenja asocijativna imamo

$$X^i X^j = X^{i+j} \quad \text{i} \quad A^i A^j = A^{i+j} \quad \text{za sve} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots .$$

Lako je vidjeti da iz ovih relacija slijedi da je evaluacija homomorfizam algebri, tj. da pored linearnosti vrijedi

$$f(X)g(X) \mapsto f(A)g(A) \quad \text{za sve} \quad f, g \in K[X],$$

odnosno

$$(fg)(A) = f(A)g(A).$$

To će nam biti važno kasnije kada ćemo zaključivati da formula

$$f(X) = h(X)g(X) + r(X)$$

za dijeljenje polinoma $f(X)$ polinomom $g(X)$ s ostatkom $r(X)$ povlači odgovarajuću formulu za operatore

$$f(A) = h(A)g(A) + r(A).$$

2.7. **Minimalni polinom operatora.** Neka je $A \in L(V)$. Promatrajmo niz od $n^2 + 1$ operatora

$$I, A, A^2, \dots, A^{n^2}.$$

Budući da je $n^2 + 1 > \dim L(V) = n^2$, taj je niz operatora linearno zavisan, a jednočlani niz I je linearno nezavisan jer je $I \neq 0$. Znači da postoji $1 \leq m \leq n^2$ takav da je niz operatora

$$I, A, A^2, \dots, A^m$$

linearno zavisan, a niz

$$I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$$

linearno nezavisan. To znači da postoji netrivijalna linearna kombinacija

$$-\mu_0 I - \mu_1 A - \mu_2 A^2 - \dots + \mu_m A^m = 0 \tag{2.8}$$

i da mora biti $\mu_m \neq 0$. Smijemo pretpostaviti da je $\mu_m = 1$, jer inače relaciju (2.8) podijelimo s μ_m. Stavimo

$$\mu_A(X) = X^m - \mu_{m-1}X^{m-1} - \cdots - \mu_1 X - \mu_0 \tag{2.9}$$

Tada iz relacije (2.8) slijedi da A poništava polinom $\mu_A(X)$, tj.

$$\mu_A(A) = 0.$$

Teorem 2.10. *Neka je $A \in L(V)$. Tada imamo*

(1) *$\mu_A(X) \in K[X]$ je jedinstveni normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava.*
(2) *Ako A poništava $f(X) \in K[X]$, onda $\mu_A(X)$ dijeli polinom $f(X)$.*
(3) *$\mu_A(X)$ dijeli svojstveni polinom $k_A(X)$ i $\deg \mu_A(X) \leq \dim V$.*

Dokaz. (1) Kad bi postojao polinom $f(X) \neq 0$ stupnja $r < m$ kojeg A poništava, onda bismo imali netrivijalnu linearnu kombinaciju

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_r A^r = 0,$$

$\alpha_r \neq 0$, suprotno izboru m. Kad bi postojao normirani polinom $f(X) \neq \mu_A(X)$ stupnja m kojeg A poništava, onda bismo imali polinom $f(X) - \mu_A(X) \neq 0$ stupnja manjeg od m kojeg A poništava, suprotno već dokazanom.

(2) Ako A poništava $f(X)$, onda je prema prvom dijelu dokaza $f(X)$ stupnja $\geq m$ i dijeljenjem polinoma dobijamo

$$f(X) = h(X)\mu_A(X) + r(X),$$

pri čemu je ostatak $r(X)$ polinom stupnja $< m$. No $f(A) = 0$ i $\mu_A(A) = 0$ povlači $r(A) = 0$, pa prema prvom dijelu dokaza mora biti $r(X) = 0$.

(3) slijedi iz (2) i Hamilton-Cayleyjevog teorema. □

Teorem 2.11. *Neka je $A \in L(V)$.*

(1) *A je regularan ako i samo ako je $\mu_A(0) \neq 0$.*
(2) *Ako je A regularan, onda je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\mu_0}A^{m-1} - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_0}A^{m-2} - \cdots - \frac{\mu_1}{\mu_0}I. \tag{2.12}$$

Dokaz. Neka je

$$\mu_A(X) = X^m - \mu_{m-1}X^{m-1} - \cdots - \mu_1 X - \mu_0.$$

Tada je $\mu_A(0) = -\mu_0$. Ako je A regularan, tj. ima inverz A^{-1}, onda je $\mu_0 \neq 0$. Naime, u protivnom bismo imali da A poništava normirani polinom stupnja $m - 1$,

$$\begin{aligned} 0 = A^{-1}\mu_A(A) &= A^{-1}\left(A^m - \mu_{m-1}A^{m-1} - \cdots - \mu_1 A\right) \\ &= A^{m-1} - \mu_{m-1}A^{m-2} - \cdots - \mu_1 I, \end{aligned}$$

a to je prema prethodnom teoremu nemoguće.

Obrat. Ako je $\mu_0 \neq 0$, onda u relaciji

$$\mu_A(A) = A^m - \mu_{m-1}A^{m-1} - \cdots - \mu_1 A - \mu_0 I = 0$$

član $-\mu_0 I$ prebacimo na desnu stranu, dobivenu jednakost podijelimo s μ_0 i na lijevoj strani izlučimo A. Tada iz

$$\left(\frac{1}{\mu_0}A^{m-1} - \frac{\mu_{m-1}}{\mu_0}A^{m-2} - \cdots - \frac{\mu_1}{\mu_0}I\right) A = I$$

slijedi da je A regularan te formula (2.12). □

Lema 2.13. *Neka je $A \in L(V)$ i $\lambda \in K$. Tada je $A - \lambda I$ regularan operator ako i samo ako je $\mu_A(\lambda) \neq 0$.*

Dokaz. Zbog prethodnog teorema je dovoljno dokazati da je

$$\mu_{A-\lambda I}(X) = \mu_A(X + \lambda).$$

Budući da je evaluacija polinoma u $B = A - \lambda I$ homomorfizam algebri, to je

$$\mu_A(X + \lambda) \mapsto \mu_A(A - \lambda I + \lambda I) = \mu_A(A) = 0.$$

Znači da operator B poništava polinom $\mu_A(X + \lambda)$. Kad to ne bi bio minimalni polinom za B, onda bi A poništavao polinom $\mu_B(X-\lambda)$ koji je manjeg stupnja od $\deg \mu_A(X)$, suprotno teoremu 2.10. □

2.8. **Računanje minimalnog polinoma.** Da li je niz vektora $a_1, \ldots, a_m$ u K^{n^2} linearno nezavisan ili ne možemo utvrditi svođenjem matrice $(a_1, \ldots, a_m)$ na donju stepenastu formu koristeći elementarne transformacije. Taj isti postupak primijenjujemo i pri određivanju linearne nezavisnosti niza

$$I, A, A^2, \ldots, A^m$$

u konstrukciji minimalnog polinoma operatora. U prvom članu niza odaberemo matrični element različit od nule i pomoću njega "eliminiramo" odgovarajuće matrične elemente u preostalim članovima niza. Tako dobijemo novi niz matrica

$$A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1m},$$

pri čemu je

$$A_{1j} = A^j - \beta_{1j} I, \quad j = 1, \ldots, m,$$

za odgovarajuće koeficijente β_{1j}. Ako matrica A_{11} nije nula, odaberemo matrični element različit od nule i pomoću njega "eliminiramo" odgovarajuće matrične elemente u preostalim članovima niza. Tako dobijemo novi niz matrica

$$A_{22}, \ldots, A_{2m},$$

pri čemu je

$$A_{2j} = A_{1j} - \beta_{2j} A_{11}, \quad j = 2, \ldots, m,$$

za odgovarajuće koeficijente β_{2j}. Taj postupak nastavljamo sve dok ne dobijemo

$$A_{mm} = 0 \quad \text{i} \quad A_{m-1,m-1} \neq 0,$$

a rezultate možemo zapisati u tablici

$$\begin{array}{ccccc} I & A & A^2 & \dots & A^m \\ & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ & & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ & & & & \vdots \\ & & & & A_{mm} \end{array}$$

Iz postupka je očito da je niz matrica

$$I, A_{11}, A_{22}, \dots, A_{m-1,m-1}$$

linearno nezavisan, a niz

$$I, A_{11}, A_{22}, \dots, A_{m-1,m-1}, A_{mm}$$

linearno zavisan. Budući da je taj niz dobiven iz niza

$$I, A, A^2, \dots, A^m$$

elementarnim transformacijama, slijedi i linearna zavisnost tog niza. Netrivijalnu linearnu kombinaciju dobivamo uvrštavanjem zapisanih izraza za matrice A_{kj}:

$$0 = A_{mm} = A_{m-1,m} - \beta_{m-1,m} A_{m-1,m-1} = \dots \ .$$

Primjer 2.14. *Za matricu A imamo*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 6 \\ -4 & -16 & 2 \\ 2 & 4 & -18 \end{pmatrix}$$

i u jediničnoj matrici I biramo mjesto 11 na kojem eliminiramo matrične elemente u ostalim matricama u nizu:

$$A_{11} = A - \beta_{11} I = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{za} \quad \beta_{11} = 1,$$

$$A_{12} = A^2 - \beta_{12} I = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 8 & 2 \\ -1 & -2 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \textit{za} \quad \beta_{12} = 0,$$

$$A_{13} = A^3 - \beta_{13} I = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{za} \quad \beta_{13} = -14.$$

Sada u matrici A_{11} biramo matrični element 2 na mjestu 32 pomoću kojeg eliminiramo elemente u ostalim matricama u nizu:

$$A_{22} = A_{12} - \beta_{22} A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \textit{za} \quad \beta_{22} = 0,$$

$$A_{23} = A_{13} - \beta_{23} A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad za \quad \beta_{23} = 2.$$

Budući da u matrici $A_{23} = 0$ nema elemenata različitih od nule koje bismo trebali eliminirati, biramo $\beta_{33} = 0$ i dobivamo

$$A_{33} = A_{23} - 0A_{22} = 0.$$

Sada vidimo da je niz matrica I, A_{11}, A_{22} nezavisan, a niz $I, A_{11}, A_{22}, A_{33}$ zavisan, pa zaključujemo da je stupanj minimalnog polinoma $m = 3$. Netrivijalnu kombinaciju matrica I, A, A^2, A^3 dobivamo uvrštavanjem

$$0 = A_{33} = A_{23} - 0A_{22} = A_{13} - 2A_{11} = (A^3 + 14I) - 2(A - I) = A^3 - 2A + 16I.$$

Znači da je minimalni polinom jednak

$$\mu_A(X) = X^3 - 2X + 16.$$

2.9. **Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori.** Neka je $A \in L(V)$. Ako je

$$Av = \lambda v \quad \text{za neki} \quad v \neq 0, \tag{2.15}$$

onda kažemo da je $\lambda \in K$ svojstvena vrijednost operatora A i da je v svojstveni vektor operatora A (za svojstvenu vrijednost λ). Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A zovemo spektrom operatora A i označavamo sa

$$\sigma_A = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ je svojstvena vrijednost od } A\}.$$

Prepišemo li relaciju (2.15) kao

$$(A - \lambda I)v = 0, \quad v \neq 0,$$

postaje očito da je λ svojstvena vrijednost od A ako i samo ako $A - \lambda I$ nije injekcija. No $A - \lambda I$ nije injekcija ako i samo ako $A - \lambda I$ nije bijekcija, pa zbog leme 2.1 imamo

$$\sigma_A = \{\lambda \in K \mid A - \lambda I \text{ nije regularan operator}\}.$$

Iz karakterizacije regularnih operatora pomoću determinante dobivamo spektar kao skup nultočaka svojstvenog polinoma

$$\sigma_A = \{\lambda \in K \mid k_A(\lambda) = 0\},$$

a iz leme 2.13 dobivamo spektar kao skup nultočaka minimalnog polinoma

$$\sigma_A = \{\lambda \in K \mid \mu_A(\lambda) = 0\}.$$

Za danu svojstvenu vrijednost λ skup svih pripadnih svojstvenih vektora je skup svih netrivijalnih rješenja homogenog sustava jednadžbi

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

3. Nilpotentni operatori

Iz Linearne algebre (vidi predavanje 1 ili predavanje 2 ovdje) operatoru $A \in L(V)$ u bazi e pridružujemo kvadratnu matricu $A(e)$ koja je tablica od $n \times n$, $n = \dim V$, brojeva koji potpuno određuju operator A. Promjenom baze mijenja se matrica po shemi objašnjenoj u 2.4. Cilj iduća tri predavanja je za zadani operator pronaći bazu e u kojoj $A(e)$ ima najjednostavniji oblik tzv. Jordanovu formu operatora A. U najvećoj općenitosti to će biti moguće napraviti samo uz restrikciju da je polje algebarski zatvoreno $K = \mathbb{C}$. Ipak prvi korak koji danas studiramo to ne zahtjeva i u ovom predavanju pretpostavljamo da je $K = \mathbb{C}$ ili $K = \mathbb{R}$.

3.1. **Invarijantni potprostori.** Neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $V_0 \subseteq V$ **invarijantan** obzirom na operator A ili A–**invarijantan** ako

$$\forall v_0 \in V_0 \implies Av_0 \in V_0.$$

Tada, restrikcija $A_0 = A|_{V_0}$ definira lineran operator na V_0 tj. $A_0 \in L(V_0)$.

Uvijek su $\{0\}$ i V invarijantni potprostori za $A \in L(V)$. Interesantniji primjer dobivamo ako uzmemo svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma_A$. Tada je svojstveni potprostor

$$V_\lambda = \{v \in V : \quad Av = \lambda v\}$$

A–**invarijantan** i $A|_{V_\lambda}$ je skalarni operator λI, gdje je $I = I_{V_\lambda}$, identiteta na V_λ.

Nadalje, V je direktna suma potprostora $V_1, \dots, V_m$ ako se svaki $v \in V$ može na jedinstven način zapisati kao suma vektora $v_1 + \cdots + v_m$, gdje su $v_i \in V_i$ za $i = 1, \dots, m$. Oznaka

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_m.$$

onda za izabrane baze za $V_1, \dots, V_m$ možemo formirati bazu za V na ovaj način

$$\text{baza za } V = (\text{baza za } V_1, \dots, \text{baza za } V_m)\,.$$

Pretpostavimo nadalje da su $V_1, \dots, V_m$ A–invarijantni. Definiramo restrikcije $A_i = A|_{V_i} \in L(V_i)$, $i = 1, \dots, m$, te ih prikažemo matricama u gore izabranim bazama $A_i(\text{baza za } V_i)$. Nije teško provjeriti da je matrica $A(\text{baza za } V)$ blok dijagonalna matrica:

$$A(\text{baza za } V) = \begin{pmatrix} A_1(\text{baza za } V_1) & & & \\ & A_2(\text{baza za } V_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m(\text{baza za } V_m) \end{pmatrix}.$$

Trivijalan slučaj blok dijagonalne dekompozicije je $m = 1$ tj. $V = V_1$.

3.2. **Nilpotentni operatori i indeks nilpotentnosti.** Linearan operator $N \in L(V)$ naziva se nilpotentan operator ako postoji prirodan broj p takav da $N^p = 0$. Uočimo da je tada

$$N^{p+1} = N \cdot N^p = N \cdot 0 = 0, \ N^{p+2} = N \cdot N^{p+1} = N \cdot 0 = 0, \ \ldots.$$

Nul–operator je očigledno nilpotentan operator. Međutim, ako je operator N zadan u nekoj uređenoj bazi e matricom

$$N(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies N(e)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onda vrijedi

$$N^2 = 0$$

i N je nilpotentan.Ovaj operator nije nul-operator jer u bazi e njegova matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator. Najmanji $p \geq 1$ takav da je $N^p = 0$ nazivamo **indeks nilpotentnosti** operatora N. Ukoliko stavimo $N^0 = I$ (uključujući slučaj kada je N jednak nul–operatoru), onda je indeks nilpotentnosti jedinstveno određen s iduća dva svojstva

$$p \geq 1$$

i

$$N^{p-1} \neq 0 \ \text{ i } \ N^p = 0.$$

Npr. ako je N nul–operator onda je (po konvenciji) $N^0 = I$ i $N^1 = N = 0$. Dakle $p = 1$ u ovom slučaju. Nadalje, za gore zadan operator N matricom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, imamo $p = 2$.

3.3. **Važna lema.** Ovdje dokazujemo sljedeći tehnički rezultat koji će biti korišten u dokazu osnovnog rezultata ovog predavanja.

Lema 3.1. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Neka je $v \in V$ proizvoljan vektor koji zadovoljava $N^{p-1}v \neq 0$. Tada su vektori*

$$v, Nv, \ldots, N^{p-1}v$$

linearno nezavisni. Posebno, linearna ljuska, u oznaci $\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v \rangle$, tih vektora je potprostor u V dimenzije p.

Dokaz. Neka su $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \in K$ takvi da

$$\alpha_0 v + \alpha_1 Nv + \cdots + \alpha_{p-1} N^{p-1} v = 0. \tag{3.2}$$

Kako je $N^p = 0$ to imamo $N^{p+1} = N^{p+2} = \cdots = 0$. Posebno, imamo

$$N^p v = N^{p+1} v = N^{p+2} v = \cdots = 0,$$

ali, zbog naše pretpostavke

$$N^{p-1} v \neq 0.$$

Nadalje, ako na jednakost (3.2) djelujemo s N^{p-1}, ona se reducira na

$$\alpha_0 \left(N^{p-1}v\right) = 0 \implies \alpha_0 = 0.$$

Sada, zbog $\alpha_0 = 0$, (3.2) postaje

$$\alpha_1 N v + \cdots + \alpha_{p-1} N^{p-1} v = 0.$$

Primjenjujući na tu jednakost N^{p-2} dobijemo

$$\alpha_1 \left(N^{p-1}v\right) = 0 \implies \alpha_1 = 0.$$

Ovaj postupak ponavljamo dok ne pokažemo da su svi $\alpha_i = 0$. □

Ova lema daje nam ocjenu na indeks nilpotentnosti.

Korolar 3.3. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Tada je*

$$p \leq \dim V.$$

Dokaz. Kako je $N^{p-1} \neq 0$, to postoji $v \in V$ koji zadovoljava $N^{p-1}v \neq 0$. Lema 3.1 povlači

$$p = \dim\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle \leq \dim V,$$

jer dimenzija potprostora nije nikada veća od dimenzije cijelog prostora. □

Korolar 3.4. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Neka je $v \in V$ proizvoljan vektor koji zadovoljava $N^{p-1}v \neq 0$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&N\left(\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle\right) = \langle Nv, N^2v, \ldots, N^{p-1}v\rangle \;\; \textit{je dimenzije } p-1\\
&N^2\left(\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle\right) = \langle N^2v, N^3v, \ldots, N^{p-1}v\rangle \;\; \textit{je dimenzije } p-2\\
&\vdots\\
&N^{p-1}\left(\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle\right) = \langle N^{p-1}v\rangle \;\; \textit{je dimenzije } 1\\
&N^k\left(\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle\right) = \langle 0\rangle \;\; \textit{je dimenzije } 0 \textit{ za } k \geq p.
\end{aligned}$$

Dokaz. Lema 3.1 pokazuje da su vektori $v, Nv, \ldots, N^{p-1}v$ linearno nezavisni. Prema tome i svaki podskup tih vektora je linearno nezavisan. Dakle, posebno su $Nv, N^2v, \ldots, N^{p-1}v$ linearno nezavisni i lagano se vidi da razapinju sliku od $\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle$ pri djelovanju od N. Dakle

$$N\left(\langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v\rangle\right) = \langle Nv, N^2v, \ldots, N^{p-1}v\rangle \;\; \text{je dimenzije } p-1.$$

Ostale tvrdnje dokazuju se slično. □

3.4. **Elementarna Jordanova klijetka; slučaj $p = \dim V = n$.** Podsjetimo da je naša konvencija da je $V \neq \{0\}$ (ukoliko drugačije ne kažemo). Pretpostavimo da je $N \in L(V)$ takav da je $p = \dim V = n$. Kako je $N^{p-1} \neq 0$, to postoji $v \in V$ koji zadovoljava $N^{p-1}v \neq 0$. Lema 3.1 povlači da su vektori

$$v, Nv, \ldots, N^{p-1}v$$

linearno nezavisni. Oni razapinju cijeli V jer je $p = n$. Dakle, bazu

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

možemo zadati ako stavimo $(p = n)$

$$\begin{cases} e_1 = N^{n-1}v \\ e_2 = N^{n-2}v \\ \vdots \\ e_{n-1} = Nv \\ e_n = v. \end{cases}$$

Tu bazu zovemo **cikličkom bazom** za nilpotentni operator N indeksa p jednakog dimenziji prostora. Tada imamo

(3.5)

$$\begin{cases} e_1 = N^{n-1}v \\ e_2 = N^{n-2}v \\ \vdots \\ e_{n-1} = Nv \\ e_n = v. \end{cases} \implies \begin{cases} Ne_1 = N(N^{n-1}v) = N^n v = 0 \text{ jer je } p = n \\ Ne_2 = N(N^{n-2}v) = N^{n-1}v = e_1 \\ \vdots \\ Ne_{n-1} = N(Nv) = N^2 v = e_{n-2} \\ Ne_n = Nv = e_{n-1}. \end{cases}$$

Stoga u toj bazi matrica operatora $N(e)$ ima posebno jednostavan oblik

$$N(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ova matrica ima jedinice iznad dijagonale, ponekad kažemo da ima jedinice na gornjoj sporednoj dijagonali, a svi ostali matrični elementi su nula. Naziva se **elementarna Jordanova klijetka** i označava s J_n.

Pogledajmo neke primjere:

$n = 1 \implies J_1 = (0)$ nema gornje sporedne dijagonale na kojoj bi bile jedinice!

$n = 2 \implies J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 3 \implies J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 4 \implies J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Primjer 3.6. *Neka je u kanonskoj bazi $e = (e_1, e_2, e_3)$, gdje je*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

operator N zadan sa

$$N(e) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 \\ 9 & 3 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$N(e)^2 = \begin{pmatrix} -9 & -9 & -18 \\ -27 & -27 & -54 \\ 18 & 18 & 36 \end{pmatrix}, \quad N(e)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, N je nilpotentan operator indeksa

$$p = \dim V = 3.$$

Ako uzmemo

$$v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onda je

$$N(e)v = N(e)e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i

$$N(e)^2 v = N(e)^2 e_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -27 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Dakle, ako stavimo $e_1' = N^2 v, e_2' = Nv, e_3' = v$, *onda u bazi* $e' = (e_1', e_2', e_3')$, *matrica operatora* N *dana je sa*

$$N(e') = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U jeziku matrica ovaj rezultat može se objasniti na slijedeći način. Neka je matrica T *matrica prijelaza iz baze* e *u bazu* e' *(vidi (2.4))*

$$T = \big(e_1'(e), e_2'(e), e_3'(e)\big) = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 1 \\ -27 & 9 & 0 \\ 18 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

onda imamo

$$N(e') = J_3 = T^{-1} N(e) T.$$

3.5. **Opći slučaj:** $p \le \dim V = n$**.** Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Korolar 3.3 povlači $p \le \dim V = n$. U prošloj točki promatrali smo specijalan slučaj $p = n$. U ovoj točki dokazujemo opći rezultat:

Teorem 3.7. *Neka je* $N \in L(V)$ *nilpotentan operator indeksa* p. *Tada postoji dekompozicija*

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_m, \quad p_i = \dim V_i, \tag{3.8}$$

takva da

a) $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_m \ge 1$ *i* $p = p_1$,
b) *za svaki* i, V_i *je* N*–invarijantan,*
c) *za svaki* i, $N_i \overset{def}{=} N|_{V_i}$ *je nilpotentan indeksa* p_i.

U gornjem rastavu (3.8) dimenzije p_i *prostora* V_i *su između* 1 *i* p, *te nadalje, za svaki* $1 \le k \le p$, *rastav (3.8) sadrži točno*[2]

$$r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k)$$

k*–dimenzionalnih potprostora; drugim riječima*

$$\#\{i;\ \ p_i = k\} = r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k).$$

Prije dokaza teorema 3.7 objasnimo njegovo značenje i jednu njegovu posljedicu. Istaknimo najprije da mora vrijediti

$$n = \dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m = p_1 + p_2 + \cdots + p_m.$$

Iz dokaza teorema bit će jasno da $V_1, \ldots, V_m$ koji zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c) nisu jedinstveni. Međutim, c) i razmatranja iz 3.4 povlače da

[2] Ovdje koristimo oznaku $r(A) = \dim \mathrm{im} A$ za rang operatora A.

za svaki i možemo izabrati *bazu od* V_i tako da

$$N_i(\text{baza od } V_i) = J_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrica je dimenzije } p_i \times p_i.$$

Dakle, ako kao u točki 3.1, formiramo bazu za V na ovaj način

$$\text{baza za } V = (\text{baza za } V_1, \dots, \text{baza za } V_m)\,,$$

onda je matrica $N(\text{baza za } V)$ blok dijagonalna matrica:

$$N(\text{baza za } V) = \begin{pmatrix} N_1(\text{baza za } V_1) & & & \\ & N_2(\text{baza za } V_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_m(\text{baza za } V_m) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} J_{p_1} & & & \\ & J_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_m} \end{pmatrix}.$$

Iako $V_1, \dots, V_m$ koji zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c) nisu jedinstveni, dobivena matrica

$$\begin{pmatrix} J_{p_1} & & & \\ & J_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_m} \end{pmatrix}$$

ne ovisi o njihovom izboru (tj. postupku dolaska do matričnog prikaza) zbog svojstva a) i činjenice da za svaki $1 \leq k \leq p$ vrijedi

$$\#\{i;\ \ p_i = k\} = r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k),$$

gdje je $r(N^k)$ rang operatora N^k.

Kombinatorno: na prostoru $M_{n\times 1}(K)$, u kanonskoj bazi $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, gdje je

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

nilpotentan operator možemo zadati padajućom particijom broja n u prirodne brojeve (m je varijabilan!)

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m \geq 1, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n.$$

Odgovarajući nilpotentan operator dan je u kanonskoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} J_{p_1} & & & \\ & J_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_m} \end{pmatrix}.$$

Njegov indeks nilpotentnosti jednak je $p = p_1$. Nadalje, dvije različite padajuće particije od n određuju različite nilpotentne operatore (ovdje smo primijenili zadnji dio teorema 3.7).

Pogledajmo neke primjere. Najprije dva ekstremna slučaja:

Nul–operator je nilpotentan operator i odgovara slučaju $m = n$ i particiji $p_1 = 1, p_2 = 1, \ldots, p_n = 1$.

Nilpotentan operator indeksa $p = n$. Tada je $m = 1$ i $p_1 = p = n$, a matrica je J_p.

Neka je $n = 5$ i particija od 5 dana sa $p_1 = 3$ i $p_2 = 2$. Tada je matrica odgovarajućeg nilpotentnog operatora dana s

$$\begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1} & \\ & J_{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokaz teorema 3.7. Najprije ćemo pokazati da ako $V_1, \ldots, V_m$ zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c), da onda, za svaki $1 \leq k \leq p$, vrijedi

$$\#\{i; \quad p_i = k\} = r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k).$$

Na kraju ćemo dokazati egzistenciju $V_1, \ldots, V_m$ koji zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c).

Uvedimo pogodnu notaciju. Zbog a) možemo uvesti ovakvu notaciju. Pišemo

n_p za broj prvih među potprostorima $V_1, \dots, V_m$ dimenzije p ($n_p \neq 0$ jer $p_1 = p$)
n_{p-1} za broj idućih dimenzije $p-1$ (moguće $n_{p-1} = 0$ ako nema niti jedan takav)
n_{p-2} za broj idućih dimenzije $p-2$ (moguće $n_{p-2} = 0$ ako nema niti jedan takav)
$\vdots$
n_1 za broj zadnjih dimenzije 1 (moguće $n_1 = 0$ ako nema niti jedan takav).

Kratko, uvedena notacija glasi

$$n_k = \#\{i;\ \ p_i = k\}, \quad 1 \le k \le p.$$

Mi moramo dokazati da vrijedi:

$$n_k = r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k), \quad 1 \le k \le p. \tag{3.9}$$

Prema c) za svaki i postoji $v_i \in V_i$ tako da $N_i^{p_i-1}v_i \neq 0$ i da je $V_i = \langle v_i, N_i v_i, \dots, N_i^{p_i-1}v_i\rangle$ (usporedi s lemom 3.1!). Prema korolaru 3.4 i b) i c) imamo

$$\begin{aligned} &N(V_i) = N_i(V_i) \ \text{ je dimenzije } p_i - 1\\ &N^2(V_i) = N_i^2(V_i) \ \text{ je dimenzije } p_i - 2\\ &\vdots\\ &N^{p_i-1}(V_i) = N_i^{p_i-1}(V_i) \ \text{ je dimenzije } 1\\ &N^k(V_i) = N_i^k(V_i) \ \text{ je dimenzije } 0 \text{ za } k \ge p_i. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sada koristimo dekompoziciju (3.8). Ona nam zbog b) i c) daje

$$N^k(V) = N^k(V_1) \dot{+} N^k(V_2) \dot{+} \cdots \dot{+} N^k(V_m), \quad \forall k \ge 0,$$

što se lagano dokazuje indukcijom po k polazeći od slučaja $k = 0$ koji je zapravo sama dekompozicija (3.8). Sada imamo

$$r(N^k) = \dim N^k(V) = \dim N^k(V_1) + \dim N^k(V_2) + \cdots + \dim N^k(V_m), \ \ \forall k \ge 0.$$

Koristeći (3.10) to možemo zapisati kao

$$r(N^k) = \dim N_1^k(V_1) + \dim N_2^k(V_2) + \cdots + \dim N_m^k(V_m), \quad \forall k \ge 0.$$

Također, prema (3.10), imamo

$$\dim N_i^k(V_i) = \begin{cases} p_i - k & \text{ako } k < p_i\\ 0 & \text{ako } k \ge p_i. \end{cases}$$

Stoga se gornja suma može napisati kao

$$r(N^k) = \sum_{\substack{i \\ p_i > k}} \dim N_i^k(V_i) = \sum_{\substack{i \\ p \geq p_i > k}} (p_i - k)\,, \quad \forall k \geq 0 \tag{3.11}$$

Konačno, koristeći notaciju $n_1, \ldots, n_p$, sumu (3.11) možemo zapisati ovako

$$r(N^k) = n_{k+1} + 2n_{k+2} + \cdots + (p-k)n_p = \sum_{i=k+1}^{p} (i-k)n_i, \,, \quad \forall k \geq 0, \tag{3.12}$$

jer ima n_{k+1} indeksa i takvih da je $p_i = k+1$ (kada je $p_i - k = 1$), n_{k+2} indeksa i takvih da je $p_i = k+2$ (kada je $p_i - k = 2$), ..., n_p indeksa i takvih da je $p_i = p$ (kada je $p_i - k = p - k$).

Nakon svih ovih priprema ostaje još izračunati desnu stranu od (3.9) i pokazati da je jednaka lijevoj strani od (3.9). Za $1 \leq k \leq p$, imamo redom iz (3.12)

$$\begin{aligned}
&r(N^{k+1}) + r(N^{k-1}) - 2r(N^k) \\
&= \left(\sum_{i=k+2}^{p} (i - (k+1))n_i \right) + \left(\sum_{i=k}^{p} (i - (k-1))n_i \right) - 2 \left(\sum_{i=k+1}^{p} (i-k)n_i \right) \\
&= \sum_{i=k+2}^{p} \left[(i - (k+1)) + (i - (k-1)) - 2(i-k) \right] n_i + \\
&+ \left[(k - (k-1))n_k + (k+1 - (k-1))n_{k+1} \right] - (2(k+1-k)n_{k+1})) \\
&= 0 + n_k + 2n_{k+1} - 2n_{k+1} \\
&= n_k.
\end{aligned}$$

Ovim je (3.9) dokazano.

Sada dokazujemo egzistenciju $V_1, \ldots, V_m$ koji zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c). Podsjetimo da je p indeks nilpotentnosti od N.

Neka je, kao u lemi 3.1, $v \in V$ proizvoljan vektor koji zadovoljava $N^{p-1}v \neq 0$. Stavimo $V_1 = \langle v, Nv, \ldots, N^{p-1}v \rangle$. Lema 3.1 pokazuje da je V_1 N–invarijantan potprostor dimenzije $p = p_1 \overset{def}{=} \dim V_1$. Tvrdnja će slijediti indukcijom ako pokažemo egzistenciju N–invarijantnog potprostora V_1' takvog da

$$V = V_1 \dot{+} V_1', \tag{3.13}$$

jer se onda možemo ograničiti na V_1' i za $N|_{V_1'}$ konstruirati V_2 koji je za V_1' ono što je V_1 za V. Posebno

$$V_1' = V_2 \dot{+} V_2',$$

za neki N–invarijantan potprostor V_2'.

Uočimo da je opet dimenzija $p_2 \stackrel{def}{=} \dim V_2$ jednaka indeksu nilpotentnosti od N na V' koji nije veći od indeksa nilpotentnosti za cijeli prostor V. Dakle dobivamo

$$p_1 \geq p_2$$

i

$$V = V_1 \dot{+} V_1' = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} V_2'.$$

Indukcijom lako završimo dokaz egzistencije $V_1, \ldots, V_m$ koji zadovoljavaju (3.8) i svojstva a)–c).

Ostaje dokazati egzistenciju dekompozicije (3.13). U tu svrhu koristit ćemo adjungirane operatore (vidi predavanje 1). Dokazujemo ovu opću lemu:

Lema 3.14. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa p. Tada je adjungirani operator $N' \in L(V')$ nilpotentan indeksa p.*

Dokaz. Podsjetimo se definicije adjungiranog operatora:

$$N'(f)(x) = f(Nx), \quad \forall f \in V', \ x \in V. \tag{3.15}$$

Ako umjesto $f \in V'$ stavimo u taj identitet $N'(f) \in V'$ onda nalazimo

$$\left[N'(N'(f))\right](x) = N'(f)(Nx).$$

Stoga, primjenjujući na desnu stranu (3.15) u kojem je umjesto $x \in V$ uzet $Nx \in V$, nalazimo

$$\left[N'(N'(f))\right](x) = N'(f)(Nx) = f(N^2x).$$

Dakle, imamo

$$\left[(N')^2(f)\right](x) = f(N^2x).$$

Slično za proizvoljan $k \geq 1$ imamo

$$\left[(N')^k(f)\right](x) = f(N^kx)$$

Odatle, za $k = p$ nalazimo da vrijedi

$$\left[(N')^p(f)\right](x) = f(N^px) = f(0) = 0, \quad \forall f \in V', \ x \in V.$$

Dakle, vidimo

$$(N')^p(f) = 0, \quad \forall f \in V'.$$

Ovo pokazuje da je N' nilpotentan indeksa manjeg ili jednakog p. Ostaje dokazati da je indeksa točno p. No to slijedi iz $N = N'' = (N')'$ jer je, prema već dokazanom, indeks p od N manji ili jednak od indeksa od N'. □

Egzistenciju dekompozicije (3.13) i time dokaz teorema 3.7 završava sljedeća lema. (Uzmemo $V_1' = W_1^0$ gdje je W_1^0 definiran u lemi 3.16 (ii).)

Lema 3.16. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan indeksa p. Neka je $v \in V$ takav da $N^{p-1}v \neq 0$ i $f \in V'$ takav*[3] *da $f(N^{p-1}v) \neq 0$. Stavimo $V_1 = \langle v, Nv, \dots, N^{p-1}v\rangle$ i $W_1 = \langle f, N'f, \dots, (N')^{p-1}f\rangle$. Onda vrijedi sljedeće*

(i) $\dim V_1 = \dim W_1 = p$

ii) $V = V_1 \dot{+} W_1^0$ *gdje je W_1^0 anihilator od W_1 u V (vidi predavanje 1). Nadalje, W_1^0 je N–invarijantan.*

Dokaz. U ovom dokazu koristit ćemo slobodno notaciju i rezultate iz prethodnog dokaza. Uočimo da kraj tog dokaza pokazuje $(N')^{p-1}(f) \neq 0$. Sada je (i) direktna posljedica leme 3.1 (samo treba uskladiti notaciju!).

Dokažimo (ii). Podsjetimo da je anihilator od W_1 u V definiran s

$$W_1^0 = \{x \in V;\ g(x) = 0 \ \ \forall g \in W_1\}.$$

Iz predavanja 1, lema 1.7 (i), znamo da vrijedi

$$\dim W_1^0 = \dim V' - \dim W_1 = \dim V - p = \dim V - \dim V_1.$$

Zato da dokažemo $V = V_1 \dot{+} W_1^0$, moramo pokazati samo da je suma $V_1 \dot{+} W_1^0$ direktna tj. da se nul–vektor može na jedinstven način napisati kao suma:

$$0 = x + y, \ \ x \in V_1,\ y \in W_1^0 \implies x = y = 0.$$

Pišući $x = -y \in V_1 \cap W_1^0$ dovoljno je vidjeti

$$V_1 \cap W_1^0 = \{0\}.$$

Zaista, ako je $x \in V_1 \cap W_1^0$, onda prema konstrukciji od V_1 i lemi 3.1 možemo pisati

$$x = \alpha_0 v + \alpha_1 Nv + \cdots + \alpha_{p-1}N^{p-1}v,$$

za neke $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in K$. Da pokažemo da je $x = 0$, dovoljno je dokazati da su svi $\alpha_i = 0$. Ako to nije tako, onda postoji najmanji k takav da je $\alpha_k \neq 0$. Sada

$$x = \alpha_k N^k v + \alpha_{k+1}N^{k+1}v + \cdots + \alpha_{p-1}N^{p-1}v.$$

Kako je još $x \in W_1^0$ to imamo

$$\begin{aligned}
0 &= (N')^{p-1-k}(f)(x)\\
&= (N')^{p-1-k}(f)(\alpha_k N^k v + \alpha_{k+1}N^{k+1}v + \cdots + \alpha_{p-1}N^{p-1}v)\\
&= f(\alpha_k N^{k+(p-1-k)}v + \alpha_{k+1}N^{k+1+(p-1-k)}v + \cdots + \alpha_{p-1}N^{p-1+(p-1-k)}v)\\
&= f(\alpha_k N^{p-1}v)\\
&= \alpha_k f(N^{p-1}v).
\end{aligned}$$

Kako je $f(N^{p-1}v) \neq 0$, to nalazimo $\alpha_k = 0$. Ovo je kontradikcija.

Ostaje dokazati da je W_1^0 N–invarijantan. Treba pokazati

$$x \in W_1^0 \implies Nx \in W_1^0.$$

[3] Koristite argument s kraja dokaza leme 1.6 da dokažete egzistenciju takvog f!

Uočimo da je $Nx \in W_1^0$ ako i samo ako je

$$g(Nx) = 0, \quad \forall g \in W_1.$$

Po definiciji adjungiranog operatora to je ekvivalentno s

$$(N'g)(x) = 0, \quad \forall g \in W_1.$$

Ova tvrdnja je točna jer prema konstrukciji od W_1 taj prostor je N'–invarijantan tj.

$$g \in W_1 \implies N'g \in W_1.$$

□

□

3.6. **Minimalni polinom nilpotentnog operatora.**

Teorem 3.17. *Neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p. Tada je minimalan polinom od N dan sa $\mu_N(X) = X^p$, a spektar je $\sigma_N = \{0\}$.*

Dokaz. Po definiciji, N poništava polinom X^p. Zato $\mu_N(X)$ dijeli X^p (vidi teorem 2.10 (1)). Dakle, mora biti $\mu_N(X) = X^k$, za neko $k \geq 1$, $k \leq p$, jer je po definiciji minimalan polinom normiran (vidi točku 2.7). Ako bi bilo $k < p$, onda bismo imali

$$N^k = \mu_N(N) = 0,$$

jer svaki operator poništava svoj minimalni polinom po definiciji. Dakle, $p - 1 - k \geq 0$ jer $k < p$ i zato

$$N^{p-1} = N^{p-1-k} \cdot N^k = N^{p-1-k} \cdot 0 = 0.$$

Ovo je kontradikcija.

Konačno, prema točki 2.9 imamo

$$\sigma_N = \{\lambda \in K; \quad \mu_N(\lambda) = 0\} = \{0\}.$$

□

4. Poluprosti operatori

U ovom predavanju nastavljamo s proučavanjem linearnih operatora na vektorskom prostoru V dimenzije $\dim V = n \geq 1$ nad poljem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Proučavamo poluproste operatore i predavanje počinjemo njihovom definicijom.

4.1. **Definicija.** $A \in L(V)$ je poluprost operator (ili kraće poluprost) ako postoji baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$ za V tako da je $A(e)$ dijagonalna matrica:

$$A(e) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix},$$

gdje su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$. Skalari $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$ su nultočke karakterističnog polinoma od A:

$$\begin{aligned} k_A(x) &= \det(xI - A) \\ &= \det(xI_n - A(e)) = \begin{vmatrix} x-\mu_1 & & & \\ & x-\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-\mu_n \end{vmatrix} \\ &= (x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_n) \\ &\implies \sigma_A = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \end{aligned}$$

tj. spektar od A sastoji se od dijagonalnih elemenata od $A(e)$.

Uočimo da iz matričnog prikaza slijedi:

$$Ae_i = \mu_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ekvivalentna definicija poluprostog operatora: $A \in L(V)$ je poluprost ako postoji baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$ za V i $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in K$ tako da

$$Ae_i = \mu_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

.

4.2. **Minimalni polinom poluprostog operatora.** Između korijena $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ može biti istih. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ svi međusobno različiti među njima i neka se pojavljuju s kratnostima $n_1, \ldots, n_s$, respektivno. Tada možemo pisati

$$k_A(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_n) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}, \ \forall x \in K.$$

Radi jednostavnosti, mi ćemo uvijek pretpostavljati da je niz

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$$

upravo

$$\overbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}^{n_1},\overbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_2}^{n_2},\dots\overbrace{\lambda_s,\dots,\lambda_s}^{n_s}.$$

Ako to nije, postoji permutacija koja niz $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ prevodi u taj poredak, a tu istu permutaciju primijenimo da iz baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ konstruiramo novu, označenu opet s e, u kojoj vrijedi matrični prikaz iz točke 4.1 i gornji poredak μ_i–ova. Primjetimo da vrijedi

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n.$$

Nadalje, vrijedi

$e_1, \dots, e_{n_1} \in N(\lambda_1 I - A)$ jer $Ae_i = \lambda_1 e_i,\ 1 \le i \le n_1,$

$e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2} \in N(\lambda_2 I - A)$ jer $Ae_i = \lambda_2 e_i,\ n_1 + 1 \le i \le n_1 + n_2,$

$e_{n_1+n_2+1}, \dots, e_{n_1+n_2+n_3} \in N(\lambda_3 I - A)$ jer $Ae_i = \lambda_3 e_i,\ n_1 + n_2 + 1 \le i \le n_1 + n_2 + n_3,$

$\vdots$

$e_{n-n_s+1}, \dots, e_n \in N(\lambda_s I - A)$ jer $Ae_i = \lambda_s e_i,\ n - n_s + 1 \le i \le n.$

Lema 4.1. *Uz gronje pretpostavke, imamo*

$$\begin{aligned}
&(e_1, \dots, e_{n_1}) \ \ \textit{je baza za} \ \ N(\lambda_1 I - A)\\
&(e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}) \ \ \textit{je baza za} \ \ N(\lambda_2 I - A)\\
&\vdots\\
&(e_{n-n_s+1}, \dots, e_n) \ \ \textit{je baza za} \ \ N(\lambda_s I - A)
\end{aligned}$$

te vrijedi

$$V = N(\lambda_1 I - A) \dot{+} N(\lambda_2 I - A) \dot{+} \cdots \dot{+} N(\lambda_s I - A).$$

Dokaz. Označimo redom s $V_1, V_2, \dots, V_s$ potprostore u V kojima su baze redom $(e_1, \dots, e_{n_1}), (e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}), \dots, (e_{n-n_s+1}, \dots, e_n)$. Kako je $(e_1, \dots, e_n)$ baza za V , to nalazimo da vrijedi

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s.. \tag{4.2}$$

Također, imamo $V_i \subseteq N(\lambda_i I - A)$ za svaki i. Pokažimo da je $V_i = N(\lambda_i I - A)$ za svaki i.

Neka je $v \in N(\lambda_i I - A)$. Napišemo v koristeći dekompoziciju (4.2)

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_s, \quad w_j \in V_j. \tag{4.3}$$

Sada imamo

$$\lambda_i v = Av = Aw_1 + Aw_2 + \cdots + Aw_s = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_s w_s, \tag{4.4}$$

jer je $V_j \subseteq N(\lambda_j I - A)$ za svaki j. Kombinirajući (4.3) i (4.4) nalazimo

$$(\lambda_1 - \lambda_i)w_1 + (\lambda_2 - \lambda_i)w_2 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_i)w_s = 0.$$

Kako je $\lambda_j \neq \lambda_i$ za $j \neq i$ i suma u (4.2) je direktna to nalazimo $w_j = 0$ za $j \neq i$. Dakle, $v = w_i \in V_i$. □

U idućem koraku određujemo minimalni polinom za A.

Lema 4.5. *Uz gornje pretpostavke vrijedi*

$$\mu_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s).$$

Posebno, korijeni minimalnog polinoma poluprostog operatora su jednostruki.

Dokaz. Iz točke 2.9 znamo da je spektar σ_A određen kao skup nultočaka karakterističnog polinoma i da je jednak skupu nultočaka minimalnog polinoma. U našem slučaju (vidi točku 4.1), nultočke karakterističnog polinoma su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Dakle

$$\sigma_A = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}.$$

Ako izbacimo nepotrebna ponavljanja elemenata u skupu, nalazimo

$$\sigma_A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}.$$

Kao što smo gore istaknuli, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ su i nultočke minimalnog polinoma. Kako su međusobno različite, odmah nalazimo

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s) | \mu_A(x).$$

Kako je $\mu_A(x)$ normiran polinom ostaje dokazati

$$\mu_A(x) | (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s).$$

Prema teoremu 2.10 (2) dovoljno je dokazati da vrijedi

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I) = 0.$$

Ekvivalentno, pokazujemo da vrijedi

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I)v = 0, \quad \forall v \in V.$$

U tu svrhu koristimo lemu 4.1. Napišimo v obzirom na dekompoziciju

$$V = N(\lambda_1 I - A) \dot{+} N(\lambda_2 I - A) \dot{+} \cdots \dot{+} N(\lambda_s I - A).$$

Imamo

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s, \quad v_i \in N(\lambda_i I - A).$$

Kako je $v_i \in N(\lambda_i I - A)$, to nalazimo da vrijedi

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0 \implies \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (\lambda_j I - A) \right) (\lambda_i I - A)v_i = 0$$

$$\implies (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I)v_i = 0$$

$$\implies (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I)v = \sum_{i=1}^{s} (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_s I)v_i = 0,$$

jer operatori $\lambda_i I - A$ i $\lambda_j I - A$ međusobno komutiraju:

$$(\lambda_j I - A)(\lambda_i I - A) = (\lambda_i I - A)(\lambda_j I - A).$$

$\square$

4.3. **Karakterizacija poluprostog operatora.** U lemi 4.5 dokazali smo da su nultočke minimalnog polinoma poluprostog operatora jednostruke. Ta tvrdnja vrijedi za $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. U idućem teoremu dokazujemo obrat. Međutim, treba nam pretpostavka da je polje algebarski zatvoreno tj. da se svaki polinom može napisati kao produkt linearnih polinoma. Dakle, pretpostavljamo da je $K = \mathbb{C}$.

Teorem 4.6. *Neka je $K = \mathbb{C}$. Onda $A \in L(V)$ je poluprost ako i samo ako svi korijeni minimalnog polinoma od A su jednostruki.*

Dokaz. Smjer $\Longrightarrow$ slijedi iz leme 4.5. Dokazujemo obrat $\Longleftarrow$. Po pretpostavci korijeni minimalnog polinoma su jednostruki:

$$\mu_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ za } i \neq j.$$

Dokazujemo

$$V = N(\lambda_1 I - A) \dot{+} N(\lambda_2 I - A) \dot{+} \cdots \dot{+} N(\lambda_s I - A) \tag{4.7}$$

iz čega teorem direktno slijedi jer bazu za V možemo formirati ovako

$$\text{baza za } V = (\text{baza za } N(\lambda_1 I - A), \ldots, \text{baza za } N(\lambda_s I - A)),$$

a za svaki vektor x iz $N(\lambda_i I - A)$ vrijedi $Ax = \lambda_i x$, te se zato u toj bazi za V operator A dijagonalizira.

Za dokaz dekompozicije (4.7) koristimo rastav u parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{\mu_A(x)} = \frac{1}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_s)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\eta_i}{(x - \lambda_i)}, \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

gdje su η_i skalari različiti od nule. Ako definiramo polinome

$$Q_i(x) = \eta_i \prod_{j=1,\ j \neq i}^{s} (x - \lambda_j), \quad i = 1, \ldots, s,$$

onda iz rastava u parcijalne razlomke nalazimo množenjem s $\mu_A(x)$

$$\sum_{i=1}^{s} Q_i(x) = 1.$$

Iz definicije polinoma Q_i vidimo da vrijedi

$$(x - \lambda_i) Q_i(x) = \eta_i \mu_A(x), \quad i = 1, \ldots, s,$$

Ovi identiteti daju sljedeće

$$
(4.8) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{s} Q_i(A) = I \\ &(A - \lambda_i I)Q_i(A) = \eta_i \mu_A(A) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \end{aligned}
$$

jer A poništava svoj minimalni polinom.

Pokazati ćemo da dekompozicija (4.7) slijedi iz identiteta danih s (4.8). Neka je $v \in V$. Onda definiramo

$$
v_i \stackrel{def}{=} Q_i(A)v.
$$

Prvi identitet u (4.8) pokazuje

$$
v = Iv = \sum_{i=1}^{s} Q_i(A)v = \sum_{i=1}^{s} v_i,
$$

a drugi identitet daje

$$
(A-\lambda_i I)v_i = (A-\lambda_i I)Q_i(A)v = 0v = 0 \implies Av_i = \lambda_i v_i \implies v_i \in N(\lambda_i I - A).
$$

Ovim smo pokazali da je V suma potprostora $N(\lambda_1 I - A), \ldots, N(\lambda_s I - A)$, jer se svaki $v \in V$ može napisati kao suma $v = v_1 + \cdots + v_s$ gdje je $v_1 \in N(\lambda_1 I - A), \ldots, v_s \in N(\lambda_s I - A)$.

Ostaje dokazati da je suma u (4.7) direktna. Treba pokazati

$$
w_1 + w_2 + \cdots + w_s = 0, \quad w_i \in N(\lambda_i I - A), \implies w_j = 0, \quad \forall j.
$$

Neka je $j \in \{1, \ldots, s\}$. Pokazujemo da je $w_j = 0$. Iz gornje relacije slijedi

$$
\begin{aligned} Q_j(A)w_1 + Q_j(A)w_2 + \cdots + Q_j(A)w_{j-1} + \\ + Q_j(A)w_j + Q_j(A)w_{j+1} + \cdots + Q_j(A)w_s = 0. \end{aligned}
$$

Kako je $Aw_i = \mu_i w_i$, to odmah nalazimo da vrijedi $Q_j(A)w_i = Q_j(\mu_i)w_i$.[4] Imamo dakle

$$
\begin{aligned} Q_j(\mu_1)w_1 + Q_j(\mu_2)w_2 + \cdots + Q_j(\mu_{j-1})w_{j-1} + \\ + Q_j(\mu_j)w_j + Q_j(\mu_{j+1})w_{j+1} + \cdots + Q_j(\mu_s)w_s = 0. \end{aligned}
$$

Kako su sve nultočke polinoma Q_j svi λ_i osim λ_j, dobivamo

$$
Q_j(\mu_j)w_j = 0 \implies w_j = 0.
$$

[4]Posljedica je opće tvrdnje: Neka je $A \in L(V)$, $\mu \in K$ i $v \in V$ takav da $Av = \mu v$. Onda imamo $Q(A)v = Q(\mu)v$ za svaki polinom Q. Zaista, najprije iz $Av = \mu v$ redom nalazimo $A^2 v = A(Av) = A(\mu v) = \mu Av = \mu^2 v$, itd. $A^k v = \mu^k v$, $k \geq 1$. Na kraju, za polinom $Q(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, imamo

$$
\begin{aligned} Q(A)v &= (\alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)v \\ &= \alpha_m A^m v + \alpha_{m-1}A^{m-1}v + \cdots + \alpha_1 Av + \alpha_0 v \\ &= \alpha_m \mu^m v + \alpha_{m-1}\mu^{m-1}v + \cdots + \alpha_1 \mu v + \alpha_0 v \\ &= (\alpha_m \mu^m + \alpha_{m-1}\mu^{m-1} + \cdots + \alpha_1 \mu + \alpha_0)v = Q(\mu)v. \end{aligned}
$$

□

Korolar 4.9. *Neka su* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *međusobno različite nultočke minimalnog polinoma poluprostog operatora* A*. Neka je* $n_i = \dim N(\lambda_i I - A)$ *za svaki* i*. Tada je karakterističan polinom dan sa*

$$k_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_s)^{n_s}.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz definicije karakterističnog polinoma i dekompozicije (4.7) ako A napišemo matrično tako da bazu izaberemo kako je objašnjeno u paragrafu koji sadrži (4.7). □

Primjer 4.10. *Neka je* $A = \mu I$ *skalarni operator. Očito je* A *poluprost. Nadalje, imamo* $\mu_A(x) = x - \mu$ *i* $k_A(x) = (x - \mu)^n$*. Posebno, ako je* $A = I$ *(identiteta), onda je* $\mu_A(x) = x - 1$ *i* $k_A(x) = (x - 1)^n$*.*

5. Jordanova forma

Od sada nadalje pretpostavljamo da je polje $K = \mathbb{C}$.

5.1. **Nilpotentni i poluprosti operatori.** Za sada imamo ovu situaciju:

poluprosti operatori	nilpotentni operatori
$A \in L(V)$ poluprost $\Updownarrow$ $\mu_A(\lambda)$ ima samo jednostruke korijene, tj. $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_s)$	$A \in L(V)$ nilpotentan $\Updownarrow$ postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je $A^p = 0$ i $A^{p-1} \neq 0$ $\Updownarrow$ $\mu_A(\lambda) = \lambda^p$

Vidjet ćemo da je opći slučaj $A \in L(V)$ "kombinacija" ta dva ekstrema — vidi točku 5.9 niže.

*Uočimo najprije da je linearan operator A **istovremeno** poluprost i nilpotentan ako i samo ako je $A = 0$.*

Naime, operator 0 je očito i poluprost i nilpotentan. Obratno, ako je A nilpotentan, onda je $\mu_A(\lambda) = \lambda^p$, a takav polinom ima jednostruke nultočke samo kad je $p = 1$. Znači da nilpotentan i poluprost operator A ima minimalni polinom $\mu_A(\lambda) = \lambda$, odakle slijedi $\mu_A(A) = A = 0$.

5.2. **Faktorizacija minimalnog i svojstvenog polinoma.** *Od sada nadalje mi pretpostavljamo da je polje $K = \mathbb{C}$ da bismo minimalni i svojstveni polinom svakog operatora $A \in L(V)$ mogli faktorizirati, tj. zapisati u obliku*

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{p_s},$$
$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

gdje su $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sve međusobno različite nultočke minimalnog i svojstvenog polinoma. Podsjetimo se da je

$$p_1 \leq n_1, \dots, p_s \leq n_s$$

jer minimalni polinom dijeli svojstveni polinom.

5.3. **Rastavljanje racionalne funkcije $1/\mu_A(\lambda)$ na parcijalne razlomke.** Sada opet koristimo parcijalne razlomke[5], ali za trenutak radimo u malo

[5]Neka su $P_m(x)$ i $P_n(x)$ polinomi stupnjeva m i n i neka je $m < n$. Pretpostavljamo da ta dva polinoma nemaju zajedničkih nultočaka i gledamo pravu racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,.$$

Neka je x_1 nultočka nazivnika kratnosti p. Tada je $P_n(x) = (x-x_1)^p P_{n-p}(x)$ i $P_{n-p}(x_1) \neq 0$, a ostale nultočke polinoma $P_{n-p}(x)$ iste su kao i u $P_n(x)$. Pišimo sada $R(x)$ u obliku

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-x_1)^p} + \frac{P_m(x)}{P_n(x)} - \frac{A_1}{(x-x_1)^p} = \frac{A_1}{(x-x_1)^p} + \frac{P_m(x) - A_1 P_{n-p}(x)}{(x-x_1)^p P_{n-p}(x)}$$

općenitijoj situaciji. Izaberemo

$$m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$$

i rastavimo na parcijalne razlomke

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}} = \frac{\alpha_{11}}{(\lambda-\lambda_1)} + \frac{\alpha_{12}}{(\lambda-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{1m_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}} \\ \cdots \\ + \frac{\alpha_{s1}}{(\lambda-\lambda_s)} + \frac{\alpha_{s2}}{(\lambda-\lambda_s)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{sm_s}}{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}\,,\end{aligned}$$

gdje su $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$. Odavle svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{S_i(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}\,,$$

gdje je $S_i(\lambda)$ polinom stupnja najviše $m_i - 1$. To nam daje

$$1 = \sum_{i=1}^{s} S_i(\lambda) \prod_{k\neq i} (\lambda-\lambda_k)^{m_k}\,.$$

Za $1 \le i \le s$ stavimo

$$Q_i(\lambda) = S_i(\lambda) \prod_{k\neq i} (\lambda-\lambda_k)^{m_k}\,. \tag{5.1}$$

Tada je

$$1 = \sum_{i=1}^{s} Q_i(\lambda) \qquad \text{i} \tag{5.2}$$

$$(\lambda-\lambda_i)^{m_i} Q_i(\lambda) = Q_i(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{m_i} = S_i(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}\,. \tag{5.3}$$

Uočimo da operator A poništava polinom $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ ako i samo ako $\mu_A(\lambda)$ dijeli polinom $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$, a to je ako i samo ako za sve $i = 1, \ldots, s$ vrijedi $m_i \ge p_i$.

---

i odredimo konstantu A_1 tako da i brojnik posljednjeg člana na desnoj strani ima nultočku x_1, da bude dakle $P_m(x_1) - A_1 P_{n-p}(x_1) = 0$. Tada se brojnik može predočiti u obliku

$$P_m(x) - A_1 P_{n-p}(x) = (x - x_1) f_1(x).$$

Prema tome je sada

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-x_1)^p} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{p-1} P_{n-p}(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^p} + R_1(x)$$

i isti postupak možemo primijeniti na pravu racionalnu funkciju $R_1(x)$. Na taj način u konačno koraka dobijemo rastav racionalne funkcije $R(x)$ na parcijalne razlomke. (Vidi Dr. Željko Marković, *Uvod u višu analizu I dio*, treće izdanje, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1950, str. 180.)

5.4. **Potprostori** $\ker(A-\lambda I)^m$ **za svojstvenu vrijednost** $\boldsymbol{\lambda}$**.** Podsjetimo se[6] da je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ potprostor $\ker(A-\lambda I)^m$ invarijantan za A jer polinom $(A-\lambda I)^m$ komutira s A:

$$(A-\lambda I)^m v = 0 \quad \text{povlači} \quad (A-\lambda I)^m (Av) = A(A-\lambda I)^m v = 0.$$

Također uočimo da za svojstvenu vrijednost λ postoji svojstveni vektor $v \in \ker(A-\lambda I)$, $v \neq 0$, pa za svaki prirodni broj m imamo

$$\ker(A-\lambda I)^m \neq 0.$$

Lema 5.4. *(i) Suma vektorskih prostora*

$$\ker(A-\lambda_1 I)^{m_1} + \cdots + \ker(A-\lambda_s I)^{m_s}$$

je direktna suma.

(ii) Ako A poništava polinom $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$, onda je

$$V = \ker(A-\lambda_1 I)^{m_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \ker(A-\lambda_s I)^{m_s}\,.$$

Dokaz. (i) Moramo pokazati da

$$0 \in \ker(A-\lambda_1 I)^{m_1} + \cdots + \ker(A-\lambda_s I)^{m_s}$$

ima jedinstveni prikaz $0 = 0 + \cdots + 0$. Neka je

$$0 = v_1 + \cdots + v_s\,, \qquad v_i \in \ker(A-\lambda_i I)^{m_i}\,.$$

Fiksirajmo $i = 1, \dots, s$. Zbog definicije (5.1) i relacije $(A-\lambda_k I)^{m_k} v_k = 0$ imamo $Q_i(A)v_k = 0$ za $k \neq i$. Tada iz relacije

$$v_i = -(v_1 + \cdots + v_{i-1} + v_{i+1} + \cdots + v_s).$$

slijedi

$$Q_i(A)v_i = -Q_i(A)\sum_{k\neq i} v_k = -\sum_{k\neq i} Q_i(A)v_k = 0.$$

S druge strane za $j \neq i$ imamo $Q_j(A)v_i = 0$, pa relacija (5.2) daje

$$v_i = Iv_i = \left(\sum_{j=1}^{s} Q_j(A)\right) v_i = \sum_{j=1}^{s} Q_j(A)v_i = 0.$$

Dakle $v_i = 0$ i (i) je dokazano.

(ii) Neka je $(A-\lambda_1 I)^{m_1}\dots(A-\lambda_s I)^{m_s} = 0$. Tada nam polinomijalna relacija (5.3) daje

$$\begin{aligned}(A-\lambda_i I)^{m_i} Q_i(A) &= Q_i(A)(A-\lambda_i I)^{m_i} \\ &= S_i(A)(A-\lambda_1 I)^{m_1}\dots(A-\lambda_s I)^{m_s} = S_i(A)0 = 0.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sada za vektor $v \in V$ imamo

$$v_i \overset{def}{=} Q_i(A)v \in \ker(A-\lambda_i I)^{m_i},$$

[6] U ovom predavanju koristimo oznaku $\ker(B)$ za jezgru $N(B)$ operatora B.

kao u dokazu teorema 4.6. Iz relacije

$$I = \sum_{i=1}^{s} Q_i(A)$$

slijedi

$$v = Iv = \left(\sum_{i=1}^{s} Q_i(A) \right) v = \sum_{i=1}^{s} Q_i(A)v = \sum_{i=1}^{s} v_i.$$

Ovime je (ii) dokazano. □

5.5. **Korijeni potprostori linearnog operatora.** Zadržimo dosadašnje oznake za operator $A \in L(V)$. Podsjetimo se da je po definiciji

$$\ker(A - \lambda_i I) = \{v \in V \mid (A - \lambda_i I)v = 0\} \subseteq V$$

svojstveni potprostor operatora A za svojstvenu vrijednost λ_i. Također primijetimo da vrijedi

$$0 \neq \ker(A - \lambda_i I) \subseteq \ker(A - \lambda_i I)^2 \subseteq \ker(A - \lambda_i I)^3 \subseteq \dots .$$

Korijeni potprostor operatora A za svojstvenu vrijednost λ_i je po definiciji potprostor

$$\ker(A - \lambda_i I)^{p_i} = \{v \in V \mid (A - \lambda_i I)^{p_i} v = 0\} \subseteq V,$$

gdje je p_i kratnost nultočke λ_i u minimalnom polinomu

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

Teorem 5.6. *Neka je $K = \mathbb{C}$ i $A \in L(V)$. Tada je V direktna suma korijenih potprostora operatora A, tj.*

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \qquad V_i = \ker(A - \lambda_i I)^{p_i} \text{ za } i = 1, \dots, s.$$

Nadalje imamo sljedeće:

(a) Za danu svojstvenu vrijednost svojstveni potprostor je potprostor korijenog potprostora, tj.

$$\ker(A - \lambda_i I) \subseteq V_i \,.$$

(b) $V_i = \ker(A - \lambda_i I)^k$ *za svaki* $k \geq p_i$.

(c) $\ker(A - \lambda_i I)^k \subsetneq V_i$ *za svaki* $k < p_i$.

(d) Dimenzija korijenog potprostora jednaka je kratnosti nultočke λ_i u svojstvenom polinomu, tj.

$$\dim V_i = n_i.$$

(e) Označimo s $A_i = A|_{V_i} \colon V_i \to V_i$ inducirani operator na invarijantnom potprostoru V_i. Tada je minimalni polinom induciranog operatora A_i na prostoru V_i jednak

$$\mu_{A_i}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{p_i}$$

i vrijedi

$$\mu_A(\lambda) = \mu_{A_1}(\lambda) \dots \mu_{A_s}(\lambda).$$

Dokaz. Tvrdnja da je V direktna suma korijenih potprostora slijedi iz leme 5.4.

(a) $(A-\lambda_i I)v=0$ povlači $(A-\lambda_i I)^{p_i}v=(A-\lambda_i I)^{p_i-1}[(A-\lambda_i I)v]=0$.

(b) Uočimo da za $k<\ell$ vrijedi $\ker(A-\lambda_i I)^k\subseteq\ker(A-\lambda_i I)^\ell$ jer

$$(A-\lambda_i I)^k v=0 \quad \text{povlači} \quad (A-\lambda_i I)^{\ell-k}[(A-\lambda_i I)^k v]=0.$$

Ako je $p_1\le m_1,\ldots,p_s\le m_s$, onda je

$$V_i=\ker(A-\lambda_i I)^{p_i}\subseteq\ker(A-\lambda_i I)^{m_i},\quad i=1,\ldots,s, \tag{5.7}$$

pa uspoređujući dimenzije imamo

$$\dim V_i\le\dim\ker(A-\lambda_i I)^{m_i},\quad i=1,\ldots,s. \tag{5.8}$$

Prema lemi 5.4 imamo direktne sume potprostora

$$V=V_1\dot{+}\cdots\dot{+}V_s \quad \text{i} \quad V=\ker(A-\lambda_1 I)^{m_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\ker(A-\lambda_s I)^{m_s},$$

pa onda za dimenzije vrijedi

$$\dim V=\sum_{i=1}^s\dim V_i \quad \text{i} \quad \dim V=\sum_{i=1}^s\dim\ker(A-\lambda_i I)^{m_i}.$$

Odavle i nejednakosti (5.8) slijedi jednakost dimenzija

$$\dim V_i=\dim\ker(A-\lambda_i I)^{m_i},\quad i=1,\ldots,s.$$

Na kraju, jednakost dimenzija i (5.7) povlači jednakost potprostora.

Za preostale tvrdnje dokažimo najprije (e). Kako je $V_i=\ker(A-\lambda_i I)^{p_i}$, to za $v\in V_i$ imamo

$$0=(A-\lambda_i I)^{p_i}v=(A_i-\lambda_i I)^{p_i}v.$$

Dakle za $f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ imamo $f_i(A_i)=0$. To povlači

$$\mu_{A_i}(\lambda)|f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{p_i},$$

pa je za sve $1\le i\le s$

$$\mu_{A_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \quad \text{za neki} \quad m_i\le p_i.$$

Stavimo

$$\mu(\lambda)=\mu_{A_1}(\lambda)\ldots\mu_{A_s}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}.$$

Napišimo vektor $v=v_1+\cdots+v_s$ u odnosu na rastav prostora V na korijene potprostore V_i. Tada je

$$\mu(A)v=\mu(A)v_1+\cdots+\mu(A)v_s=\mu(A_1)v_1+\cdots+\mu(A_s)v_s=0$$

jer $\mu_{A_i}(A)v_i=\mu_{A_i}(A_i)v_i=0$ povlači

$$\mu(A)v_i=\left(\prod_{k=1}^s\mu_{A_k}(A)\right)v_i=\left(\prod_{k\ne i}\mu_{A_k}(A)\right)\mu_{A_i}(A)v_i=0.$$

Dakle $\mu(A)=0$. No to povlači $\mu_A(\lambda)|\mu(\lambda)$ i $p_i\le m_i$. Znači da je

$$\mu_{A_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{p_i} \quad \text{i} \quad \mu_A(\lambda)=\mu_{A_1}(\lambda)\ldots\mu_{A_s}(\lambda).$$

To dokazuje (e). Iz gornje formule za minimalni polinom $\mu_{A_i}(\lambda)$ slijedi da je $\ker(A-\lambda_i I)^k \neq V_i$ za $k < p_i$, što dokazuje (c).

Ostaje dokazati (d). Uočimo da je za uređenu bazu od V oblika

$$(\text{baza od } V_1, \dots, \text{baza od } V_s)$$

matrica operatora A blok-dijagonalna matrica

$$\begin{pmatrix} A_1(\text{baza od } V_1) & & & \\ & A_2(\text{baza od } V_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s(\text{baza od } V_s) \end{pmatrix}.$$

Zato[7] za svojstveni polinom imamo

$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda)k_{A_2}(\lambda)\dots k_{A_s}(\lambda).$$

S druge strane $\mu_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{p_i}$ povlači da je svojstveni polinom induciranog operatora A_i na potprostoru V_i oblika

$$k_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{\dim V_i}$$

(jer svojstveni i minimalni polinom imaju iste nultočke i stupanj svojstvenog polinoma jednak je dimenziji prostora). Dakle

$$k_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\dim V_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{\dim V_s} = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

pa zbog jedinstvenosti faktorizacije imamo $\dim V_i = n_i$ za sve $i = 1, \dots, s$.

□

5.6. **Teorem o Jordanovom rastavu linearnog operatora.**

Teorem 5.9. *Neka je $A \in L(V)$. Tada postoje jedinstveni poluprosti operator S i nilpotentni operator N takvi da je*

$$A = S + N, \qquad SN = NS. \tag{5.10}$$

Operatore S i N zovemo poluprostim i nilpotentnim dijelom u Jordanavom rastavu operatora A.

Prije svega valja naglasiti da u Jordanovom rastavu (5.10) **poluprosti i nilpotentni dio komutiraju**. Na primjer, za

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

imamo rastav operatora $A = S + N$ na sumu poluprostog S i nilpotentnog N, ali to nije Jordanov rastav jer je $SN \neq NS$.

Zadatak: Nađite Jordanov rastav od A.

[7]Ako je B kvadratna blok-dijagonalna matrica s kvadratnim matricama B_1 i B_2 na dijagonali, onda je $\det B = \det B_1 \det B_2$. Tu tvrdnju možemo dokazati koristeći Laplaceov razvoj determinante.

Dokaz teorema 5.9. Prvo dokazujemo egzistenciju Jordanovog rastava operatora $A \in L(V)$ koristeći rastav prostora

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$$

na korijene potprostore operatora A. Kao i prije, inducirane operatore označimo s

$$A_i \colon V_i \to V_i.$$

Obično pišemo

$$A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s$$

i kažemo da smo A rastavili na inducirane operatore A_i jer za rastav vektora

$$v = v_1 + \cdots + v_s, \quad v_i \in V_i, \tag{5.11}$$

imamo i rastav vektora

$$Av = A_1 v_1 + \cdots + A_s v_s, \quad Av_i = A_i v_i \in V_i. \tag{5.12}$$

Označimo li s I_i inducirane operatore od I na V_i, tj. jedinične operatore na V_i, onda imamo rastav

$$I = I_1 \dot{+} \cdots \dot{+} I_s.$$

Iz tvrdnji (b) i (c) teorema 5.6 slijedi da je za $i \in \{1, \ldots, s\}$ operator

$$N_i = A_i - \lambda_i I_i \in L(V_i)$$

nilpotentan indeksa p_i, dok je operator

$$S_i = A_i - N_i = \lambda_i I_i \in L(V_i)$$

skalarni operator, pa dakle i poluprost. Definirajmo linearne operatore S i N na V kao

$$S = S_1 \dot{+} \cdots \dot{+} S_s \quad \text{i} \quad N = N_1 \dot{+} \cdots \dot{+} N_s,$$

tj. za rastav (5.11) vektora v stavimo

$$Sv = S_1 v_1 + \cdots + S_s v_s \quad \text{i} \quad Nv = N_1 v_1 + \cdots + N_s v_s. \tag{5.13}$$

(Dokažite da su tako definirani S i N linearni operatori.) Tada je po konstrukciji svaki V_i invarijantan za S i za N. Nadalje, pripadni inducirani operatori su upravo

$$S_i = S|_{V_i}, \quad N_i = N|_{V_i} \quad \text{i vrijedi} \quad A_i = S_i + N_i. \tag{5.14}$$

Odavle i relacija (5.12)–(5.14) slijedi

$$A = S + N.$$

Budući da skalarni operator $S_i = \lambda_i I_i$ komutira sa svakim operatorom na V_i, to posebno za N_i imamo $S_i N_i = N_i S_i$. Sada iz definicije (5.13) slijedi

$$SN = S_1 N_1 \dot{+} \cdots \dot{+} S_s N_s = N_1 S_1 \dot{+} \cdots \dot{+} N_s S_s = NS.$$

Budući da je $S_i = \lambda_i I_i$ skalarni operator na V_i, tj.

$$S_i w = \lambda_i w \quad \text{za svaki} \quad w \in V_i,$$

to se u bazi od V oblika

$$\text{baza od } V = (\text{baza od } V_1, \dots, \text{baza od } V_s)$$

operator S dijagonalizira. Znači da je S poluprost operator. S druge strane, iz definicije (5.13) slijedi

$$N^p = N_1^p \dot{+} \cdots \dot{+} N_s^p,$$

pa je očito N nilpotentan operator indeksa $p = \max\{p_1, \dots, p_s\}$.

Time smo dokazali egzistenciju Jordanovog rastava $A = S+N$ na poluprosti dio S i nilpotentni dio N.

Dokažimo jedinstvenost. Neka je S' poluprost i N' nilpotentan operator tako da je

$$A = S' + N', \quad S'N' = N'S'.$$

Neka je $\{\mu_1, \dots, \mu_t\}$ spektar od S' i neka je

$$V = W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_t, \quad W_j = \ker(S' - \mu_j I) \tag{5.15}$$

rastav prostora V na svojstvene potprostore W_j poluprostog operatora S'. Tada imamo

$$S' = S_1' \dot{+} \cdots \dot{+} S_t' = \mu_1 I_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mu_t I_t\,,$$

gdje smo sa $S_j' = \mu_j I_j$ označili inducirani operator na W_j. Budući da po pretpostavci N' komutira s operatorom S', to su svojstveni potprostori od S' invarijantni za N', tj. $N'W_j \subseteq W_j$. Označimo li s N_j' inducirani operator na W_j, imamo

$$N' = N_1' \dot{+} \cdots \dot{+} N_t'.$$

Očito su N_j' nilpotentni operatori na W_j nekog indeksa q_j. Budući da je $A = S' + N'$, to su potprostori W_j invarijantni za A i

$$A = A_1' \dot{+} \cdots \dot{+} A_t', \qquad A_j' = \mu_j I_j + N_j'\,,$$

gdje smo s $A_j' = A|_{W_j}$ označili inducirani operator na W_j. Iz relacija

$$(N_j')^{q_j} = (A_j' - \mu_j I_j)^{q_j} = 0 \quad \text{i} \quad (N_j')^{q_j - 1} = (A_j' - \mu_j I_j)^{q_j - 1} \neq 0$$

slijedi da postoji vektor $w \in W_j$ takav da je

$$v = (A_j' - \mu_j I_j)^{q_j - 1} w \neq 0,$$
$$(A - \mu_j I)v = (A_j' - \mu_j I_j)v = (A_j' - \mu_j I_j)(A_j' - \mu_j I_j)^{q_j - 1} w = 0.$$

Znači da je svaki μ_j svojstvena vrijednost operatora A, odnosno da je spektar $\{\mu_1, \dots, \mu_t\}$ od S' podskup spektra $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ od A. Smijemo pretpostaviti da su μ_j i λ_i numerirani tako da je

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \dots, \quad \mu_t = \lambda_t.$$

Tada za $w \in W_j$ slijedi

$$(A - \lambda_j I)^{q_j} w = (A_j' - \mu_j I_j)^{q_j} w = 0, \quad j = 1, \dots, t,$$

pa je zbog tvrdnji (b) i (c) teorema 5.6

$$W_j \subseteq \ker(A-\lambda_j I)^{q_j} \subseteq V_j. \tag{5.16}$$

Odavle i iz (5.15) imamo

$$\dim W_j \le \dim V_j \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{t} \dim W_j = n = \sum_{j=1}^{s} \dim V_j,$$

a to povlači jednakost $t=s$, jednakost dimenzija $\dim W_j = \dim V_j$ i onda, zbog (5.16), jednakost potprostora

$$W_j = V_j, \quad j=1,\dots,s.$$

No onda imamo $A_j' = A_j$,

$$S_j' = \mu_j I_j = \lambda_j I_j = S_j, \quad N_j' = A_j' - S_j' = A_j - S_j = N_j$$

i, na kraju,

$$S' = S_1' \dot{+} \cdots \dot{+} S_s' = S_1 \dot{+} \cdots \dot{+} S_s = S,$$
$$N' = N_1' \dot{+} \cdots \dot{+} N_s' = N_1 \dot{+} \cdots \dot{+} N_s = N.$$

Time je dokazana jedinstvenost Jordanovog rastava operatora. □

5.7. **Jordanova forma operatora.** *Neka je $A \in L(V)$ i neka su*

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{p_s},$$
$$k_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

minimalni i svojstveni polinom od A. Neka je

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \qquad V_i = \ker(A-\lambda_i I)^{p_i} \ \textit{za } i=1,\dots,s,$$
$$A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s, \qquad A_i = \lambda_i I_i + N_i \quad \textit{za } i=1,\dots,s,$$

rastav prostora V na korijene potprostore od A. Tada vrijedi:

(i) Za svaki $i=1,\dots,s$ postoji rastav korijenog potprostora na A-invarijantne potprostore

$$V_i = V_{i1} \dot{+} \cdots \dot{+} V_{ir_i}, \quad \dim V_{i1} \ge \cdots \ge \dim V_{ir_i} \tag{5.17}$$

tako da je $p_i = p_{i1} = \dim V_{i1}$ indeks nilpotentnog operatora $N_i = N|_{V_i}$ i da je za sve $j=1,\dots,r_i$ indeks nilpotentnog operatora $N_{ij} = N_i|_{V_{ij}}$ jednak dimenziji

$$p_{ij} = \dim V_{ij}.$$

Za svaki $i=1,\dots,s$ broj k-dimenzionalnih potprostora u rastavu (5.17) jednak je

$$m_{ik} = r\left((A-\lambda_i I)^{k+1}\right) + r\left((A-\lambda_i I)^{k-1}\right) - 2r\left((A-\lambda_i I)^{k}\right). \tag{5.18}$$

(ii) Postoji baza od V u kojoj je matrica operatora A blok-dijagonalna matrica s kvadratnim matricama na dijagonali oblika

$$\lambda I_k + J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

pri čemu je I_k jedinična $k \times k$ matrica, J_k elementarna $k \times k$ Jordanova klijetka i λ svojstvena vrijednost od A. Za svaki $\lambda = \lambda_i$ broj blokova $\lambda I_k + J_k$ jednak je m_{ik} dan formulom (5.18). Posebno, do na permutaciju blokova takva je matrica jedinstvena i zove se Jordanova forma operatora A.

(iii) Dva su operatora slična ako i samo ako imaju istu Jordanovu formu.

Dokaz. (i) Prema teoremu 5.6 operator $N_i = A_i - \lambda_i I_i$ je nilpotentan operator indeksa p_i, pa prema teoremu 3.7 za svaki $i = 1, \ldots, s$ postoji rastav (5.17) korijenog potprostora na N_i-invarijantne potprostore V_{ij} takve da je indeks induciranog operatora jednak dimenziji potprostora, a broj k-dimenzionalnih potprostora u tom rastavu jednak je

$$m_{ik} = r\left((N_i)^{k+1}\right) + r\left((N_i)^{k-1}\right) - 2r\left((N_i)^k\right). \tag{5.19}$$

No N_i-invarijantni potprostori $V_{ij} \subseteq V_i \subseteq V$ su invarijantni za operator $A_i = \lambda_i I_i + N_i$ na V_i, pa onda i za operator A na V. U rastavu na korijene potprostore za fiksni i imamo

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_i \dot{+} \cdots \dot{+} V_s,$$

$$A - \lambda_i I = (A_1 - \lambda_i I_1) \dot{+} \cdots \dot{+} N_i \dot{+} \cdots \dot{+} (A_s - \lambda_i I_s),$$

$$(A - \lambda_i I)^k = (A_1 - \lambda_i I_1)^k \dot{+} \cdots \dot{+} N_i^k \dot{+} \cdots \dot{+} (A_s - \lambda_i I_s)^k.$$

Budući da je $\lambda_j \neq \lambda_i$ za $j \neq i$, operator

$$A_j - \lambda_i I_j = \lambda_j I_j + N_j - \lambda_i I_j = (\lambda_j - \lambda_i) I_j + N_j$$

je regularan operator na korijenom potprostoru V_j (dokažite!) i za svaki k je

$$r\left((A_j - \lambda_i I_j)^k\right) = \dim V_j = n_j.$$

Odavle slijedi

$$r\left((A - \lambda_i I)^k\right) = r\left((N_i)^k\right) + \sum_{j \neq i} r\left((A - \lambda_i I)^k\right) = r\left((N_i)^k\right) + \sum_{j \neq i} \dim V_j$$

pa zbog jednakosti

$$\sum_{j \neq i} \dim V_j + \sum_{j \neq i} \dim V_j - 2 \sum_{j \neq i} \dim V_j = 0$$

slijedi jednakost m_{ik} zadanih formulama (5.18) i (5.19).

(ii) Ako u svakom od potprostora V_{ij} iz rastava (5.17) odaberemo cikličku bazu[8] za nilpotentni operator N_{ij} i za bazu prostora V uzmemo uniju tih baza, onda matrica operatora A u toj bazi ima opisani oblik.

Obratno, ako je u nekoj bazi matrica operatora A blok-dijagonalna s blokovima oblika $\lambda I_k + J_k$, onda dio baze od V koji odgovara tom bloku razapinje potprostor u korijenom potprostoru $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)^n$ za svojstvenu vrijednost λ, i direktna suma svih takvih potprostora za fiksni λ daje rastav (5.17) korijenog potprostora V_λ. Sada jedinstvenost Jordanove forme slijedi iz činjenice da je broj $k \times k$ blokova oblika $\lambda_i I_k + J_k$ dan formulom (5.18) u terminima operatora A.

(iii) Neka su A i B slični operatori, tj. neka je $B = T^{-1}AT$ za neki regularni operator T. Tada A i B imaju jednake svojstvene polinome

$$\det(xI - B) = \det T^{-1}(xI - A)T = \det(xI - A),$$

pa onda i nultočke svojstvenih polinoma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Budući da slični operatori imaju isti rang, iz formule (5.18) i jednakosti

$$r\left((B - \lambda_i I)^k\right) = r\left(T^{-1}(A - \lambda_i I)^k T\right) = r\left((A - \lambda_i I)^k\right)$$

slijedi da u Jordanovoj formi operatori A i B imaju isti broj blokova oblika $\lambda_i I_k + J_k$.

Obratno, ako u dvije baze e i e' operatori A i B imaju iste matrice $A(e') = B(e)$, onda za operator prijelaza T iz baze e u bazu e' imamo

$$B(e) = A(e') = T(e)^{-1}A(e)T(e) = (T^{-1}AT)(e),$$

pa su operatori A i $B = T^{-1}AT$ slični. □

5.8. **Elementarni divizori linearnog operatora.** Kao što smo vidjeli, iz rastava prostora V na korijene potprostore, i potom rastava (5.17) svakog korijenog potprostora V_i na A-invarijantne potprostore V_{ij}, dobivamo rastav operatora

$$V = \sum_{i=1}^{s} \dot{+} \sum_{j=1}^{r_i} \dot{+} V_{ij}, \qquad A = \sum_{i=1}^{s} \dot{+} \sum_{j=1}^{r_i} \dot{+} A_{ij}\,, \quad A_{ij} = \lambda_i I_{ij} + N_{ij}.$$

Ako u V uzmemo bazu koja je unija cikličkih baza u V_{ij} za nilpotentne operatore N_{ij}, onda dobivamo Jordanovu formu operatora. Pri tome k-dimenzionalni potprostor V_{ij} doprinese dijagonalni $k \times k$ blok $\lambda_i I_k + J_k$. Znači da je Jordanova forma od A u potpunosti određena dimenzijama $p_{ij} = \dim V_{ij}$ koje možemo zapisati u tablicu

$$\begin{aligned} &p_1 = p_{11} \geq p_{12} \geq \cdots \geq p_{1r_1}, \quad p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1r_1} = n_1, \\ &p_2 = p_{21} \geq p_{22} \geq \cdots \geq p_{2r_2}, \quad p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2r_2} = n_2, \\ &\qquad \cdots \\ &p_s = p_{s1} \geq p_{s2} \geq \cdots \geq p_{sr_s}, \quad p_{s1} + p_{s2} + \cdots + p_{sr_s} = n_s. \end{aligned} \tag{5.20}$$

[8]Vidi točku 3.4.

S druge strane iz Jordanove forme operatora dobivamo svojstveni polinom operatora kao produkt svojstvenih polinoma induciranih operatora

$$k_A(x) = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} k_{A_{ij}}(x) = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} (x - \lambda_i)^{p_{ij}}. \tag{5.21}$$

Svojstveni polinom induciranog operatora A_{ij} jednak je njegovom minimalnom polinomu, tj.

$$k_{A_{ij}}(x) = (x - \lambda_i)^{p_{ij}} = \mu_{A_{ij}}(x),$$

i zovemo ga *elementarnim divizorom od* A. Elementarne divizore operatora A možemo zapisati u tablicu

$$\begin{aligned} &(x-\lambda_1)^{p_{11}}, (x-\lambda_1)^{p_{12}}, \ldots, (x-\lambda_1)^{p_{1r_1}}, \\ &(x-\lambda_2)^{p_{21}}, (x-\lambda_2)^{p_{22}}, \ldots, (x-\lambda_2)^{p_{2r_2}}, \\ &\quad\ldots \\ &(x-\lambda_s)^{p_{s1}}, (x-\lambda_s)^{p_{s2}}, \ldots, (x-\lambda_s)^{p_{sr_s}}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Očito iz liste elementarnih divizora možemo očitati Jordanovu formu operatora A.

6. Funkcija operatora

6.1. Deriviranje polinoma. Podsjetimo se da je algebra polinoma $\mathbb{C}[X]$ kompleksni vektorski prostor s bazom

$$1, X, X^2, \dots, X^k, \dots \tag{6.1}$$

i komutativnim bilinearnim množenjem zadanim na bazi relacijama

$$X^i X^j = X^{i+j}.$$

Deriviranje polinoma

$$\frac{d}{dX} \colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X], \qquad \frac{d}{dX} \colon f(X) \mapsto \frac{d}{dX} f(X)$$

je linearni operator definiran na bazi (6.1) relacijama

$$\frac{d}{dX} 1 = 0, \quad \frac{d}{dX} X = 1, \quad \dots, \quad \frac{d}{dX} X^k = kX^{k-1}, \quad \dots .$$

Obično pišemo

$$f'(X) = f(X)' = \frac{d}{dX} f(X).$$

Iz bilinearnosti množenja, linearnosti deriviranja i očite relacije

$$\left(X^{i+j}\right)' = (i+j)X^{i+j-1} = iX^{i-1}X^j + jX^iX^{j-1} = \left(X^i\right)' X^j + X^i \left(X^j\right)'$$

slijedi *Leibnizova formula* za derivaciju produkta polinoma

$$(f(X)g(X))' = f'(X)g(X) + f(X)g'(X).$$

Više derivacije obično zapisujemo kao

$$f^{(k)}(X) = f(X)^{(k)} = \left(\frac{d}{dX}\right)^k f(X),$$

pri čemu je

$$f^{(0)}(X) = f(X), \quad f^{(1)}(X) = f'(X), \quad f^{(2)}(X) = f''(X).$$

Indukcijom po k dokazujemo Leibnizovu formulu za više derivacije

$$(f(X)g(X))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(X) g^{(i)}(X).$$

Na primjer,

$$(fg)''(X) = f''(X)g(X) + 2f'(X)g'(X) + f(X)g''(X).$$

6.2. **Taylorova formula.** Za polinom $f(X)$ i kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi *Taylorova formula*

$$f(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k, \tag{6.2}$$

gdje je suma po k konačna, od 0 do $n = \deg f(X)$. Naime, za elemente baze (6.1) po binomnoj formuli imamo

$$\begin{aligned} f(X) = X^n &= (\lambda + (X - \lambda))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (X - \lambda)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k \end{aligned}$$

jer

$$f^{(k)}(\lambda) = n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}\lambda^{n-k},$$

pa zbog linearnosti preslikavanja $f(X) \mapsto f^{(k)}(\lambda)$ vrijedi (6.2).

6.3. **Polinom operatora.** Za operator $A \in L(V)$ imamo evaluaciju

$$\mathbb{C}[X] \to L(V), \quad f(X) \mapsto f(A).$$

Neka je operator A oblika

$$A = \lambda I + N$$

za neki kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$ i neki nilpotentni operator N. Tada iz Taylorove formule i činjenice da je evaluacija homomorfizam algebri slijedi

$$f(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} (A - \lambda I)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} N^k. \tag{6.3}$$

Općenito, za linearan operator A imamo rastav prostora na korijene potprostore

$$V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s, \qquad V_i = \ker(A - \lambda_i I)^{p_i} \quad \text{za } i = 1, \dots, s,$$

te pripadni rastav operatora na inducirane operatore

$$A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s, \qquad A_i = \lambda_i I_i + N_i, \quad N_i \text{ je nilpotentan indeksa } p_i.$$

Budući da za polinom $f(X)$ imamo

$$f(A) = f(A_1) \dot{+} \cdots \dot{+} f(A_s), \tag{6.4}$$

to formulu (6.3) možemo primijeniti na inducirane operatore

$$
\begin{aligned}
f(A_i) &= \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\, N_i^k \\
&= f(\lambda_i) I_i + f'(\lambda_i)\, N_i + \cdots + \frac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!}\, N_i^{p_i-1}.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

6.4. **Funkcija operatora $f(A)$.** Formule (6.4)–(6.5) koristimo za definiciju općenitije funkcije operatora $f(A)$ za funkcije $f(z)$ poput eksponencijalne funkcije e^z ili trigonometrijskih funkcija $\sin z$ i $\cos z$, tj. za definiciju funkcija operatora

$$
e^A, \quad \sin A, \quad \cos A.
$$

Naime, neka je f cijela funkcija[9] i

$$
A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s, \qquad A_i = \lambda_i I_i + N_i, \quad N_i \text{ je nilpotentan indeksa } p_i,
$$

rastav operatora na korijene potprostore. Tada definiramo funkciju operatora

$$
f(A) = f(A_1) \dot{+} \cdots \dot{+} f(A_s), \tag{6.6}
$$

pri čemu je

$$
f(A_i) = f(\lambda_i) I_i + f'(\lambda_i)\, N_i + \cdots + \frac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!}\, N_i^{p_i-1}. \tag{6.7}
$$

6.5. **Funkcija operatora i Jordanova forma.** Operator $f(A)$ je najjednostavnije napisati u bazi u kojoj operator A ima Jordanovu formu, tj. u

[9] Cijela funkcija je funkcija kompleksne varijable

$$
f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)
$$

definirana i derivabilna na čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$. Osnovno svojstvo cijelih funkcija je da su beskonačno puta derivabilne funkcije i da za svaki kompleksni broj z vrijednost funkcije $f(z)$ možemo prikazati kao konvergentni red potencija

$$
f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^k.
$$

Pored polinoma, najvažniji primjer cijele funkcije je eksponencijalna funkcija $\exp(z) = e^z$ za koju je $e^0 = 1$ i $(e^z)' = e^z$, a pripadni red

$$
e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.
$$

nekoj bazi e u kojoj je matrica $A(e)$ blok dijagonalna s blokovima na dijagonali oblika

$$\lambda I_k + J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

pri čemu je I_k jedinična $k \times k$ matrica, J_k elementarna $k \times k$ Jordanova klijetka i λ svojstvena vrijednost od A. Tada je matrica $f(A)(e)$ blok dijagonalna, a blok gornjeg oblika daje $k \times k$ blok

$$\begin{aligned} f(\lambda I_k + J_k) &= f(\lambda) I_k + f'(\lambda)\, J_k + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}\, J_k^{k-1} \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Primjer 6.8. *Neka je A u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^2$ zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada su vektori $g_1 = (1,1)$ i $g_2 = (1,-1)$ svojstveni vektori od A za svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. U bazi $g = (g_1, g_2)$ je matrica $A(g)$ operatora A dijagonalna, a

$$f(A)(g) = \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(-1) \end{pmatrix}.$$

Odavde slijedi, koristeći matricu prijelaza, da je operator $f(A)$ u kanonskoj bazi zadan matricom

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f(1)+f(-1)}{2} & \frac{f(1)-f(-1)}{2} \\ \frac{f(1)-f(-1)}{2} & \frac{f(1)+f(-1)}{2} \end{pmatrix}.$$

6.6. **Funkcionalni račun.** Podsjetimo se da pravila deriviranja

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

povlače da je skup svih cijelih funkcija $H(\mathbb{C})$ komutativna algebra s jedinicom $1(z) = 1$. Očito algebru polinoma $\mathbb{C}[X]$ možemo shvatiti kao podalgebru algebre cijelih funkcija $H(\mathbb{C})$, tj.

$$\mathbb{C}[X] \subset H(\mathbb{C}),$$

a preslikavanje

$$f(z) \mapsto f(A), \quad H(\mathbb{C}) \to L(V)$$

definirano u točki 6.4 kao proširenje evaluacije polinoma

$$f(X) \mapsto f(A), \quad \mathbb{C}[X] \to L(V)$$

na "evaluaciju" cijele funkcije u točki/operatoru A.

Teorem 6.9. *Preslikavanje*

$$f(z) \mapsto f(A), \quad H(\mathbb{C}) \to L(V)$$

je homomorfizam algebri s jedinicom.

Dokaz. Za funkcije f i g i skalar μ trebamo dokazati da je

$$(\mu f + g)(A) = \mu f(A) + g(A), \qquad (fg)(A) = f(A)g(A). \tag{6.10}$$

Po definiciji (6.6) za operator

$$A = A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_s$$

imamo

$$\begin{aligned}
(\mu f + g)(A) &= (\mu f + g)(A_1) \dot{+} \cdots \dot{+} (\mu f + g)(A_s),\\
\mu f(A) + g(A) &= (\mu f(A_1) + g(A_1)) \dot{+} \cdots \dot{+} (\mu f(A_s) + g(A_s)),\\
(fg)(A) &= (fg)(A_1) \dot{+} \cdots \dot{+} (fg)(A_s),\\
f(A)g(A) &= (f(A_1)g(A_1)) \dot{+} \cdots \dot{+} (f(A_s)g(A_s))
\end{aligned}$$

pa je dovoljno dokazati relacije (6.10) za inducirane operatore $A_1, \ldots, A_s$, odnosno za operator A oblika

$$A = \lambda I + N,$$

pri čemu je λ kompleksan broj i N nilpotentan operator indeksa p. No u tom slučaju iz relacije (6.7) slijedi

$$\begin{aligned}
(\mu f + g)(A) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\mu f + g)^{(k)}(\lambda)}{k!}\, N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mu f^{(k)}(\lambda) + g^{(k)}(\lambda)}{k!}\, N^k\\
&= \mu \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}\, N^k + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(k)}(\lambda)}{k!}\, N^k = \mu f(A) + g(A),\\
(fg)(A) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(fg)^{(k)}(\lambda)}{k!}\, N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{r+s=k} \binom{k}{r} f^{(r)}(\lambda) g^{(s)}(\lambda) \right) N^k\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{r+s=k} \frac{f^{(r)}(\lambda) g^{(s)}(\lambda)}{r!s!}\, N^{r+s} = \sum_{r,s\geq 0} \frac{f^{(r)}(\lambda) g^{(s)}(\lambda)}{r!s!}\, N^{r+s}\\
&= \left(\sum_{r\geq 0} \frac{f^{(r)}(\lambda)}{r!}\, N^r \right) \left(\sum_{s\geq 0} \frac{g^{(s)}(\lambda)}{s!}\, N^s \right) = f(A)g(A).
\end{aligned}$$

□

6.7. **Klasa funkcija $\mathcal{F}(A)$.** Neka je A linearan operator na V. Mi smo u točki 6.4 definirali $f(A)$ za cijelu funkciju f, no u definiciji (6.7) koristimo samo neke derivacije funkcije f u točkama spektra operatora A:

$$\begin{gathered} f(\lambda_1), \quad f'(\lambda_1), \quad \dots, \quad f^{(p_1-1)}(\lambda_1), \\ \vdots \\ f(\lambda_s), \quad f'(\lambda_s), \quad \dots, \quad f^{(p_s-1)}(\lambda_s). \end{gathered} \tag{6.11}$$

Zato našu definiciju $f(A)$ iz točke 6.4 možemo proširiti na klasu $\mathcal{F}(A)$ svih funkcija f koje su definirane na nekoj okolini spektra

$$\sigma_A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

operatora A i koje imaju sve derivacije popisane u (6.11).

Valja primijetiti da na skupu funkcija $\mathcal{F}(A)$ općenito nemamo strukturu algebre. Naime, funkcija $f \in \mathcal{F}(A)$ može biti definirana na okolini spektra U, a funkcija $g \in \mathcal{F}(A)$ može biti definirana na nekoj drugoj okolini W, pa općenito nije definirana funkcija $f+g$. Naravno, mi uvijek možemo gledati manju okolinu spektra $U \cap W$ na kojoj je definirana suma restrikcija funkcija $f|_{U\cap W} + g|_{U\cap W}$ za koju vrijedi

$$\left(f|_{U\cap W} + g|_{U\cap W}\right)'(\lambda) = f'(\lambda) + g'(\lambda)$$

za $\lambda \in \sigma(A)$. Zato i za funkcije iz $\mathcal{F}(A)$ imamo odgovarajuće formule

$$\left(f|_{U\cap W} + g|_{U\cap W}\right)(A) = f(A)+g(A), \qquad \left(f|_{U\cap W} \cdot g|_{U\cap W}\right)(A) = f(A)g(A).$$

6.8. **Baza algebre polinoma od A.** Neka je m stupanj minimalnog polinoma operatora $A \in L(V)$. Tada je algebra polinoma

$$\mathcal{P}(A) = \{P(A) \mid P(X) \in \mathbb{C}[X]\}.$$

operatora A komutativna podalgebra algebre $L(V)$. Za polinom $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ imamo

$$P(X) = Q(X)\mu_A(X) + R(X), \quad \deg R(X) < m,$$

pa je $P(A) = R(A)$. Znači da skup operatora

$$I, A, \dots, A^{m-1} \tag{6.12}$$

razapinje $\mathcal{P}(A)$. No po konstrukciji minimalnog polinoma taj je skup operatora linearno nezavisan, pa dakle i baza od $\mathcal{P}(A)$. Znači da je

$$\dim \mathcal{P}(A) = m.$$

Za svaki polinom $P(A)$ imamo relacije (6.4) i (6.5), tj. prikaz

$$P(A) = P(A_1) \dot{+} \cdots \dot{+} P(A_s),$$

gdje je

$$P(A_i) = P(\lambda_i)I_i + P'(\lambda_i)\, N_i + \cdots + \frac{P^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!}\, N_i^{p_i-1}.$$

Za $i = 1, \ldots, s$ i $k = 0, \ldots, p_i - 1$ definiramo linearne operatore

$$C_{ik} = 0 \dot{+} \cdots \dot{+} 0 \dot{+} N_i^k \dot{+} 0 \dot{+} \cdots \dot{+} 0.$$

Tih je operatora ukupno

$$p_1 + \cdots + p_s = m$$

pa je dimenzija linearne ljuske

$$\mathcal{C} = [C_{ik} \mid i = 1, \ldots, s,\ k = 0, \ldots, p_i - 1] \tag{6.13}$$

najviše m. S druge strane $\mathcal{C}$ sadrži m-dimenzionalni prostor $\mathcal{P}(A)$ jer svaki polinom od A možemo zapisati kao linearnu kombinaciju operatora C_{ik},

$$P(A) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{P^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\, C_{ik}. \tag{6.14}$$

Znači da je $\dim \mathcal{C} = m = \dim \mathcal{P}(A)$. No to zajedno s $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{P}(A)$ povlači da je $\mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$ i da je skup operatora C_{ik} linearno nezavisan. Time smo dokazali

Teorem 6.15. *Skup operatora*

$$C_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, s, \quad k = 0, \ldots, p_i - 1 \tag{6.16}$$

je baza od $\mathcal{P}(A)$.

Ovaj teorem ima nekoliko važnih posljedica:

• *Za $f(A)$ postoji jedinstveni polinom $P(X)$ stupnja manjeg od minimalnog polinoma takav da je*

$$f(A) = P(A).$$

Naime, $f(A)$ je linearna kombinacija

$$f(A) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\, C_{ik} \in \mathcal{P}(A). \tag{6.17}$$

• *Za zadane skalare*

$$\beta_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, s, \quad k = 0, \ldots, p_i - 1$$

postoji jedinstveni[10] *polinom $P(X)$ stupnja manjeg od m takav da je*

$$P^{(k)}(\lambda_i) = \beta_{ik} \quad \text{za sve} \quad k = 0, \ldots, p_i - 1,$$

Naime, postoji jedinstveni polinom $P(A)$ stupnja manjeg od m jednak linearnoj kombinaciji

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{P^{(k)}(\lambda_i)}{k!}\, C_{ik} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{\beta_{ik}}{k!}\, C_{ik} \in \mathcal{P}(A).$$

[10]Taj se polinom zove **interpolacijski polinom Lagrange-Sylvestera**.

- *Relacije (6.14) za* $P(A) = I, A, \ldots, A^{m-1}$*, tj.*

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{p_i-1} \binom{r}{k} \lambda_i^{r-k}\, C_{ik} = A^r, \quad r = 0, \ldots, m-1, \tag{6.18}$$

možemo shvatiti kao sustav od m *jednadžbi s* m *nepoznanica* C_{ik} *koji ima jedinstveno rješenje. To nam omogućava efikasan način računanja funkcije operatora* $f(A)$*: riješimo sustav jednadžbi (6.18) i koristeći (6.17) izračunamo* $f(A)$*.*

Primjer 6.19. *Vratimo se primjeru 6.8 Neka je* A *u kanonskoj bazi od* $\mathbb{C}^2$ *zadan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Minimalni polinom od A *je* $\mu_A(X) = (X-1)(X+1)$ *i svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 1$ *i* $\lambda_2 = -1$ *imaju kratnosti u minimalnom polinomu* $p_1 = p_2 = 1$*. Bazu* C_{10}, C_{20} *od* $\mathcal{P}(A)$ *tražimo rješavajući sistem jednadžbi (6.18)*

$$\begin{aligned} C_{10} + C_{20} &= I, \\ C_{10} - C_{20} &= A. \end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$C_{10} = \frac{1}{2}(I + A), \quad C_{20} = \frac{1}{2}(I - A)$$

pa imamo

$$f(A) = f(1)C_{10} + f(-1)C_{20} = \frac{f(1)}{2}(I + A) + \frac{f(-1)}{2}(I - A).$$

6.9. **Elementarni divizori od $f(A)$.** Da bismo odredili Jordanovu formu operatora $f(A)$ trebamo sljedeću lemu:

Lema 6.20. *Neka je* J_p *elementarna* $p \times p$ *Jordanova klijetka i neka je* $1 \le m \le p$*. Prema teoremu o djeljenju s ostatkom možemo pisati*

$$p = qm + r,$$

gdje je $q \in \mathbb{N}_0$ *i* $0 \le r \le m-1$*. Tada Jordanova forma od* J_p^m *ima* $m - r$ *Jordanovih klijetki* J_q *i* r *Jordanovih klijetki* J_{q+1}*.*

Dokaz. Za $m = 1$ imamo $q = p$ i $r = 0$ i tvrdnja je očita za $J_p^m = J_p$, a za $m = p$ imamo $q = 1$ i $r = 0$ i tvrdnja je očita za $J_p^m = 0$. Neka je $1 < m < p$ i

$$e_1, e_2, \ldots, e_p$$

ciklička baza za J_p, tj. baza sa svojstvom (vidjeti (3.5))

$$J_p \colon e_i \mapsto e_{i-1}.$$

Tada je

$$J_p^m \colon e_i \mapsto e_{i-m}, \quad \text{s tim da smatramo } e_{i-m} = 0 \text{ ako je } i - m < 0,$$

pa imamo r cikličkih baza za J_p^m oblika

$$\begin{aligned}
&e_1, e_{1+m}, e_{1+2m}, \dots, e_{1+(q-1)m}, e_{1+qm},\\
&e_2, e_{2+m}, e_{2+2m}, \dots, e_{2+(q-1)m}, e_{2+qm},\\
&\quad\vdots\\
&e_r, e_{r+m}, e_{r+2m}, \dots, e_{r+(q-1)m}, e_{r+qm}
\end{aligned}$$

i $m-r$ cikličkih baza za J_p^m oblika

$$\begin{aligned}
&e_{r+1}, e_{r+1+m}, e_{r+1+2m}, \dots, e_{r+1+(q-1)m},\\
&e_{r+2}, e_{r+2+m}, e_{r+2+2m}, \dots, e_{r+2+(q-1)m},\\
&\quad\vdots\\
&e_m, e_{m+m}, e_{m+2m}, \dots, e_{m+(q-1)m}.
\end{aligned}$$

Svaka od tih cikličkih baza daje po jednu elementarnu Jordanovu klijetku u Jordanovoj formi za J_p^m. □

Teorem 6.21. *Neka je λ svojstvena vrijednost opeartora A i funkcija $f \in \mathcal{F}(A)$. Neka je*

$$(X-\lambda)^p$$

elementarni divizor operatora A. Neka je $1 \le m \le p-1$ takav da je

$$f^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \text{za} \quad 1 \le k \le m-1 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(\lambda) \ne 0.$$

Napišimo kao u Lemi 6.20 $p = qm+r$. Tada elementarnom divizoru $(X-\lambda)^p$ od A odgovara m elementarnih divizora od $f(A)$ oblika

$$\underbrace{(X-f(\lambda))^q, \dots, (X-f(\lambda))^q}_{m-r \text{ puta}}, \qquad \underbrace{(X-f(\lambda))^{q+1}, \dots, (X-f(\lambda))^{q+1}}_{r \text{ puta}}.$$

Dokaz. Elementarnom divizoru $(X-\lambda)^p$ opeartora A u Jordanovoj formi od A odgovara dijagonalni $p \times p$ blok oblika

$$\lambda I + J,$$

gdje je I jedinična matrica i J elementarna Jordanova klijetka. Po pretpostavci je odgovarajući dijagonalni blok u matrici od $f(A)$ oblika

$$f(\lambda)I + \sum_{k \ge m} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J^k = f(\lambda)I + J^m \sum_{k \ge m} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J^{k-m}.$$

Matrica

$$T = \sum_{k \ge m} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J^{k-m} = \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!} I + \sum_{k \ge m+1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J^{k-m}$$

je polinom od J i komutira s J^m, a iz pretpostavke $f^{(m)}(\lambda) \ne 0$ slijedi da je T regularna. Zato za svaki k imamo jednakost rangova

$$r((J^m T)^k) = r((J^m)^k T^k) = r((J^m)^k).$$

Zbog toga nilpotentni operatori $J^m T$ i J^m imaju istu Jordanovu formu, pa tvrdnja teorema slijedi primjenom leme 6.20. □

6.10. **Pojam konvergencije na n-dimenzionalnom prostoru.** Podsjetimo se da je niz (α_k) realnih ili kompleksnih brojeva konvergentan ako postoji broj α takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji k_0 takav da je

$$|\alpha_k - \alpha| < \varepsilon \quad \text{za svaki} \quad k \geq k_0.$$

Ako takav α postoji, onda je jedinstven i zove se limes niza (α_k), pišemo $\alpha = \lim \alpha_k$ ili $\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k$ i kažemo da niz (α_k) teži k α. Za konvergentne nizove (α_k) i (β_k) i skalare λ i μ niz $(\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim(\lambda\alpha_k + \mu\beta_k) = \lambda \lim \alpha_k + \mu \lim \beta_k.$$

Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ uređena baza u realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru V. *Za niz vektora (v_k) u V kažemo da je konvergentan ako postoji vektor v takav da za svaki $i = 1, \ldots, n$ niz i-tih koordinata vektora v_k konvergira k i-toj koordinati od v.* Drugim riječima, za svaki $i = 1, \ldots, n$ imamo

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = \alpha_i,$$

gdje je

$$v_k = \alpha_1^{(k)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(k)} e_n, \qquad v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Ako takav vektor v postoji, onda je jedinstven i zove se limes niza (v_k), pišemo $v = \lim v_k$ ili $v = \lim_{k\to\infty} v_k$ i kažemo da niz (v_k) teži k v.

Ova definicija konvergencije u V ne ovisi o izboru baze e.

Naime, ako je $f = (f_1, \ldots, f_n)$ neka druga uređena baza i

$$v_k = \beta_1^{(k)} f_1 + \cdots + \beta_n^{(k)} f_n, \qquad v = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_n f_n,$$

onda su "nove" koordinate izražene pomoću "starih" koordinata linearnim relacijama

$$\beta_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \alpha_j^{(k)}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \alpha_j.$$

Zbog toga su nizovi novih koordinata konvergentni ako su nizovi starih koordinata konvergentni i vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \beta_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \alpha_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \lim_{k\to\infty} \alpha_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \alpha_j = \beta_i.$$

6.11. **Redovi potencija operatora.** *Neka je A linearan operator i*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,\quad |z|<R.$$

red potencija[11] *takav da je $R>|\lambda|$ za svaku svojstvenu vrijednost λ operatora A. Tada red $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k A^k$ konvergira*[12] *u $L(V)$ i*

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k A^k. \tag{6.22}$$

Dokaz. Konvergencija u konačno dimenzionalnom prostoru $L(V)$ je definirana preko konvergencije koordinata operatora u nekoj bazi. Nama je najzgodnije uzeti bazu u V u kojoj A ima Jordanovu formu, a matrice operatora u toj bazi su koordinate operatora iz $L(V)$. Matrica operatora A je blokdijagonalna matrica s kvadratnim $p\times p$ matricama na dijagonali oblika

$$\lambda I+J,$$

gdje je $\lambda\in\sigma_A$, I jedinična matrica i J elementarna Jordanova klijetka. Tada matrica od A^k ima na dijagonali odgovarajuću kvadratnu $p\times p$ matricu

$$(\lambda I+J)^k=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}J^j,$$

gdje $\binom{k}{j}=0$ za $j>k$, i za dokaz konvergencije je dovoljno dokazati konvergenciju reda matrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(\lambda I+J)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\sum_{j=0}^{p-1}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}J^j. \tag{6.23}$$

---

[11] Konvergentni red potencija je funkcija kompleksne varijable $z\mapsto f(z)$ koja je na nekom krugu oko nule radijusa $R>0$ zadana kao konvergentni red

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,\quad |z|<R.$$

Red potencija je derivabilna funkcija. Štoviše, red

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k z^{k-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\beta_{m+1}z^m,$$

dobiven deriviranjem reda $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k$ "član po član", konvergira za svaki $|z|<R$ i vrijedi

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k\beta_k z^{k-1},\quad |z|<R.$$

Poseban slučaj reda potencija je cijela funkcija kada je R po volji velik, pišemo $R=\infty$.

[12] Red $\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k A^k$ konvergira ako konvergira niz parcijalnih suma reda, tj. ako postoji limes

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\beta_k A^k.$$

Po pretpostavci je $f(z)$ red potencija i zbog $|\lambda| < R$ za $j = 0, \dots, p-1$ imamo konvergentne redove kompleksnih brojeva

$$\frac{1}{j!}\, f^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j}$$

i konvergentne redove $p \times p$ matrica

$$\frac{1}{j!}\, f^{(j)}(\lambda) J^j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \right) J^j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} J^j.$$

Zbrajanjem p konvergentnih redova matrica dobivamo konvergentan red matrica

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\, f^{(j)}(\lambda) J^j = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} J^j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum_{j=0}^{p-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} J^j.$$

Time je dokazano da je red (6.23) konvergentan. Štoviše, za svaki $p \times p$ blok na dijagonali matrice operatora $f(A)$ vrijedi

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!}\, f^{(j)}(\lambda) J^j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\lambda I + J)^k,$$

pa vrijedi i (6.22). □

6.12. **Deriviranje vektor-značne funkcije.** Neka je $Y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ funkcija jedne realne varijable t, obično mislimo da je to vrijeme, s vrijednostima

$$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

u vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$. Kažemo da je funkcija Y derivabilna ako su za sve $i = 1, \dots, n$ funkcije $y_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derivabilne. Kažemo da je funkcija

$$Y' \colon t \mapsto Y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t))$$

derivacija funkcije Y.

Općenitije, ako je $Y \colon \mathbb{R} \to V$ funkcija jedne realne varijable t s vrijednostima u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, onda kažemo da je funkcija Y derivabilna ako su u nekoj bazi od V sve koordinate $y_i(t)$ vektora $Y(t)$ derivabilne po t. Kažemo da je funkcija Y' derivacija funkcije Y ako su koordinate vektora $Y'(t)$ jednake $y_i'(t)$.

Dokažite *da definicija derivabilnosti funkcije Y i definicija njene derivacije Y' ne ovise o izboru baze od V.*

6.13. **Deriviranje eksponencijalne funkcije.** Neka je $\dim V = n$ i $A \in L(V)$. Za fiksni parametar $t \in \mathbb{R}$ stavimo

$$f(z) = e^{tz}, \qquad e^{tA} = f(A).$$

Dokažite:

(1) $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$ za sve $t, s \in \mathbb{R}$, $\qquad e^0 = I$.

(2) Neka je $A = S + N$ Jordanova dekompozicija, Tada je

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} = e^{tS}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}N^k.$$

(3) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$

7. Geometrija unitarnih prostora

U ovom predavanju je opet $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$. Za $z \in K$, $\overline{z}$ označava kompleksno–konjugiran broj. Naš osnovni cilj je proučavati svojstva skalarnog produkta na vektorskom prostoru, ali počinjemo s dvije točke koje stavljaju skalarni produkt u kontekst seskvilinearnih formi.

7.1. **Bilinearne forme.** Neka su V i W vektorski prostori nad K. Bilinearna forma je preslikavanje $B : V \times W \to K$ linearno u svakom argumentu:

$$B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w)$$
$$B(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 B(v, w_1) + \beta_2 B(v, w_2),$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$.

Posebno[13], ako je $V = W$, onda se govori o bilinearnoj formi na V. Bilinearna forma na V je *simetrična* ako vrijedi

$$B(x, y) = B(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

Bilinearna forma na V naziva se *anti–simetrična* ako vrijedi

$$B(x, y) = -B(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

Osnovni primjer bilinearne forme upoznali smo još u predavanju 1. Neka je V vektorski prostor i neka je V' dualan prostor. Tada je kanonsko preslikavanje $V \times V' \to K$ dano sa $(x, f) \mapsto f(x)$ primjer bilinearne forme. Označimo s $\langle\ ,\ \rangle_V$ tu kanonsku bilinearnu formu:

$$\langle\ ,\ \rangle_V : V \times V' \to K, \quad \langle x, f\rangle_V = f(x).$$

Neka je $B : V \times W \to K$ bilo koja bilinearna forma, onda za svaki $w \in W$, preslikavanje $f_w : V \to K$ zadano sa $f_w : v \mapsto B(v, w)$ je linearan funkcional na V tj. element iz V'. Zbog linearnosti preslikavanja B u drugom argumentu imamo

$$\begin{aligned} f_{\lambda w + \mu u}(v) &= B(v, \lambda w + \mu u) \\ &= \lambda B(v, w) + \mu B(v, u) = \lambda f_w(v) + \mu f_u(v), \forall v \in V. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_{\lambda w + \mu u} = \lambda f_w + \mu f_u$$

tj. preslikavanje $A_B : W \to V'$ dano s $w \mapsto f_w$ je linearno, tj. $A_B \in L(W, V')$. Neka je $A'_B \in L(V, W')$ njegov *adjungirani operator*. Tada

[13] Ovaj dio se može preskočiti kod prvog čitanja.

možemo pisati (vidi predavanje 1.3, (1.3))

$$B(v,w) = f_w(v) = \langle v, f_w\rangle_V = \langle v, A_B w\rangle_V = \langle w, A'_B v\rangle_W.$$

Uočimo da je operator A_B jedinstveno određen. Obratno, ako je $C \in L(V, W')$ linearan operator, onda je sa

$$(v,w) \mapsto \langle w, Cv\rangle_W = \langle v, C'w\rangle_V$$

definirana bilinearna forma B za koju je $A_B = C'$.

7.2. **Seskvilinearne forme.** U prošloj točki 7.1 nismo se koristili činjenicom da na K imamo kompleksno konjugiranje, to činimo ovdje. Neka su V i W vektorski prostori nad K. Seskvilinearna

forma je preslikavanje $B : V \times W \to K$ linearno u prvom argumentu i anti–linearno u drugom argumentu:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) &= \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w) \\ B(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) &= \overline{\beta_1} B(v, w_1) + \overline{\beta_2} B(v, w_2), \end{aligned}$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$.

Posebno, ako je $V = W$, onda se seskvilinearna forma naziva seskvilinearna forma na V. Seskvilinearna forma na V naziva se **hermitska** ako vrijedi

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}, \quad \forall x, y \in V.$$

Seskvilinearna forma na V naziva se **anti–hermitska** ako vrijedi

$$B(x,y) = -\overline{B(y,x)}, \quad \forall x, y \in V.$$

Ukoliko je $K = \mathbb{R}$ nismo dobili ništa novo u odnosu na definicije u prethodnoj točki 7.1.

Seskvilinearne forme bit će opisane u točki 8.5 na način koji je sasvim analogan opisu bilinearnih formi iz točke 7.1. U slučaju da je $K = \mathbb{R}$, dobivamo opis bilinearnih formi koji je drugačiji od onog iz točke 7.1

7.3. **Pozitivne i strogo pozitivne hermitske forme.** [14] Hermitska forma na V je pozitivna (ili definitna) ako je

$$B(x,x) \geq 0, \quad \forall x \in V.$$

[14] Ponekad se u domaćoj literaturi govori pozitivno definitna za strogo pozitivnu i pozitivno semi–definitna za pozitivnu.

Hermitska forma na V je strogo pozitivna (ili strogo definitna) ako je

$$\begin{cases} B(x,x) \geq 0, & \forall x \in V, \\ B(x,x) = 0 \implies x = 0. \end{cases}$$

Ukoliko je $K = \mathbb{R}$, hermitska forma je simetrična forma te u gornjem slučaju govorimo o pozitivnoj i strogo pozitivnoj simetričnoj formi na V.

7.4. **Skalarni produkt; Unitaran prostor.** Skalarni produkt na V je strogo pozitivna hermitska forma na V. Označimo sa $(\ |\ )$ skalarni produkt na V. Ekvivalentno je reći da za preslikavanje $(\ |\ ) : V \times V \to K$ vrijede ova svojstva:

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y), \quad \forall x_1, x_2, y \in V \\ &(\alpha x|y) = \alpha(x|y), \quad \forall x, y \in V,\ \alpha \in K \\ &(x|y) = \overline{(y|x)}, \quad \forall x, y \in V \\ &(x|x) \geq 0, \quad \forall x \in V \\ &(x|x) = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Vektorski prostor V zajedno sa skalarnim produktom $(\ |\ )$ naziva se unitaran prostor.

Ukoliko je $K = \mathbb{R}$, svaka simetrična strogo pozitivna forma $(\ |\ )$ definira skalarni produkt.

Primjer 7.1. *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ realni brojevi. Onda je K^n unitaran prostor uz skalarni produkt*

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \overline{y_i}.$$

Ako je $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, onda skalarni produkt nazivamo kanonski skalarni produkt na K^n.

Ako zahtijevamo samo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ onda je $(\ |\ )$ hermitska forma na K^n koja je samo pozitivna (ali ne i strogo pozitivna ukoliko je $\lambda_i = 0$ za neko i).

Ako je $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ali postoje $i \neq j$ tako da $\lambda_i < 0$ i $\lambda_j > 0$ onda se radi samo o hermitskoj formi koja nije pozitivna.

Ako nisu svi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ realni (i $K = \mathbb{C}$), onda se radi samo o seskvi–linearnoj formi.

Norma (ili duljina) vektora u unitarnom prostoru V dana je sa

$$||x|| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x|x)}, \quad x \in V.$$

Vektor x je normiran ako vrijedi

$$||x|| = 1.$$

Osnovna svojstva norme dana su sa

$$
\begin{aligned}
&||x|| \geq 0, \quad \forall x \in V \\
&||x|| = 0 \iff x = 0 \\
&||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \quad \forall x \in V,\ \lambda \in K \\
&\text{(nejednakost trokuta:)} \ \ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in V.
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

Uzeta sama za sebe ona definiraju *normiran vektorski prostor*. Ipak u našem slučaju vrijedi više jer norma dolazi od skalarnog produkta. Naime, vrijedi:

Lema 7.3. *Za sve $x, y \in V$ vrijedi:*

(i) ***Relacija paralelograma:*** $2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2.$

(ii) *Neka je $K = \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$(x|y) = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4}.$$

(iii) *Neka je $K = \mathbb{C}$. Tada vrijedi:*

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) + \frac{i}{4}\left(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right).$$

Dokaz. Imamo redom (ukoliko je $K = \mathbb{R}$ relevantne su samo prve dvije relacije, dok zadnje dvije nemaju smisla):

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 &= (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\
||x-y||^2 &= (x-y|x-y) = (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) \\
||x+iy||^2 &= (x+iy|x+iy) = (x|x) - i(x|y) + i(y|x) + (y|y) \\
||x-iy||^2 &= (x+iy|x+iy) = (x|x) + i(x|y) - i(y|x) + (y|y).
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem prvih dviju relacija nalazimo

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left((x|x) + (y|y)\right) = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Ovo dokazuje (i).

Ukoliko je $K = \mathbb{R}$, iz definicije skalarnog produkta

$$(y|x) = \overline{(x|y)} = (x|y) \in \mathbb{R}.$$

Zato, oduzimanjem prvih dviju relacija imamo

$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4 \cdot (x|y).$$

Ovo dokazuje (ii).

Neka je $K = \mathbb{C}$. Za dokaz tvrdnje (iii), iz prve dvije relacije nalazimo

$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 2 \cdot ((x|y) + (y|x)),$$

a iz druge dvije relacije množenjem s i, a onda oduzimanjem nalazimo

$$i \cdot \left(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right) = 2 \cdot ((x|y) - (y|x)).$$

Zbrajanjem posljednjih relacija dobivamo (iii). □

Vratimo se sada na napisana svojstva norme (vidi (7.2)). Odmah vidimo da prva tri napisana svojstva vrijede. Profinjenje posljednjeg svojstva je sadržaj slijedeće propozicije.

Propozicija 7.4. (i) *Za sve $x, y \in V$ vrijedi* ***Cauchy–Schwarz–Bunjakowsky*** *nejednakost*

$$|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni.

(ii) *Za sve $x, y \in V$ vrijedi* ***nejednakost trokuta***

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

Dokaz. Dokazujemo (i). Ako je $y = 0$ onda je tvrdnja (i) očito točna. Neka je $y \neq 0$. Za $t \in K$ izračunajmo duljinu vektora

$$v = ty + x.$$

Prema svojstvima skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned}
(v|v) &= (ty + x|ty + x) \\
&= (ty|ty) + (ty|x) + (x|ty) + (x|x) \\
&= t\bar{t}(y|y) + t(y|x) + \bar{t}(x|y) + (x|x) \\
&= |t|^2(y|y) + t(y|x) + \bar{t}(x|y) + (x|x) \\
&= |t|^2(y|y) + t\overline{(x|y)} + \bar{t}(x|y) + (x|x).
\end{aligned}$$

Stavimo sada u ovaj izraz

$$t = -\frac{(x|y)}{(y|y)}.$$

Nalazimo

$$0 \leq (v|v) = \frac{(x|x)(y|y) - |(x|y)|^2}{|(y|y)|}.$$

Ovo je tražena nejednakost u (i). Jednakost se dostiže ako i samo ako je $v = 0$ tj. ako su x i y linearno zavisni.

Za dokaz tvrdnje (ii), koristimo (i) te osnovna svojstva kompleksnih brojeva[15]

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + \Big((x|y) + \overline{(x|y)}\Big) + (y|y) \\ &= ||x||^2 + 2Re\,(x|y) + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2|(x|y)| + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\cdot||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2\,. \end{aligned}$$

□

Vektori x i y iz V su *okomiti* i pišemo $x \perp y$ ako vrijedi

$$(x|y) = 0.$$

Neka je W potprostor u V. Kažemo da je $x \in V$ okomit na W i pišemo $x \perp W$ ako vrijedi $x \perp y$ za svaki $y \in W$. Neka su W_1 i W_2 potprostori u V. Kažemo da je W_1 okomit na W_2 i pišemo $W_1 \perp W_2$ ako vrijedi $(x|y) = 0$ za sve $x \in W_1$ i $y \in W_2$.

Propozicija 7.5. (i) ***Pitagorin poučak:*** *ako $x \perp y$, onda $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.*
(ii) *Ako je $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_m$, onda je $x \perp \langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$*
(iii) *Ako je $x \perp V$, onda $x = 0$.*

Dokaz. (i) slijedi iz prva dva reda u dokazu tvrdnje (ii) iz propozicije 7.4:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y|x+y) \\ &= (x|x) + \Big((x|y) + \overline{(x|y)}\Big) + (y|y) \\ &= ||x||^2 + ||y||^2. \end{aligned}$$

Dokažimo (ii). Po definiciji linearne ljuske imamo $v \in \langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$ ako i samo ako postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ takvi da

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i.$$

Sada

$$(x|v) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i}(x|y_i) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} \cdot 0 = 0.$$

Ovim je (ii) dokazano. Dokažimo (iii). Kako je $x \perp V$, to vrijedi i $x \perp x$ tj. $(x|x) = 0$. Dakle, $x = 0$. □

[15]Neka je $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tada je $x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ i $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}$. Dakle, vrijedi $|z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2 \implies |x| \leq |z|$. Odatle $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$, tj. $Re(z) \leq |z|$.

Ortonormiran niz vektora $e_1, e_2, \ldots, e_k$ je niz normiranih i međusobno okomitih vektora. Dakle, niz je ortonormiran ako vrijedi

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij},$$

za sve i i j.

Propozicija 7.6. *Neka je $e_1, e_2, \ldots, e_k$ niz ortonormiranih vektora u V. Tada vrijedi:*

(i) *Vektori $e_1, e_2, \ldots, e_k$ su linearno nezavisni. Posebno, $k \leq \dim V$.*

(ii) *Neka je $x \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$. Tada vrijedi* ***Fourierov razvoj***[16]

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x|e_i) e_i.$$

(iii) *Neka je $y \in V$. Tada je*

$$y - \sum_{i=1}^{k} (y|e_i) e_i \perp \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle,$$

a vektor $\sum_{i=1}^{k} (y|e_i) e_i$ naziva se ***ortogonalna projekcija*** *vektora y na potprostor $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$.*

Dokaz. Neka je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = 0,$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$. Tada

$$0 = (0|e_j) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i | e_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i|e_j) = \alpha_j$$

za sve j. Ovim je (i) dokazano.

Neka je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$. Tada

$$(x|e_j) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i | e_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i|e_j) = \alpha_j$$

za sve j. Ovim je (ii) dokazano.

Prema propoziciji 7.5 (ii) vektor je okomit na $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ ako i samo ako je okomit na sve vektore $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Imamo

$$\left(y - \sum_{i=1}^{k} (y|e_i) e_i \Big| e_j \right) = (y|e_j) - \sum_{i=1}^{k} (y|e_i)(e_i|e_j) = (y|e_j) - (y|e_j) = 0,$$

[16] $(x|e_i)$ naziva se i–ti Fourierov koeficijent od x.

za sve j. Ovim je (iii) dokazano. □

7.5. **Gramova matrica i determinanta.** Neka je niz vektora $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$. Gramova matrica je kvadratna $k \times k$ matrica definirana sa

$$G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_k) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_k) \end{pmatrix}.$$

Gramova determinanta je determinanta Gramove matrice

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k) = \det G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_k) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_k) \end{vmatrix}.$$

Teorem 7.7. *Niz vektora $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ je linearno nezavisan ako i samo ako je Gramova determinanta $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq 0$.*

Dokaz. Neka je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0, \tag{7.8}$$

za neke $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$. Tada

$$0 = (0|x_j) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i | x_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i|x_j), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Ovim smo dokazali

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i|x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{7.9}$$

Pokažimo također da (7.9) povlači (7.8) tako da su te dvije tvrdnje ekvivalentne. Zaista, množenjem s $\overline{\alpha_j}$ relacije $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i|x_j) = 0$ nalazimo

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_j} \alpha_i (x_i|x_j) = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i | \alpha_j x_j), \quad 1 \leq j \leq k,$$

a odatle sumiranjem po j

$$|| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i ||^2 = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i | \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j) = 0.$$

Odatle, slijedi (7.8).

Uočimo da je (7.9) homogen sustav po $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. U matričnom obliku može se napisati

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k)^t \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Znamo da homogen sustav ima netrivijalno rješenje tj. ono za koje je barem jedan $\alpha_i \neq 0$ ako i samo ako je

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \det G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \det G(x_1, x_2, \ldots, x_k)^t = 0.$$

Sada teorem slijedi iz ekvivalencije relacija (7.8) i (7.9) te iz gornje napomene o homogenim sustavima. □

7.6. **Gram–Schmidtov postupak ortogonalizacije.** Ovu točku započinjemo sljedećom lemom koju koristimo u dokazu glavnog rezultata (vidi teorem 7.17).

Lema 7.10. *Neka je $x_1, \ldots, x_m$ niz linearno nezavisnih vektora u V. Pretpostavimo da niz ortonormiranih vektora $e_1, \ldots, e_m$ zadovoljava*

(i) $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ *za svaki* $k = 1, \ldots, m$.
(ii) $(e_k|x_k) > 0$ *za sve* $k = 1, 2, \ldots, m$.

Tada za svaki $2 \leq k \leq m$ *i* $e \in V$ *takav da*

$$||e|| = 1, \quad e \neq e_k \quad i \quad e \perp \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1} \rangle,$$

vrijedi

$$||e - x_k|| > ||e_k - x_k||.$$

Nadalje, postoji najviše jedan niz ortonormiranih vektora $e_1, \ldots, e_m$ tako da vrijedi (i) i (ii).

Dokaz. Prema propoziciji 7.6 (iii) za vektor e iz iskaza leme imamo

$$y \stackrel{def}{=} e - \sum_{i=1}^{k} (e|e_i) e_i \perp \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle.$$

Kako je po pretpostavci $e \perp \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1} \rangle$, to nalazimo

$$e = y + (e|e_k) e_k. \tag{7.11}$$

Isto tako gornja relacija pokazuje

$$\begin{aligned} 1 = (e|e) &= (y + (e|e_k)e_k | y + (e|e_k)e_k) \\ &= (y|y) + |(e|e_k)|^2 \\ &= ||y||^2 + |(e|e_k)|^2. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Odatle

$$|(e|e_k)| \leq 1. \tag{7.13}$$

Nadalje
(7.14)

$$\begin{aligned}
&||e - x_k||^2 \\
&= (e - x_k|e - x_k) \\
&= (e|e) - (x_k|e) - (e|x_k) + (x_k|x_k) \\
&= 1 - (x_k|y + (e|e_k)e_k) - (y + (e|e_k)e_k|x_k) + (x_k|x_k) \\
&(\text{(i) povlači } x_k \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle \text{ te zato nalazimo } (x_k|y) = 0) \\
&= 1 - \overline{(e|e_k)}(x_k|e_k) - (e|e_k)(e_k|x_k) + (x_k|x_k) \\
&(\text{(ii) povlači } (e_k|x_k) > 0 \text{ te zato } (e_k|x_k) = \overline{(e_k|x_k)} = (x_k|e_k) \in \mathbb{R}\ ) \\
&= 1 - \overline{(e|e_k)}(x_k|e_k) - (e|e_k)(x_k|e_k) + (x_k|x_k) \\
&(\text{vrijedi } 2Re(e|e_k) = (e|e_k) + \overline{(e|e_k)}) \\
&= 1 - 2(x_k|e_k)Re(e|e_k) + (x_k|x_k) \\
&(\text{(ii) povlači } (e_k|x_k) > 0\text{; imamo } Re(e|e_k) \le |(e|e_k)| \le 1 \text{ prema (7.13)}) \\
&\ge 1 - 2(x_k|e_k) + (x_k|x_k) \\
&= (e_k|e_k) - 2(x_k|e_k) + (x_k|x_k) \\
&= (e_k|e_k) - (x_k|e_k) - (e_k|x_k) + (x_k|x_k) = ||e_k - x_k||^2.
\end{aligned}$$

Kao što smo gore istaknuli, jedina nejednakost $\geq$ u (7.14) je posljedica nejednakosti $(e_k|x_k) > 0$ (koja dolazi iz pretpostavke (ii)) i

(7.15) $$Re(e|e_k) \le |(e|e_k)| \le 1 \quad \text{prema (7.13)}.$$

Ako dokažemo da je jedina nejednakost u (7.14) stroga, onda (7.14) daje

$$||e - x_k|| > ||e_k - x_k||.$$

Ovim je dokazana prva tvrdnja u lemi.

Dokažimo sada da je nejednakost u (7.14) stroga. Jednakost u jedinoj nejednakosti u (7.14) vrijedi ako i samo ako je

$$Re(e|e_k) = 1.$$

Zbog (7.15) to je ekvivalentno s

(7.16) $$Re(e|e_k) = |(e|e_k)| = 1.$$

Dakle

$$(Re(e|e_k))^2 = |(e|e_k)|^2 = (Re(e|e_k))^2 + (Im(e|e_k))^2 \implies Im(e|e_k) = 0.$$

Zato iz (7.16) nalazimo

$$Re(e|e_k) = (e|e_k) = 1.$$

Sada se vratimo na relaciju (7.12). Nalazimo da vrijedi

$$||y||^2 = 0 \implies y = 0.$$

Konačno, (7.11) daje

$$e = y + (e|e_k)e_k = (e|e_k)e_k = e_k.$$

To je u kontradikciji s $e \neq e_k$.

Dokažimo jedinstvenost. Neka je $e'_1, \ldots, e'_m$ neki drugi niz ortonormiranih vektora tako da vrijedi:

(a) $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle = \langle e'_1, e'_2, \ldots, e'_k \rangle$ za svaki $k = 1, \ldots, m$.
(b) $(e'_k|x_k) > 0$ za sve $k = 1, 2, \ldots, m$.

Dokazati ćemo da je $e_i = e'_i$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Zaista, za $i = 1$, iz (i) i (a) imamo

$$\langle x_1 \rangle = \langle e_1 \rangle = \langle e'_1 \rangle.$$

Dakle

$$e_1 = \alpha_1 x_1, \quad e'_1 = \alpha'_1 x_1$$

Zbog (ii) i (b) imamo $(e_1|x_1) > 0$ i $(e'_1|x_1) > 0$. Zato vrijedi

$$1 = (e_1|e_1) = \overline{\alpha_1}(e_1|x_1), \quad 1 = (e'_1|e'_1) = \overline{\alpha'_1}(e'_1|x_1).$$

Stoga

$$\alpha_1, \alpha'_1 > 0.$$

Konačno, iz

$$e_1 = \alpha_1 x_1 = (\alpha_1/\alpha'_1)e'_1$$

imamo

$$1 = (e_1|e_1) = (\alpha_1/\alpha'_1)^2(e'_1|e'_1) = (\alpha_1/\alpha'_1)^2 \implies \alpha_1/\alpha'_1 = 1.$$

Dakle, $e_1 = e'_1$. Pretpostavimo da je $e'_1 = e_1, \ldots, e'_{k-1} = e_{k-1}$, za $k \geq 2$. Ako je $e'_k \neq e_k$, onda možemo uzeti $e = e'_k$ i iz prvog dijela dokaza dobivamo

$$||e'_k - x_k|| > ||e_k - x_k||.$$

Sasvim analogno, možemo uzeti $e = e_k$ i dobivamo

$$||e_k - x_k|| > ||e'_k - x_k||.$$

Ovo je kontradikcija. □

Teorem 7.17. *Neka je $x_1, \ldots, x_m$ niz linearno nezavisnih vektora u V. Tada postoji jedan i samo jedan niz ortonormiranih vektora $e_1, \ldots, e_m$ tako da vrijedi:*

(i) $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ *za svaki* $k = 1, \ldots, m$.
(ii) $(e_k|x_k) > 0$ *za sve* $k = 1, 2, \ldots, m$.

Niz $e_1, \ldots, e_m$ dan je sljedećim postupkom ***(Gram–Schmidtov postupak ortogonalizacije)****. Najprije, definiramo niz $y_1, \ldots, y_m$, a onda odmah i niz $e_1, \ldots, e_m$*

$$y_1 = x_1 \qquad\qquad e_1 = y_1/||y_1||$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & x_1 \\ (x_2|x_1) & x_2 \end{vmatrix} = (x_1|x_1)x_2 - (x_2|x_1)x_1 \qquad\qquad e_2 = y_2/||y_2||$$

$\vdots$

$$y_m = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{m-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{m-1}) & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{m-1}|x_1) & (x_{m-1}|x_2) & \cdots & (x_{m-1}|x_{m-1}) & x_{m-1} \\ (x_m|x_1) & (x_m|x_2) & \cdots & (x_m|x_{m-1}) & x_m \end{vmatrix} \qquad e_m = y_m/||y_m||$$

Nadalje, vrijedi

(a) $y_k - \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\rangle$, $k = 2, \ldots, m$.
(b) $\Gamma(x_1, \ldots, x_k) > 0$, $k = 1, \ldots, m$.
(c) *Neka je $2 \le k \le m$ i e jedinični vektor takav da $e \ne e_k$ i $e \perp \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\rangle$. Onda je $||e - x_k|| > ||e_k - x_k||$*

Dokaz. Neka je $2 \le k \le m$. Tada imamo

$$y_k = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{k-1}|x_1) & (x_{k-1}|x_2) & \cdots & (x_{k-1}|x_{k-1}) & x_{k-1} \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_{k-1}) & x_k \end{vmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem po zadnjem stupcu nalazimo da vrijedi (a). Po pretpostavci $x_1, \ldots, x_m$ su linearno nezavisni, pa vrijedi da je i podniz $x_1, \ldots, x_{k-1}$ linearno nezavisan. Dakle, teorem 7.7 daje

(7.18) $$\Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}) \ne 0, \quad k = 2, \ldots, m.$$

To zajedno s dokazanim (a) daje gornje trokutasti sustav koji rješavamo po y_i odozgo prema dolje na jedinstven način:

(7.19)
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_k = \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k + (\text{linearna kombinacija } x_1, \ldots, x_{k-1}) \\ \vdots \\ y_m = \Gamma(x_1, \ldots, x_{m-1})x_m + (\text{linearna kombinacija } x_1, \ldots, x_{m-1}) \end{cases}$$

tako da nalazimo

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m \tag{7.20}$$

Također, iz gornje definicije y_k kao determinante nalazimo

$$(y_k|x_i) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_{k-1}) & (x_1|x_i) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_{k-1}) & (x_2|x_i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{k-1}|x_1) & (x_{k-1}|x_2) & \cdots & (x_{k-1}|x_{k-1}) & (x_{k-1}|x_i) \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \cdots & (x_k|x_{k-1}) & (x_k|x_i) \end{vmatrix} \tag{7.21}$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{ ako je } i < k \text{ jer determinanta ima dva ista stupca : } i\text{–ti i } k\text{–ti} \\ \Gamma(x_1, \dots, x_k) \ \text{ ako je } i = k. \end{cases}$$

Relacije (7.20) i (7.21) daju

$$y_k \perp \langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_{k-1} \rangle, \quad k = 2, \dots, m. \tag{7.22}$$

Iz (7.20) imamo

$$\dim\langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle = \dim\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = m,$$

jer su vektori $x_1, x_2, \dots, x_m$ linearno nezavisni. Gornja relacija pokazuje da m vektora $y_1, y_2, \dots, y_m$ razapinje m–dimenzionalan prostor. Dakle, vektori $y_1, y_2, \dots, y_m$ su linearno nezavisni. Posebno, niti jedan od njih nije nul–vektor. To pokazuje da su vektori $e_k = y_k/||y_k||$ dobro definirani. Dok, (7.22) pokazuje da su ti vektori međusobno ortogonalni. Dakle, $e_1, e_2, \dots, e_m$ su ortonormirani. Sada, (7.20) daje (i). Nadalje, iz (7.19) nalazimo da vrijedi

$$y_k = \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + (\text{linearna kombinacija } x_1, \dots, x_{k-1})$$

Odatle, računajući skalarni produkt nalazimo

$$\begin{aligned} (y_k|y_k) &= (\Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + (\text{linearna kombinacija } x_1, \dots, x_{k-1})|y_k) \\ &= \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})(x_k|y_k), \end{aligned}$$

zbog (7.22). Koristeći (7.21) imamo

$$\begin{aligned} 0 < (y_k|y_k) &= \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})(x_k|y_k) \\ &= \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})\overline{(y_k|x_k)} \\ &= \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1})\overline{\Gamma(x_1, \dots, x_k)}. \end{aligned}$$

Ova relacija, polazeći od $\Gamma(x_1) = (x_1|x_1) > 0$, indukcijom pokazuje da je $\Gamma(x_1, \dots, x_k) > 0$ za svaki k tj. vrijedi (b). Sada, kada znamo da je

$\Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}) > 0$, opet koristimo

$$(y_k|y_k) = \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1})(x_k|y_k),$$

zapisanu uz pomoć relacije $e_k = y_k/||y_k||$. Imamo

$$(x_k|e_k) = ||y_k||/\Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}) > 0.$$

Ovo dokazuje (ii). Konačno, jedinstvenost i (c) slijedi iz leme 7.10. $\square$

Korolar 7.23. *Neka je V (konačno–dimenzionalan) unitaran prostor. Tada postoji ortonormirana baza za V. Nadalje, ako je $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza za V, onda za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i.$$

Dokaz. Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ baza za V. Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije iz teorema 7.17 konstruiramo ortonormiran niz vektora $e_1, \ldots, e_n$. Kako su ti vektori linearno nezavisni

(vidi propoziciju 7.6 (i)), to odmah dobivamo da je $(e_1, \ldots, e_n)$ baza za V. Prikaz vektora x slijedi iz propozicije 7.6 (ii). $\square$

7.7. **Ortogonalna suma potprostora; ortogonalan komplement.** Neka su $W_1, W_2, \ldots, W_m$ potprostori u V takvi da je $W_i \perp W_j$ za sve $i \neq j$. Tada je suma direktna: $W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_m$. Zaista, treba pokazati da

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 0, \quad w_i \in W_i, \implies w_i = 0, \quad \forall i.$$

Za svaki $i \neq j$ imamo $(w_i, w_j) = 0$ jer je po pretpostavci $W_i \perp W_j$. Dakle, za zadani i, skalarnim množenjem gornje relacije s w_i nalazimo

$$(w_1|w_i) + (w_2|w_i) + \cdots + (w_{i-1}|w_i) + (w_i|w_i) + (w_{i+1}|w_i) + \cdots (w_m|w_i) = 0,$$

a to daje

$$(w_i|w_i) = 0 \implies w_i = 0.$$

Ovim je dokazana direktnost sume. Direktnu sumu sastavljenu od međusobno ortogonalnih potprostora nazivamo (direktna) ortogonalna suma. Prema gornjem, svaka suma međusobno ortogonalnih potprostora je direktna te onda i ortogonalna suma. Oznaka za ortogonalnu sumu je $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Neka je W potprostor unitarnog prostora V. Definiramo

$$W^\perp = \{x \in V;\ (x|w) = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

Lako se provjeri da je $W^\perp$ potprostor u W. Taj potprostor naziva se **ortogonalni komplement** od W u V. Prema gornjem $W \oplus W^\perp$ je ortogonalna suma.

7.8. **Teorem o projekciji i najbolja aproksimacija.**

Teorem 7.24 (o projekciji)**.** *Neka je W potprostor unitarnog prostora V. Tada za svaki $v \in V$ postoji jedinstveni $w \in W$ tako da $v - w \perp W$. Drugim riječima, $V = W \oplus W^{\perp}$. Jedinstveni vektor $w \in W$ zovemo ortogonalnom projekcijom vektora v na potprostor W.*

Dokaz. Ako je $W = \{0\}$, onda je jasno iz definicije ortogonalnog komplementa $W^{\perp} = V$. Neka je $W \neq \{0\}$, onda prema korolaru 7.23 možemo izabrati ortonormiranu bazu $(e_1, \ldots, e_m)$ za W. Stavimo li $w = \sum_{i=1}^{m} (v|e_i)e_i$, onda propozicija 7.6 (ii) pokazuje da je $v - w \perp W$.

Neka su $w, w' \in W$ takvi da je $v - w \perp W$ i $v - w' \perp W$. To znači da su vektori $v - w, v - w' \in W^{\perp}$ pa je i razlika tih vektora $(v - w) - (v - w') = w - w' \in W^{\perp}$. S druge strane $w, w' \in W$ povlači $w - w' \in W$. Kako je suma $W \oplus W^{\perp}$ direktna, to nalazimo $w - w' \in W \cap W^{\perp} = \{0\}$, tj. $w = w'$. □

Korolar 7.25. $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W = n - \dim W$.

Neka je $W \neq \{0\}$. Ortogonalni komplement $W^{\perp}$ možemo konstruirati ovako. Izaberimo neku bazu $(x_1, \ldots, x_m)$ za W i proširimo je do baze $(x_1, \ldots, x_n)$ za V. Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije opisanim u teoremu 7.17 konstruiramo ortonormiranu bazu $(e_1, \ldots, e_n)$ za V. Postupak ortogonalizacije pokazuje da su vektori $e_1, \ldots, e_m$ iz W, a kako su linearno nezavisni to imamo da je $(e_1, \ldots, e_m)$ ortonormirana baza za W. Ortonormirana baza za $W^{\perp}$ dana je sa $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$. Zaista, svaki $x \in V$ možemo napisati u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$ (vidi korolar 7.23). Kako je $x \in W^{\perp}$ ako i samo ako je $(x|e_i) = 0$ za sve $1 \leq i \leq m$, to nalazimo da je $x \in W^{\perp}$ ako i samo ako $x = \sum_{i=m+1}^{n} (x|e_i)e_i$. Usporedite ovo s računom iz dokaza leme 1.7.

Neka je W potprostor unitarnog prostora V. Prema teoremu 7.24, možemo svaki $v \in V$ na jedinstven način napisati u obliku

$$v = w + u, \quad w \in W, \ u \in W^{\perp}.$$

Teorem 7.26 (o najboljoj aproksimaciji)**.** *Uz gornje oznake*

$$||v - w|| < ||v - w'||, \quad \forall w' \in W, \ w' \neq w.$$

Dokaz. Po definiciji ortogonalne projekcije imamo $v - w \perp W$. Kako je $w - w' \in W$, to je $v - w \perp w - w'$. Stoga možemo primijeniti Pitagorin poučak:

$$||v - w'||^2 = ||(v - w) + (w - w')||^2 = ||v - w||^2 + ||w - w'||^2 > ||v - w||^2$$

jer za $w' \neq w$ imamo $||w - w'|| > 0$. □

8. Reprezentacija linearnog funkcionala i hermitsko adjungiranje

8.1. **Antilinearna preslikavanja; konjugirani vektorski prostor.** Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K. Podsjetimo da je linearno preslikavanje $\varphi : V \to W$ preslikavanje koje zadovoljava

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad \forall x, y \in V, \ \alpha, \beta \in K.$$

Iz predavanja 1 znamo da je skup svih takvih preslikavanja $L(V, W)$ vektorski prostor nad K dimenzije $\dim V \cdot \dim W$.

Antilinearno preslikavanje $\varphi : V \to W$ je preslikavanje koje zadovo–ljava

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\varphi(x) + \overline{\beta}\varphi(y), \quad \forall x, y \in V, \ \alpha, \beta \in K.$$

Ako je $K = \mathbb{R}$ ovim nismo dobili ništa novo jer svako antilinearno preslikavanje je ujedno i linearno preslikavanje. Razlika postoji samo za $K = \mathbb{C}$. Objasnimo o čemu se radi.

Svakom vektorskom prostoru V možemo pridružiti novi vektorski prostor $\overline{V}$ koji je u odnosu na zbrajanje vektora jednak V. Jedina razlika je u novom množenju sa skalarom:

$$\lambda.v \overset{def}{=} \overline{\lambda}v, \quad \forall v \in V = \overline{V}, \ \lambda \in K.$$

Lako se uvjerimo da uobičajena svojstva koja definiraju vektorski prostor vrijede:

$$\begin{aligned}
&1.v = 1v = v \\
&\lambda.(v + w) = \overline{\lambda}(v + w) = \overline{\lambda}v + \overline{\lambda}w = \lambda.v + \lambda.w \\
&(\lambda + \mu).v = \overline{(\lambda + \mu)}v = (\overline{\lambda} + \overline{\mu})v = \overline{\lambda}v + \overline{\mu}v = \lambda.v + \mu.v \\
&(\lambda\mu).v = \overline{\lambda\mu}v = (\overline{\lambda}\overline{\mu})v = \overline{\lambda}(\overline{\mu}v) = \lambda.(\mu.v).
\end{aligned}$$

Ovaj vektorski prostor nazivamo **konjugirani vektorski prostor** prostora V. Ako je $K = \mathbb{R}$ ovim nismo dobili ništa novo.

Nadalje, lako se uvjerimo da je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza za V ako i samo ako je e baza za $\overline{V}$. Dakle, $\dim V = \dim \overline{V}$. Također, ako izaberemo bazu $e = (e_1, \ldots, e_n)$ za V onda preslikavanje

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$$

je izomorfizam vektorskih prostora V i $\overline{V}$ što lako provjerimo. (Dovoljno je vidjeti linearnost i injektivnost, a oboje je gotovo očigledno!) Iako su V i $\overline{V}$

izomorfni, oni su izomorfni na nekanonski način (izomorfizam ovisi o izboru baze). S druge strane, konstrukcija prostora $\overline{V}$ iz V je sasvim kanonska.

Što je s antilinearnim preslikavanjima? Svako antilinearno preslikavanje $\varphi : V \to W$ je **linearno preslikavanje** $\varphi : V \to \overline{W}$. Zaista po definiciji antilinearnog preslikavanja imamo

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\varphi(x) + \overline{\beta}\varphi(y), \quad \forall x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K,$$

što se drugim riječima može napisati kao

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha.\varphi(x) + \beta.\varphi(y), \quad \forall x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K.$$

Obrat također vrijedi. Dakle, skup svih antilinearnih preslikavanja $V \to W$ je kanonski jednak

$$L(V, \overline{W}).$$

Kada kažemo da je antilinearno preslikavanje $V \to W$ izomorfizam, onda po definiciji znači da je odgovarajuće linearno preslikavanje $V \to \overline{W}$ izomorfizam.

Čitatelj će lako provjeriti da svaka seskvilinearna forma (vidi točku 7.2)

$$V \times W \to K$$

je u stvari bilinearna forma (vidi točku 7.1)

$$V \times \overline{W} \to K$$

i obratno.

8.2. **Reprezentacija linearnog funkcionala.** Neka je V unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ ) : V \times V \to K$. Tada za svaki $w \in V$ definiramo preslikavanje

$$l_w : V \to K \quad v \mapsto (v|w).$$

Kako je skalarni produkt linearan u prvom argumentu, l_w je linearan funkcional na V.

Teorem 8.1 (o reprezentaciji linearnog funkcionala)**.** *Uz gornje oznake, preslikavanje $w \mapsto l_w$ je antilinearan izomorfizam vektorskih prostora V i V'. Posebno, za svaki $l \in V'$ postoji jedan i samo jedan $w \in V$ tako da vrijedi $l = l_w$ tj.*

$$l(v) = (v|w), \quad \forall v \in V.$$

Dokaz. Kako je skalarni produkt antilinearan u drugom argumentu, to imamo

$$\begin{aligned} l_{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2}(v) &= (v|\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) \\ &= \overline{\beta_1}(v|w_1) + \overline{\beta_2}(v|w_2) \\ &= \overline{\beta_1} l_{w_1}(v) + \overline{\beta_2} l_{w_2}(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Odatle, vrijedi

$$l_{\beta_1 w_1+\beta_2 w_2} = \overline{\beta_1} l_{w_1} + \overline{\beta_2} l_{w_2}, \quad \forall w_1, w_2 \in W,\ \beta_1, \beta_2 \in K.$$

Dakle, preslikavanje $w \mapsto l_w$ je antilinearno. Prema diskusiji iz točke 8.1, $w \mapsto l_w$ je linearno preslikavanje

$$V \to \overline{V'}.$$

Kako je

$$\dim V = \dim V' = \dim \overline{V'},$$

dovoljno je utvrditi još samo injektivnost da se dokažu sve tvrdnje teorema. Ako je $l_w = 0$, onda

$$0 = l_w(v) = (v|w), \quad \forall v \in V.$$

Posebno, za $v = w$, nalazimo

$$||w||^2 = (w|w) = l_w(w) = 0 \implies w = 0.$$

□

8.3. **Hermitski adjungirani operator.** Neka je V unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_V$ i neka je W unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_W$.

Neka je $A \in L(V, W)$. Tada za svaki $w \in W$ preslikavanje

$$V \to K$$

zadano s

$$v \mapsto (Av|w)_W$$

je linearan funkcional na V. Dakle, prema teoremu 8.1, postoji jedinstven vektor $A^*w \in V$ takav da

$$(Av|w)_W = (v|A^*w)_V, \quad \forall v \in V.$$

Na taj način konstruirali smo preslikavanje

$$A^* : W \to V, \quad w \mapsto A^*w,$$

koje zadovoljava

$$(Av|w)_W = (v|A^*w)_V, \quad \forall v \in V,\ w \in V. \tag{8.2}$$

Lema 8.3. *$A^* \in L(W, V)$ tj. $A^* : W \to V$ je linearan operator. Ovaj operator naziva se* ***hermitski adjungirani operator operatora*** *A. Nadalje, A^* jedinstveno je određen s (8.2).*

Dokaz. Koristeći (8.2), računamo

$$\begin{aligned}(v|A^*(\beta_1 w_1+\beta_2 w_2))_V &= (Av|\beta_1 w_1+\beta_2 w_2)_W\\ &= \overline{\beta_1}\,(Av|w_1)_W+\overline{\beta_2}\,(Av|w_2)_W\\ &= \overline{\beta_1}\,(v|A^*w_1)_V+\overline{\beta_2}\,(v|A^*w_2)_V\\ &= (v|\beta_1 A^*w_1+\beta_2 A^*w_2)_V\,.\end{aligned}$$

Dakle, uz oznaku

$$x = A^*(\beta_1 w_1+\beta_2 w_2)-\beta_1 A^*w_1-\beta_2 A^*w_2,$$

imamo

$$(v|x)_V = 0, \quad \forall v\in V.$$

Posebno, za $v=x$ imamo

$$||x||^2 = (x|x)_V = 0 \implies x=0.$$

Dakle

$$A^*(\beta_1 w_1+\beta_2 w_2) = \beta_1 A^*w_1+\beta_2 A^*w_2.$$

Ovim je $A^*\in L(W,V)$ dokazano.

Ostaje dokazati jedinstvenost. Ako postoji još jedan operator $B\in L(W,V)$ koji zadovoljava

$$(Av|w)_W = (v|Bw)_V, \quad \forall v\in V,\ w\in V.$$

Onda, ako oduzmemo (8.2), nalazimo

$$0=(v|A^*w)_V-(v|Bw)_V=(v|A^*w-Bw), \quad \forall v\in V,\ w\in V.$$

Opet, ako slično kao gore, stavimo $x=v=A^*w-Bw$, nalazimo

$$||x||^2=(x|x)_V=0 \implies x=0 \implies A^*w=Bw,\ \forall w\in W.$$

Ovo dokazuje jedinstvenost. □

Teorem 8.4. *Neka su V,W unitarni prostori. Tada je preslikavanje $A\mapsto A^*$ antilinearna involucija $L(V,W)\to L(W,V)$ tj.*

(i) ***(involutivnost)*** $(A^*)^*=A$, *za sve* $A\in L(V,W)$.
(ii) ***(antilinearnost)*** $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$, *za sve* $A,B\in L(V,W)$ *i* $\alpha,\beta\in K$.

Posebno, $A\mapsto A^*$ je antilinearan izomorfizam $L(V,W)\to L(W,V)$.

Dokaz. Koristeći (8.2), nalazimo

$$(Av|w)_W=(v|A^*w)_V.$$

Ako tu relaciju konjugiramo, nalazimo

$$\overline{(Av|w)_W}=\overline{(v|A^*w)_V} \implies (w|Av)_W=(A^*w|v)_V.$$

Dakle
$$(A^*w|v)_V = (w|Av)_W, \quad \forall w \in W,\ v \in V.$$
S druge strane, po definiciji od $(A^*)^*$ (vidi (8.2)), imamo
$$(A^*w|v)_V = (w|(A^*)^*v)_W, \quad \forall w \in W,\ v \in V.$$
Dakle, jedinstvenost dokazana u lemi 8.3 dokazuje (i).

Za dokaz tvrdnje (ii), koristeći (8.2), računamo

$$\begin{aligned}(v|(\alpha A + \beta B)^*w)_V &= ((\alpha A + \beta B)v|w)_W \\ &= \alpha(Av|w)_W + \beta(Bv|w)_W \\ &= \alpha(v|A^*w)_V + \beta(v|B^*w)_V \\ &= (v|\overline{\alpha}A^*w + \overline{\beta}B^*w)_V, \quad \forall v \in V,\ w \in W.\end{aligned}$$

Odatle, slično kao u dokazu leme 8.3 možemo zaključiti
$$(\alpha A + \beta B)^*w = \overline{\alpha}A^*w + \overline{\beta}B^*w, \quad \forall w \in W,$$
tj.
$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*.$$
Odatle slijedi (ii).

Zadnja tvrdnja teorema je posljedica činjenice da je $A \mapsto A^*$ involucija. □

Teorem 8.5. *Neka su V, W, U unitarni prostori. Neka je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, U)$. Onda vrijedi:*
$$(BA)^* = A^*B^*.$$

Dokaz. Najprije, zbog $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, U)$, kompozicija $BA \in L(V, U)$. Također vidimo da je $(BA)^* \in L(U, V)$. Isto tako, $A^* \in L(W, V)$ i $B^* \in L(U, W)$, te je zato $A^*B^* \in L(U, V)$. Moramo pokazati
$$(BA)^*u = A^*B^*u, \quad \forall u \in U.$$

Opet koristeći (8.2), nalazimo
$$(BAv|u)_U = (v|(BA)^*u)_V, \quad \forall v \in V,\ u \in U.$$
Dakle, vrijedi (koristeći (8.2))

$$\begin{aligned}(v|(BA)^*u)_V &= (BAv|u)_U \\ &= (Av|B^*u)_W \\ &= (v|A^*B^*u)_V,, \quad \forall v \in V,\ u \in U.\end{aligned}$$

Dakle
$$0 = (v|(BA)^*u - A^*B^*u)_V, \quad \forall v \in V,\ u \in U.$$

Ako stavimo $v=(BA)^*u-A^*B^*u$, nalazimo

$$\begin{aligned} ||v||^2 = (v|v) = 0 \implies \\ \implies v = (BA)^*u - A^*B^*u = 0. \end{aligned}$$

To je trebalo dokazati. □

Korolar 8.6. *Neka je V unitaran prostor. Tada preslikavanje $A \mapsto A^*$ (hermitsko adjungiranje) zadovoljava:*

(i) ***(involutivnost)*** $(A^*)^* = A$, *za sve* $A \in L(V)$.
(ii) ***(antilinearnost)*** $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$, *za sve* $A, B \in L(V)$ *i* $\alpha, \beta \in K$.
(iii) $(AB)^* = B^*A^*$, *za sve* $A, B \in L(V)$.
(iv) $I^* = I$, *gdje je I jedinični operator.*

Dokaz. Svojstva (i)–(iii) slijede direktno iz teorema 8.4 i 8.5. Dok (iv) slijedi odmah iz (8.2) ako uzmemo $A = I$ i $V = W$. □

8.4. **Matrična realizacija hermitskog adjungiranja.** Neka je $A = (a_{i,j}) \in M_{m\times n}(K)$ bilo koja matrica, onda **hermitski adjungirana matrica** A^* je matrica iz $M_{n\times m}(K)$ takva da na mjestu (i,j) ima element $\overline{a_{j,i}}$ tj. koja je dobivena iz matrice A najprije transponiranjem matrice A, a onda kompleksnim konjugiranjem svakog elementa dobivene matrice.

Neka je V unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_V$ i neka je W unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_W$. Neka su $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_m)$ ortonormirane baze za V i W, respektivno. (One postoje prema korolaru 7.23.)

Neka je $A \in L(V, W)$. Onda možemo pisati

$$\begin{cases} Ae_1 = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \cdots + \alpha_{m1} f_m \\ Ae_2 = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \cdots + \alpha_{m2} f_m \\ \vdots \\ Ae_n = \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \cdots + \alpha_{mn} f_m \end{cases}$$

te na taj način operatoru A pridružujemo matricu

$$A(f,e) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K).$$

Matrica $A(f,e)$ naziva se matrica operatora A u paru baza f i e.

Nadalje, jer su baze e i f ortonormirane imamo

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \alpha_{ij}(f_i|f_i)_W = (\alpha_{ij}f_i|f_i)_W\\ &= (\alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \cdots \alpha_{mj}f_m|f_i)_W\\ &= (Ae_j|f_i)_W, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n.\end{aligned}$$

Kako je $A^* \in L(W, V)$, to slično kao gore imamo matrični zapis operatora A^* u paru baza e i f. (Uočite da gore govorimo o paru baza f i e.)

Možemo pisati

$$\begin{cases} A^*f_1 = \beta_{11}e_1 + \beta_{21}e_2 + \cdots + \beta_{n1}e_n\\ A^*f_2 = \beta_{12}e_1 + \beta_{22}e_2 + \cdots + \beta_{n2}e_n\\ \vdots\\ A^*f_m = \beta_{1m}e_1 + \beta_{2m}e_2 + \cdots + \beta_{nm}e_n\end{cases}$$

te na taj način operatoru A^* pridružujemo matricu

$$(A^*)(e, f) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nm}\end{pmatrix} \in M_{n\times m}(K).$$

Analogno kao gore, nalazimo

$$\beta_{ij} = (A^*f_j|e_i)_V, \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

Iz (8.2) nalazimo

$$\beta_{ij} = (A^*f_j|e_i)_V = (f_j|Ae_i)_W = \overline{(Ae_i|f_j)_V} = \overline{\alpha_{ji}}, \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

Ovim smo dokazali:

Propozicija 8.7. *U paru ortonormiranih baza e i f, matrica $(A^*)(e, f)$ operatora A^* je hermitski adjungirana matrici $A(f, e)$ tj. vrijedi*

$$(A^*)(e, f) = (A(f, e))^*.$$

8.5. **Seskvilinearne forme.** Neka je V unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_V$ i neka je W unitaran vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\ |\ )_W$. Opišimo sve seskvilinearne forme $V \times W \to K$ (vidi točku 7.2).

Seskvilinearna forma je preslikavanje $B : V \times W \to K$ linearno u prvom argumentu i antilinearno u drugom argumentu:

$$B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w)$$
$$B(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \overline{\beta_1} B(v, w_1) + \overline{\beta_2} B(v, w_2),$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$.

U opisu seskvilinearnih formi postupamo kao u točki 8.3. Za svaki $w \in W$ preslikavanje

$$V \to K$$

zadano sa

$$v \mapsto B(v, w)$$

je linearan funkcional na V. Prema teoremu 8.1 postoji jedinstven $A^*w \in V$ takav da

$$B(v, w) = (v|A^*w)_V, \quad \forall v \in V.$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
(v|A^*(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2))_V &= B\left(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2\right) \\
&= \overline{\beta_1} B\left(v, w_1\right) + \overline{\beta_2} B\left(v, w_2\right) \\
&= \overline{\beta_1} \left(v|A^* w_1\right)_V + \overline{\beta_2} \left(v|A^* w_2\right)_V \\
&= \left(v|\beta_1 A^* w_1 + \beta_2 A^* w_2\right)_V, \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Kao u dokazu leme 8.3 zaključujemo

$$A^*(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 A^* w_1 + \beta_2 A^* w_2.$$

Ovo pokazuje da je $A^* \in L(W, V)$. Ovim smo dokazali da za svaku seskvilinearnu formu $B : V \times W \to K$ postoji linearan operator $A \in L(V, W)$ takav da vrijedi

$$B(v, w) = (Av|w)_W = (v|A^*w)_V, \quad \forall v \in V, \ w \in W.$$

Jedinstvenost operatora $A \in L(V, W)$ slijedi analogno dokazu jedinstvenosti iz leme 8.3.

Obratno, ako je $A \in L(V, W)$, onda je preslikavanje

$$V \times W \to K, \quad (v, w) \mapsto (Av|w)_W = (v|A^*w)_V$$

seskvilinearno. Ovim smo dokazali

Propozicija 8.8. *Neka su V i W unitarni prostori. Tada je preslikavanje koje operatoru $A \in L(V, W)$ pridružuje seskvilinearnu formu*

$$V \times W \to K, \quad (v, w) \mapsto (Av|w)_W = (v|A^*w)_V$$

bijekcija između $L(V, W)$ i skupa svih seskvilinearnih formi $V \times W \to K$.

9. Unitarni i hermitski operatori

9.1. **Unitarni operatori.** Neka je $U\colon V \to V$ linearan operator na realnom ili kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $U^*U = UU^* = I$.
(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ za sve $x, y \in V$.
(3) $||Ux|| = ||x||$ za sve $x \in V$.
(4) $Ue_1, \ldots, Ue_n$ je ortonormirana baza od V za svaku ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_n$.
(5) $Ue_1, \ldots, Ue_n$ je ortonormirana baza od V za neku ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_n$.

Za operator U kažemo da je *unitaran operator* ako vrijedi jedna od ekvivalentnih tvrdnji (1)–(5). Unitaran operator na realnom prostoru zovemo i *ortogonalnim operatorom.*

Dokaz. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Ako je $U^*U = I$, onda je

$$(x \mid y) = (x \mid U^*Uy) = (Ux \mid Uy).$$

Obratno, (2) povlači

$$(x \mid y) = (Ux \mid Uy) = (U^*Ux \mid y).$$

Odavle slijedi $U^*Ux - x = 0$, odnosno $U^*U = I$. Znači da je U^* inverz od U pa vrijedi $UU^* = I$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Očito iz (2) slijedi

$$||Ux||^2 = (Ux \mid Ux) = (x \mid x) = ||x||^2.$$

Obratno, (3) povlači (2) jer prema lemi 7.3 (ii)–(iii) skalarni produkt možemo izraziti pomoću norme. Na primjer, u slučaju realnog prostora imamo

$$\begin{aligned}(Ux|Uy) &= \frac{||Ux+Uy||^2 - ||Ux-Uy||^2}{4}\\ &= \frac{||U(x+y)||^2 - ||U(x-y)||^2}{4}\\ &= \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4} = (x|y).\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) je očito.

(5) $\Rightarrow$ (2) Neka je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza takva da je $Ue_1, \ldots, Ue_n$ ortonormirana baza. Tada za

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \quad \text{i} \quad y = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$$

imamo

$$\begin{aligned}(Ux|Uy) &= (\sum_{i=1}^{n} \xi_i Ue_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j Ue_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (Ue_i \mid Ue_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (e_i \mid e_j) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) = (x|y).\end{aligned}$$

□

Unitarne matrice. Za $n \times n$ matricu U kažemo da je *unitarna matrica* ako je pripadni linearni operator $U\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ unitaran za kanonski skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Realnu unitarnu matricu zovemo i *ortogonalnom matricom.* Primijetimo da u slučaju realne matrice A imamo $A^* = A^t$. Znači da je realna matrica A ortogonalna ako i samo ako je

$$A^t A = AA^t = I.$$

Iz propozicije 8.7 slijedi da je A unitaran operator ako i samo ako je u nekoj/svakoj ortonormiranoj bazi e matrica $A(e)$ unitarna.

Primjer 9.1. *Matrice*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & i\\-i & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}$$

su unitarne 2×2 *matrice.*

Zadatak 9.2. *Da li su*

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

sve unitarne 2×2 *matrice?*

Primjer 9.3. *Matrice*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

su ortogonalne 3×3 *matrice.*

Unitarne refleksije. Za vektor $a \neq 0$ na unitarnom prostoru V definiramo linearan operator

$$T_a(x) = x - \frac{2(x|a)}{(a|a)}\, a, \quad x \in V.$$

Na hiperravnini $W = \langle a \rangle^\perp$ taj operator djeluje kao identiteta, tj.

$$T_a(y) = y \qquad \text{za} \quad y \in W$$

jer je $(y|a) = 0$, a za $x = a$ imamo

$$T_a(a) = a - \frac{2(a|a)}{(a|a)}\, a = a - 2a = -a.$$

Teorem 7.24 o projekciji nam daje $V = W \oplus \langle a \rangle$, pa za $y \in W$ i skalar λ imamo

$$T_a(y + \lambda a) = y - \lambda a.$$

Znači da je

$$T_a^2(y + \lambda a) = T_a(y - \lambda a) = y + \lambda a,$$

$$||T_a(y + \lambda a)||^2 = ||y - \lambda a||^2 = ||y||^2 + ||\lambda a||^2 = ||y + \lambda a||^2,$$

odnosno $T_a^2 = I$ i T_a je unitaran operator.

Kažemo da je T_a unitarna refleksija s obzirom na hiperravninu $\langle a \rangle^\perp$.

Hausholderove refleksije. Neka je V realan prostor i $b, c \in V$ linearno nezavisni vektori takvi da je $||b|| = ||c||$. Tada je

$$(b - c \mid b + c) = ||b||^2 + (b|c) - (c|b) - ||c||^2 = 0,$$

odnosno $b - c \perp b + c$. Odavle slijedi

$$T_{b-c}(b + c) = b + c, \quad T_{b-c}(b - c) = -b + c,$$

odnosno

$$T_{b-c}(b) = c, \quad T_{b-c}(c) = b.$$

Operator T_{b-c} zovemo *Hausholdereovom refleksijom.* Sve rečeno vrijedi i za kompleksni vektorski prostor V ako je skalarni produkt vektora b i c realan, tj. ako je

$$(b|c) = (c|b).$$

Grupa unitarnih operatora *Skup $U(V)$ svih unitarnih operatora na unitarnom prostoru V je grupa s operacijom množenja operatora.* Naime, produkt U_1U_2 unitarnih operatora U_1 i U_2 je unitaran jer je

$$((U_1U_2)x \mid (U_1U_2)y) = (U_1(U_2x) \mid U_1(U_2y)) = (U_2x \mid U_2y) = (x \mid y),$$

pa je skup svih unitarnih operatora $U(V)$ zatvoren za asocijativnu operaciju množenja operatora. Skup $U(V)$ sadrži jedinični operator I koji je jedinica za množenje i za svaki unitarni operator U sadrži i njegov inverz $U^{-1} = U^*$ jer je

$$(U^*)^*U^* = U^{**}U^* = UU^* = I.$$

U slučaju realnog prostora V obično govorimo o grupi ortogonalnih operatora koju označavamo s $O(V)$. Skup svih unitarnih (odnosno ortogonalnih) operatora na V s determinantom 1 je također grupa koju označavamo $SU(V)$ (odnosno $SO(V)$).

Grupa unitarnih matrica. *Skup $U(n)$ svih unitarnih $n \times n$ matrica je grupa s operacijom množenja matrica.* Naime, unitarne matrice su poseban slučaj unitarnih operatora $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$ s kanonskim skalarnim produktom.

Ako je V unitaran n-dimenzionalan prostor s ortonormiranom bazom $e = (e_1, \dots, e_n)$, onda je preslikavanje koje unitarnom operatoru U pridružuje (unitarnu) matricu $U(e)$ izomorfizam grupa,

$$U(V) \to U(n), \qquad U \mapsto U(e),$$

obično pišemo $U(V) \cong U(n)$.

Ako je $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ neka druga ortonormirana baza unitarnog prostora V, onda je matrica prijelaza T unitarna matrica $T = W(e)$ unitarnog operatora W definiranog relacijama $We_1 = e'_1, \dots, We_n = e'_n$. Za matrice unitarnog operatora U vrijedi

$$U(e') = T^* U(e) T,$$

obično kažemo da su matrice $U(e')$ i $U(e)$ *unitarno slične*.

Sve rečeno jednako vrijedi i za grupu $O(n)$ ortogonalnih $n \times n$ matrica i grupu $O(V)$ ortogonalnih operatora na realnom n-dimenzionalnom prostoru V. Posebno je $O(V) \cong O(n)$ i za dvije ortonormirane baze vrijedi

$$U(e') = T^t U(e) T,$$

Skup svih unitarnih (odnosno ortogonalnih) $n \times n$ matrica s determinantom 1 je također grupa koju označavamo $SU(n)$ (odnosno $SO(n)$)[17].

Zadatak 9.4. *Dokažite da je determinata ortogonalne matrice* 1 *ili* -1.

Zadatak 9.5. *Skup* 2×2 *kompleksnih matrica oblika*

$$\mathbb{H} = \{rg \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ g \in SU(2)\} = \left\{ r \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

zovemo kvaternionima ili Hamiltonovim brojevima, a zapis rg zovemo polarnom formom kvaterniona. Očito je $\mathbb{H}$ zatvoren za množenje i svaki kvaternion $rg \neq 0$ ima inverz $r^{-1}g^{-1}$. Dokažite da je $\mathbb{H}$ zatvoren za zbrajanje.

9.2. QR**-faktorizacija.** *Neka je A regularna realna $n \times n$ matrica. Tada postoji ortogonalna matrica Q i gornja trokutasta matrica R tako da je*

$$A = QR.$$

Dokaz. Neka je A zapisana kao blok matrica

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad a_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad A_{22} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R}).$$

Ako je $a_{21} \neq 0$, onda postoji Hausholderova refleksija T_1 na $\mathbb{R}^n$ takva da je

$$T_1 b = ||b|| e_1,$$

pa je

$$T_1 A = T_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||b|| & a'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{pmatrix}$$

i matrica A'_{22} je regularna. Ako prvi vektor-stupac b' u $(n-1) \times (n-1)$ matrici A'_{22} nije proporcionalan prvom vektoru e'_1 kanonske baze u $\mathbb{R}^{n-1}$, onda postoji Hausholderova matrica T'_2 na $\mathbb{R}^{n-1}$ takva da je

$$T'_2 b' = ||b'|| e'_1,$$

[17] Pokazuje se da je $SO(2)$ grupa rotacija euklidske ravnine oko zadane točke, a $SO(3)$ grupa rotacija euklidskog prostora oko zadanog pravca (vidjeti Zadatak 10.10)

pa je

$$T_2T_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||b|| & a_{12}' \\ 0 & A_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||b|| & a_{12}' \\ 0 & T_2'A_{22}' \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix}.$$

Nastavljajući postupak vidimo da postoji niz $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ ortogonalnih $n \times n$ matrica takav da je

$$R = T_{n-1} \ldots T_2T_1A$$

gornja trokutasta matrica, pa tvrdnja vrijedi za $Q = (T_{n-1} \ldots T_2T_1)^{-1}$. □

Zadatak 9.6. *Neka je dana QR-faktorizacija regularne matrice $A = QR$. Uz koje su uvjete na R stupci matrice $Q = (f_1, \ldots, f_n)$ dobiveni Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije stupaca matrice $A = (a_1, \ldots, a_n)$?*

Zadatak 9.7. *Dokažite da se svaka ortogonalna $n\times n$ matrica može prikazati kao produkt refleksija. Što posebno vrijedi u slučaju $n = 2$ i $n = 3$?*

9.3. **Teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora.**

Lema 9.8. *Neka je U unitaran operator na V. Ako je W invarijantan za U, onda je i $W^\perp$ invarijantan za U. Nadalje, inducirani operator $U|_W : W \to W$ je unitaran operator na W.*

Dokaz. U je regularan operator, pa $\dim UW = dim W$ i $UW \subseteq W$ povlači $UW = W$. No onda $x \perp W$ i unitarnost od U povlači $Ux \perp UW = W$.

Inducirani operator je unitaran jer je $(Ux|Uy) = (x|y)$ za $x, y \in W$. □

Teorem 9.9. *Neka je U unitaran operator na kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od U. Svojstvene vrijednosti od U su kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti* 1.

Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $U(e)$ dijagonalna s elementima na dijagonali oblika $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora. Budući da je V kompleksan, postoji svojstveni vektor f takav da je $Uf = \lambda f$. No onda je

$$(f|f) = (Uf|Uf) = (\lambda f|\lambda f) = \lambda\bar{\lambda}(f|f) = |\lambda|^2(f|f),$$

pa $(f|f) \neq 0$ povlači $|\lambda|^2 = 1$. Stavimo

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad f_1 = f/||f|| \quad \text{i} \quad W = \langle f_1 \rangle^\perp.$$

Tada je $\dim W = \dim V - 1$ i inducirani operator $U|_W$ je unitaran, pa po pretpostavci indukcije za $U|_W$ postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora

$$U|_W f_j = Uf_j = \lambda_j f_j, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

□

9.4. **Hermitski operatori.** Neka je $H\colon V \to V$ linearan operator na realnom ili kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Očito je ekvivalentno:

(1) $H^* = H$.
(2) $(Hx \mid y) = (x \mid Hy)$ za sve $x, y \in V$.

Za operator H kažemo da je *hermitski operator* ako vrijedi jedna od ekvivalentnih tvrdnji (1)–(2).

Za $n \times n$ matricu H kažemo da je *hermitska matrica* ako je pripadni linearni operator $H\colon K^n \to K^n$ hermitski za kanonski skalarni produkt, tj. ako je $H^* = H$. Primijetimo da je dijagonalna matrica hermitska ako i samo ako je realna.

Realnu hermitsku matricu zovemo i *simetričnom matricom.* Primijetimo da u slučaju realne matrice A imamo $A^* = A^t$, pa je realna matrica A simetrična ako je

$$A^t = A.$$

Iz propozicije 8.7 slijedi da je A hermitski operator ako i samo ako je u nekoj/svakoj ortonormiranoj bazi e matrica $A(e) = (\alpha_{ij})$ hermitska, tj.

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}} \quad \text{za sve} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Zato iz teorema o dijagonalizaciji unitarnog operatora slijedi da za svaki unitaran operator U postoji hermitski operator H takav da je

$$U = e^{iH}.$$

Naime, postoji ortonormirana baza $(f_1, \dots, f_n)$ za koju je $Uf_j = e^{i\varphi_j} f_j$ za neke $\varphi_j \in \mathbb{R}$, a hermitski operator H je definiran s $Hf_j = \varphi_j f_j$. Iz niže dokazanog teorema 9.18 o dijagonalizaciji hermitskog operatora slijedit će i obrat, tj. da je za hermitski operator H operator $U = e^{iH}$ unitaran.

Primjer 9.10. *Za $t \in \mathbb{R}$ matrice*

$$t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

su hermitske 2×2 matrice, a pripadne unitarne matrice $U_t = e^{itH}$ su

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Uočite da je

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{itH} = iH.$$

Primjer 9.11. *Unitarna refleksija T_a je hermitski operator jer za $y, z \perp a$ i skalare λ, μ imamo*

$$\begin{aligned}
&(T_a(y + \lambda a)|z + \mu a) = (y - \lambda a|z + \mu a) \\
&= (y|z) - \lambda\overline{\mu}(a|a) \\
&= (y + \lambda a|z - \mu a) = (y + \lambda a|T_a(z + \mu a)).
\end{aligned}$$

Realni vektorski prostor hermitskih operatora Ako su A i B hermitski operatori i λ i μ realni brojevi, onda je

$$(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^* = \lambda A + \mu B.$$

Znači da je skup svih hermitskih operatora $\mathcal{H}(V)$ na unitarnom prostoru V realni vektorski prostor. Izračunajte $\dim \mathcal{H}(V)$ kad je V realan i kad je V kompleksan.

Primjer 9.12. *Na 4-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru kompleksnih 2×2 hermitskih matrica*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}^2) = \left\{ H = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

imamo kvadratnu formu[18] *(tj. funkciju)*

$$Q(H) = \det H = \det \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ kompleksnih 2×2 matrica determinante 1 djeluje[19] *na vektorskom prostoru $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ linearnim transformacijama*

$$H \mapsto g.H = gHg^*, \qquad H \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2), \quad g \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{9.13}$$

Iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi da za svaki $g \in SL(2, \mathbb{C})$ linearno preslikavanje (9.13) čuva kvadratnu formu Q jer je

$$Q(g.H) = \det(gHg^*) = \det g \det H \det g^* = \det H = Q(H).$$

Zadatak 9.14. *Na realnom 3-dimenzionalnom vektorskom prostoru kompleksnih 2×2 hermitskih matrica traga nula*

$$\mathbb{V} = \left\{ H = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

imamo skalarni produkt $(H_1|H_2) = -tr(H_1 H_2)$. Za element g grupe $SU(2)$ imamo linearno preslikavanje

$$R_g \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \quad H \mapsto g.H = gHg^*.$$

Dokažite da je $R_g \in SO(\mathbb{V})$. (Uputa: koristite zadatak 9.4 i neprekidnu familiju elemenata u $SU(2)$ oblika $g_t = e^{tK}$, $0 \leq t \leq 1$.)

---

[18] Vektorski prostor $\mathbb{R}^4$ s kvadratnom formom $Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ zovemo *prostorom Minkowskog*, a linearne operatore koji čuvaju tu formu zovemo *Lorentzovim transformacijama.*

[19] Kažemo da grupa G djeluje na skupu S ako imamo zadano preslikavanje

$$G \times S \to S, \qquad (g, s) \mapsto g.s$$

takvo da je $g.(h.s) = (gh).s$ za sve $g, h \in G$ i $s \in S$, te $e.s = s$ za jedinicu e grupe G i sve $s \in S$.

Hermitski operatori i hermitske forme. Podsjetimo se propozicije 8.8: Neka je V unitaran prostor. Tada je preslikavanje koje operatoru $A \in L(V)$ pridružuje seskvilinearnu formu

$$V \times V \to K, \quad (v, w) \mapsto (Av|w) = (v|A^*w)$$

bijekcija između $L(V)$ i skupa svih seskvilinearnih formi $V \times V \to K$. Za hermitske forme

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}, \quad \forall x, y \in V$$

(vidi točku 7.2) imamo:

Propozicija 9.15. *Preslikavanje koje hermitskom operatoru $A \in L(V)$ pridružuje hermitsku formu*

$$V \times V \to K, \quad (v, w) \mapsto (Av|w) = (v|Aw) = \overline{(Aw|v)}$$

bijekcija je između $\mathcal{H}(V)$ i skupa svih hermitskih formi na V.

Antihermitski operatori i antihermitske forme. Za linearan operator na unitarnom prostoru V kažemo da je antihermitski ako je

$$A^* = -A,$$

ili ekvivalentno, ako je

$$(Ax \mid y) = -(x \mid Ay), \quad \forall x, y \in V.$$

Očito je skup $\mathcal{A}(V)$ svih antihermitskih operatora realan vektorski prostor. U slučaju kompleksnog prostora za hermitski operator H imamo antihermitski operator iH jer

$$(iH)^* = \bar{i}H^* = -iH,$$

a $\mathbb{R}$-linearno preslikavanje

$$\mathcal{H}(V) \to \mathcal{A}(V), \qquad H \mapsto iH$$

je izomorfizam realnih vektorskih prostora.

Općenito svaki linearni operator A možemo na jedinstveni način zapisati kao sumu hermitskog i antihermitskog operatora

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}.$$

Ti operatori međusobno komutiraju ako i samo ako A i A^* međusobno komutiraju.

Za antihermitske forme (vidi točku 7.2) imamo:

Propozicija 9.16. *Preslikavanje koje antihermitskom operatoru $A \in L(V)$ pridružuje antihermitsku formu*

$$V \times V \to K, \quad (v, w) \mapsto (Av|w) = -(v|Aw) = -\overline{(Aw|v)}$$

bijekcija je između $\mathcal{A}(V)$ i skupa svih antihermitskih formi na V.

9.5. **Teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora.**

Lema 9.17. *Neka je H hermitski operator na V. Ako je W invarijantan za H, onda je i $W^\perp$ invarijantan za H. Nadalje, inducirani operator $H|_W\colon W \to W$ je hermitski operator na W.*

Dokaz. Iz $(x|w) = 0$ za svaki $w \in W$ slijedi

$$(Hx|w) = (x|Hw) = 0$$

jer je $Hw \in W$. Znači da je $W^\perp$ invarijantan za H.

Inducirani operator je hermitski jer je $(Hx|y) = (x|Hy)$ za $x, y \in W$. □

Spektar hermitske matrice je neprazan i realan Neka je A hermitska matrica. Tada je $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ hermitski operator i $Af = \lambda f$, $f \neq 0$ povlači

$$\lambda(f|f) = (\lambda f|f) = (Af|f) = (f|Af) = (f|\lambda f) = \overline{\lambda}(f|f),$$

pa kraćenjem s $(f|f) \neq 0$ dobivamo

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

To znači da su za hermitsku matricu A sve nultočke svojstvenog polinoma

$$k_A(x) = \det(xI - A)$$

realne. No to onda vrijedi i za realnu hermitsku matricu A koju možemo gledati i kao hermitski operator na realnom prostoru

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Znači da za svaku nultočku λ svojstvenog polinoma operator $\lambda I - A$ nije injekcija i da postoji svojstveni vektor $f \in \mathbb{R}^n$, $f \neq 0$, tako da je

$$Af = \lambda f.$$

Teorem 9.18. *Neka je H hermitski operator na kompleksnom ili realnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od H.*

Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $H(e)$ dijagonalna.

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora. Kao što smo vidjeli, spektar od H je neprazan i realan i za svojstvenu vrijednost λ postoji svojstveni vektor f takav da je $Hf = \lambda f$. Stavimo

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad f_1 = f/||f|| \quad \text{i} \quad W = \langle f_1 \rangle^\perp.$$

Tada je $\dim W = \dim V - 1$ i inducirani operator $H|_W$ je hermitski, pa po pretpostavci indukcije za $H|_W$ postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora

$$H|_W f_j = Hf_j = \lambda_j f_j, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

□

Neka je $B(x,y)$ hermitska forma na V. Prema propoziciji 9.15 postoji jedinstveni hermitski operator A takav da je

$$B(x,y) = (Ax \mid y).$$

Prema teoremu 9.18 postoji ortonormirana baza $f = (f_1, \dots, f_n)$ takva da je $Af_j = \lambda_j f_j$ za sve $j = 1, \dots, n$. Odavle slijedi *teorem o dijagonalizaciji hermitske forme*:

Teorem 9.19. *Neka je $B(x,y)$ hermitska forma na kompleksnom ili realnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza $(f_1, \dots, f_n)$ od V i realni brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tako da je*

$$B(\xi_1 f_1 + \cdots + \xi_n f_n,\, \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n) = \lambda_1 \xi_1 \overline{\eta_1} + \cdots + \lambda_n \xi_n \overline{\eta_n}$$

9.6. **Pozitivni i strogo pozitivni hermitski operatori.** Za hermitski operator A kažemo da je *pozitivan*, pišemo $A \geq 0$, ako je pripadna hermitska forma $B(x,y) = (Ax|y)$ pozitivna, tj. ako je

$$(Ax|x) \geq 0, \quad \forall x \in V.$$

Za hermitski operator A kažemo da je *strogo pozitivan*, pišemo $A > 0$, ako je pripadna hermitska forma $B(x,y) = (Ax|y)$ strogo pozitivna, tj. ako je

$$\begin{cases} (Ax|x) \geq 0, \quad \forall x \in V, \\ (Ax|x) = 0 \implies x = 0. \end{cases}$$

Za hermitsku matricu kažemo da je (strogo) pozitivna ako je pripadni hermitski operator na K^n (strogo) pozitivan.

Lema 9.20. *Neka je A hermitski operator na unitarnom prostoru V i $\sigma_A \subseteq \mathbb{R}$ spektar od A.*

(1) *A je pozitivan ako i samo ako je $\lambda \geq 0$ za sve $\lambda \in \sigma(A)$.*
(2) *A je strogo pozitivan ako i samo ako je $\lambda > 0$ za sve $\lambda \in \sigma(A)$.*

Dokaz. Neka je $(f_1, \dots, f_n)$ ortonormirana baza od V takva da je $Af_j = \lambda_j f_j$ za sve $j = 1, \dots, n$. Tada za

$$x = \xi_1 f_1 + \cdots + \xi_n f_n$$

imamo

$$(Ax|x) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \cdots + \lambda_n |\xi_n|^2.$$

Ako je $A \geq 0$ (odnosno $A > 0$), onda za $x = f_j$ imamo $\lambda_j = (Af_j|f_j) \geq 0$ (odnosno $\lambda_j > 0$).

Obratno, ako je $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, onda je očito $(Ax|x) \geq 0$. Ako imamo stroge nejednakosti $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, onda je za $x \neq 0$ neki $|\xi_j|^2 > 0$ i vrijedi stroga nejednakost $(Ax|x) > 0$. □

Uz oznake iz gornjeg dokaza $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Zato imamo:

Korolar 9.21. *Neka je $B(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \overline{\eta_i}$, strogo pozitivna hermitska forma zadana hermitskom matricom $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Tada je*

$$\det(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} > 0.$$

Lema 9.22. *Neka je $A \in L(V)$. Tada je A^*A pozitivan operator. Ako je A regularan, onda je A^*A strogo pozitivan.*

Dokaz. Operator A^*A je hermitski operator jer je

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

i pozitivan operator jer je

$$(A^*Ax|x) = (Ax|Ax) = ||Ax||^2 \geq 0.$$

Ako je A regularan, onda je $Ax \neq 0$ za $x \neq 0$ i $||Ax||^2 > 0$, pa je A^*A strogo pozitivan. □

Lema 9.20 karakterizira strogo pozitivne operatore u terminima spektra. No nije potrebno poznavati spektar da bi se utvrdila stroga pozitivnost operatora:

Teorem 9.23. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ hermitska $n \times n$ matrica. Ekvivalentno je*

(1) *A je strogo pozitivna.*

(2) $\alpha_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det A > 0.$

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Neka je $B(x,y) = (Ax|y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\eta_i}$ strogo pozitivna hermitska forma. Tada je strogo pozitivna i restrikcija te forme na linearnu ljusku $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ za svako $1 \leq k \leq n$, tj. strogo pozitivna je i hermitska forma oblika

$$B_k(x,y) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\eta_i}.$$

No onda iz korolara 9.21 slijedi

$$\det(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,k} > 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) U sljedećem teoremu dokazujemo da postoji faktorizacija $A = R^*R$, pa tvrdnja slijedi iz leme 9.22. □

Teorem 9.24. *Neka je $A = (\alpha_{ij})$ hermitska $n \times n$ matrica i neka je*

$$\alpha_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det A > 0.$$

Tada postoji gornja trokutasta matrica R takva da je

$$A = R^*R.$$

Dokaz. U koracima dokazujemo da postoji faktorizacija

$$A_k = R_k^* R_k, \qquad A_k = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$$

za svaki $1 \leq k \leq n$. Za $k = 1$ imamo $A_1 = \alpha_{11} > 0$ pa za $R_1 = \sqrt{\alpha_{11}}$ vrijedi

$$A_1 = R_1^* R_1.$$

Pretpostavimo da smo dokazali faktorizaciju

$$A_{k-1} = R_{k-1}^* R_{k-1},$$

a tražimo faktorizaciju oblika
(9.25)

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & a_{k-1} \\ a^*_{k-1} & \alpha_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^*_{k-1} & 0 \\ x^* & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{k-1} & x \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad a_{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1,k} \end{pmatrix},$$

pri čemu u $k \times k$ matrici

$$R_k = \begin{pmatrix} R_{k-1} & x \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

trebamo odrediti vektor $x \in K^{k-1}$ i skalar $\xi \in K$ tako da vrijedi faktorizacija (9.25). Množenjem blok-matrica dobivamo

$$R^*_k R_k = \begin{pmatrix} R^*_{k-1} & 0 \\ x^* & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{k-1} & x \\ 0 & \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^*_{k-1} R_{k-1} & R^*_{k-1} x \\ x^* R_{k-1} & x^* x + |\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

Po pretpostavci faktorizacija $A_{k-1} = R^*_{k-1} R_{k-1}$ postoji, a pretpostavka $\det A_{k-1} > 0$ povlači da je matrica R_{k-1} regularna. Zbog toga postoji jedinstveni vektor x takav da je

$$R^*_{k-1} x = a_{k-1}, \qquad x^* R_{k-1} = a^*_{k-1}$$

i preostaje vidjeti da postoji kompleksan broj ξ takav da je

$$x^* x + |\xi|^2 = \alpha_{kk}, \quad \text{odnosno} \quad |\xi| = \sqrt{\alpha_{kk} - x^* x}. \tag{9.26}$$

Zato primijetimo da postoji faktorizacija oblika

$$A_k = \begin{pmatrix} R^*_{k-1} & 0 \\ x^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{k-1} & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^*_{k-1} R_{k-1} & R^*_{k-1} x \\ x^* R_{k-1} & x^* x + \beta \end{pmatrix}$$

za $x^* x + \beta = \alpha_{kk}$. Tada je zbog Binet-Cauchyjevog teorema

$$\det A_k = \det R^*_{k-1} \det R_{k-1} \cdot \beta = |\det R_{k-1}|^2 \cdot \beta,$$

pa iz pretpostavke $\det A_k > 0$ slijedi

$$\beta = \alpha_{kk} - x^* x > 0.$$

Znači da postoji ξ takav da vrijedi (9.26). Štoviše, za dijagonalni element $\xi = \rho_{kk}$ u matrici R_k možemo izabrati pozitivan broj

$$\xi = \rho_{kk} = \sqrt{\frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}}.$$

□

Metoda drugog korijena. Za strogo pozitivnu matricu A sustav jednadžbi $Ax = b$ možemo rješavati koristeći faktorizaciju $A = R^* R$ tako da uzastopno rješavamo dva trokutasta sustava

$$R^* y = b \quad \text{i} \quad Rx = y.$$

Takva metoda rješavanja sustava $Ax = b$, uključujući i konstruktivni postupak faktorizacije opisan u gornjem dokazu, zove se *metoda drugog korijena*.

Dijagonalizacija strogo pozitivne kvadratne forme. Neka je $A = (\alpha_{ij})$ strogo pozitivna matrica i

$$Q(x) = (Ax|x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi_i}$$

pripadna kvadratna forma. Tada faktorizacija $A = R^*R$ za gornju trokutastu matricu $R = (\rho_{ij})$ daje formulu za kvadratnu formu kao sumu kvadrata linearnih funkcija

$$Q(x) = (R^*Rx|x) = ||Rx||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\rho_{ii}\xi_i + \cdots + \rho_{in}\xi_n|^2 .$$

Teorem 9.27. *Neka je A pozitivan operator. Tada postoji jedinstveni pozitivni operator B takav da je*

$$B^2 = A.$$

Taj operator zovemo drugim korijenom iz A i pišemo $B = \sqrt{A}$.

Dokaz. Neka je $f_1, \dots, f_n$ ortonormirana baza od V u kojoj se A dijagonalizira. Tada svi svojstveni vektori te baze za danu svojstvenu vrijednost λ razapinju svojstveni potprostor

$$\ker(A - \lambda I).$$

Znači da imamo rastav na ortogonalnu sumu svojstvenih potprostora

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

i odgovarajući rastav na inducirane operatore

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s I_s.$$

Budući da je $\lambda_j \geq 0$ za sve $j = 1, \dots, s$, stavimo

$$B = \sqrt{\lambda_1} I_1 \oplus \cdots \oplus \sqrt{\lambda_s} I_s.$$

Tada je B hermitski operator jer se dijagonalizira u ortonormiranoj bazi $f_1, \dots, f_n$ s realnim spektrom i vrijedi

$$B^2 = A$$

jer za svojstveni vektor f iz te baze za svojstvenu vrijednost λ imamo

$$B^2 f = (\sqrt{\lambda})^2 f = \lambda f = Af.$$

Preostaje dokazati jedinstvenost. Neka je C pozitivan operator takav da je $C^2 = A$. Tada C komutira s A i svojstveni potprostori od A su invarijantni za C. Inducirani operator

$$C_j = C|_{V_j} : V_j \to V_j$$

je hermitski operator pa postoji ortonormirana baza $g_1, \dots, g_r$ u kojoj se C_j dijagonalizira,

$$C_j g_k = \mu_k g_k,$$

pri čemu je $\mu_k \geq 0$ jer je C_j pozitivan. Iz uvjeta

$$\mu_k^2 g_k = C_j^2 g_k = C^2 g_k = A g_k = \lambda_j g_k$$

slijedi $\mu_k^2 = \lambda_j$ i $\mu_k = \sqrt{\lambda_j}$ za sve k, pa je

$$C_j = \mu_j I_j = \sqrt{\lambda_j} I_j = B_j.$$

Budući da to vrijedi za sve svojstvene potprostore V_j, slijedi $C = B$. □

Lema 9.28. *Neka je $A \in L(V)$ i $H = \sqrt{A^*A}$. Tada je*

$$||Ax|| = ||Hx|| \tag{9.29}$$

i $\ker A = \ker H$.

Dokaz. Po pretpostavci je $A^*A = H^2$, pa je

$$||Ax||^2 = (Ax|Ax) = (A^*Ax|x) = (H^2x|x) = (Hx|Hx) = ||Hx||^2.$$

Budući da je $Ax = 0$ ako i samo ako je $||Ax|| = 0$, iz dokazane jednakosti (9.29) slijedi $\ker A = \ker H$. □

Teorem 9.30 (Polarna forma operatora)**.** *Neka je $A \in L(V)$. Tada postoje unitarni operator U i pozitivni operator H tako da je*

$$A = UH.$$

Operator H je jedinstven i $H = \sqrt{A^*A}$, a U je jedinstven ako je A regularan.

Dokaz. Neka je A regularan i $H = \sqrt{A^*A}$. Tada je $\ker A = \ker H = 0$ i $\operatorname{im} A = \operatorname{im} H = V$. Definiramo preslikavanje

$$U\colon V \to V, \qquad U\colon Hx \mapsto Ax, \quad x \in V.$$

To je preslikavanje dobro definirano jer $Hx = Hx'$ povlači $x = x'$ i $Ax = Ax'$. Lako je provjeriti da je U linearno preslikavanje, pa je U zbog (9.29) unitaran operator. Znači da je $UHx = Ax$ za sve $x \in V$ i prva tvrdnja teorema je dokazana za regularan operator A.

Ako A nije regularan, onda je $kerH = kerA$ za $H = \sqrt{A^*A}$ i imamo dva rastava prostora V na ortogonalnu sumu

$$V = \operatorname{im} H \oplus \ker H, \qquad V = \operatorname{im} A \oplus (\operatorname{im} A)^\perp.$$

Zbog teorema o rangu i defektu imamo $\dim \operatorname{im} H = \dim \operatorname{im} A$ i, kao prije, imamo dobro definirano preslikavanje

$$U_1\colon \operatorname{im} H \to \operatorname{im} A, \qquad U_1\colon Hx \mapsto Ax$$

jer $Hx = Hx'$ povlači $x - x' \in kerH = kerA$ i $Ax = Ax'$. Po konstrukciji je

$$U_1 Hx = Ax.$$

Lako je provjeriti da je U_1 linearno preslikavanje koje zbog (9.29) čuva normu. Ako je U_2 linearno preslikavanje na ortogonalnim komplementima

$$U_2\colon (\operatorname{im} H)^\perp \to (\operatorname{im} A)^\perp$$

koje čuva normu, ili ortonormiranu bazu jednog preslikava u neku ortonormiranu bazu od drugog, onda je operator $U = U_1 + U_2$ unitaran. Za

$$x \in (\operatorname{im} H)^\perp = \ker H = \ker A$$

imamo $Hx = Ax = 0$, pa onda za $U = U_1 + U_2$ imamo $UH = A$.

Ako je $A = UH$, onda je $A^* = HU^*$ i $A^*A = H^2$. Ako je A regularan, onda je i H regularan i $U = AH^{-1}$ je jedinstven. $\square$

10. Normalni operatori

10.1. **Projektori.** Neka je $V = V_1 \dot{+} V_2$ rastav prostora V na direktnu sumu potprostora V_1 i V_2. Znači da za svaki vektor $v \in V$ imamo jedinstveni rastav

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Preslikavanje

$$P_1 \colon V \to V, \quad P_1(v) = P_1(v_1 + v_2) = v_1$$

zovemo *projekcijom na potprostor* V_1 *duž potprostora* V_2. Projekcija je linearno preslikavanje jer za $v_1, w_1 \in V_1$ i $v_2, w_2 \in V_2$ i skalare λ, μ imamo

$$\begin{aligned} P_1(\lambda(v_1 + v_2) + \mu(w_1 + w_2)) &= P_1((\lambda v_1 + \mu w_1) + (\lambda v_2 + \mu w_2)) \\ &= \lambda v_1 + \mu w_1 \\ &= \lambda P_1(v_1 + v_2) + \mu P_1(w_1 + w_2). \end{aligned}$$

Uočimo da je $P_1^2(v_1 + v_2) = P_1(v_1) = v_1 = P_1(v_1 + v_2)$, odnosno

$$P_1^2 = P_1.$$

Za linearan operator $P \colon V \to V$ kažemo da je *projektor* ako je *idempotentan*, tj. ako je

$$P^2 = P.$$

Kao što smo vidjeli, projekcija je projektor. Vrijedi i obratno. Naime, $P^2 - P = 0$ povlači da minimalni polinom $\mu_P(X)$ dijeli polinom $X(X-1)$. Pretpostavimo da je

$$\mu_P(X) = X(X-1).$$

Tada je spektar operatora $\sigma_P = \{1, 0\}$ i imamo rastav prostora V na svojstvene potprostore

$$V = V_1 \dot{+} V_2, \qquad V_1 = \ker(P - I) \neq 0, \quad V_2 = \ker P \neq 0$$

i

$$Pv = Pv_1 + Pv_2 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = v_1 \quad \text{za} \quad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Znači da je projektor P *projekcija na potprostor* $\operatorname{im} P$ *duž potprostora* $\ker P$.

Ako je $\mu_P(X) = X$, onda je $P = 0$ i nul-operator možemo shvatiti kao projekciju za rastav $V = 0 \dot{+} V$, tj. projekciju na potprostor 0 duž potprostora V. Ako je $\mu_P(X) = X - 1$, onda je $P = I$ i jedinični operator možemo shvatiti kao projekciju za rastav $V = V \dot{+} 0$, tj. projekciju na potprostor V duž potprostora 0.

Dekompozicija jedinice. Ako je

$$V = V_1 \dot{+} V_2$$

i P_1 kao gore, a P_2 projekcija na potprostor V_2 duž potprostora V_1, onda očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + P_2, \qquad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

kojeg zovemo dekompozicijom jedinice. Općenito za rastav prostora na direktnu sumu potprostora

$$V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_i \dotplus \ldots \dotplus V_s$$

za svaki $i = 1, \ldots, s$ možemo definirati projektor

$$P_i \colon V \to V, \quad P_i v = P_i(v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_s) = v_i.$$

Očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \qquad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

kojeg zovemo *dekompozicijom jedinice*. Obratno, svaka dekompozicija jedinice daje rastav prostora

$$V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_s, \quad V_i = \operatorname{im} P_i, \qquad v = Iv = P_1 v + \cdots + P_s v.$$

Da je suma potprostora $V_i = \operatorname{im} P_i$ direktna slijedi primjenom relacija $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$: svaki $v_i \in V_i$ je oblika $v_i = P_i v = P_i P_i v = P_i v_i$ jer je $P_i^2 = P_i$, pa primjenom operatora P_i na vektor

$$0 = v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_s = P_1 v_1 + \cdots + P_i v_i + \cdots + P_s v_s$$

iz $P_i P_j = 0$ za $i \neq j$ dobivamo

$$0 = P_i P_1 v_1 + \cdots + P_i P_i v_i + \cdots + P_i P_s v_s = P_i^2 v_i = v_i.$$

Dekompozicija jedinice i poluprosti operatori. Po definiciji je operator S poluprost ako se dijagonalizira u nekoj bazi, ili ekvivalentno, ako je V direktna suma svojstvenih potprostora od S. To možemo reći i u terminima dekompozicije jedinice: Operator S je poluprost ako postoji dekompozicija jedinice

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \qquad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

i skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tako da je

$$S = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s.$$

10.2. **Hermitski projektori.** Neka je $V = V_1 \oplus V_2$ rastav prostora V na ortogonalnu sumu potprostora V_1 i V_2, $V_1 \perp V_2$. Tada projekciju P_1 na V_1 duž V_2 zovemo *ortogonalnom projekcijom*. *Ortogonalna projekcija je hermitski operator* jer za $v_1, w_1 \in V_1$ i $v_2, w_2 \in V_2$ imamo

$$(P_1(v_1 + v_2) | w_1 + w_2) = (v_1 | w_1 + w_2) = (v_1 | w_1) = \cdots = (v_1 + v_2 | P_1(w_1 + w_2)),$$

tj.

$$P_1^* = P_1.$$

Obratno, ako je P hermitski projektor, tj.

$$P^2 = P, \quad P^* = P,$$

onda zbog teorema o dijagonalizaciji hermitskog operatora imamo ortogonalnu sumu potprostora

$$V = V_1 \oplus V_2, \qquad V_1 = \ker(P - I), \quad V_2 = \ker P.$$

Znači da je hermitski projektor P ortogonalna projekcija na potprostor $\operatorname{im} P$ *duž potprostora* $\ker P$.

Ortogonalna dekompozicija jedinice. Ako je

$$V = V_1 \oplus V_2$$

i P_1 kao gore, a P_2 ortogonalna projekcija na potprostor V_2 duž potprostora V_1, onda očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + P_2, \qquad P_i^* = P_i, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

kojeg zovemo ortogonalnom dekompozicijom jedinice. Općenito za rastav prostora na ortogonalnu sumu potprostora

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_i \oplus \cdots \oplus V_s$$

za svaki $i = 1, \ldots, s$ možemo definirati ortogonalnu projekciju

$$P_i \colon V \to V, \quad P_i v = P_i(v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_s) = v_i.$$

Očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \qquad P_i^* = P_i, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

kojeg zovemo *ortogonalnom dekompozicijom jedinice*. Obratno, svaka ortogonalna dekompozicija jedinice daje rastav prostora

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s, \quad V_i = \operatorname{im} P_i, \qquad v = Iv = P_1 v + \cdots + P_s v.$$

Da je suma potprostora $V_i = \operatorname{im} P_i$ ortogonalna slijedi primjenom relacija $P_i^* = P_i$ i $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$: svaki $v_i \in V_i$ je oblika $v_i = P_i v = P_i P_i v = P_i v_i$ jer je $P_i^2 = P_i$, pa za $i \neq j$ imamo

$$(v_i | v_j) = (P_i v_i | P_j v_j) = (v_i | P_i^* P_j v_j) = (v_i | P_i P_j v_j) = (v_i | 0 v_j) = 0.$$

Ortogonalna dekompozicija jedinice i hermitski operatori. Teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora možemo izreći i u terminima ortogonalne dekompozicije jedinice: Za hermitski operator H postoji ortogonalna dekompozicija jedinice

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \qquad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

i realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tako da je

$$H = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s.$$

10.3. **Normalni operatori.** Za operator A na unitarnom prostoru kažemo da je *normalan* ako komutira sa svojim hermitski adjungiranim, tj.

$$AA^* = A^*A.$$

Primijetimo da su unitarni, hermitski i antihermitski operatori normalni.

Ako je A normalan, onda je i svaki polinom $P(A)$ normalan jer sve potencije od A komutiraju sa svakom potencijom od A^*.

Propozicija 10.1. *Linearan operator $A \in L(V)$ je normalan ako i samo ako je*

$$||Ax|| = ||A^*x|| \quad \textit{za svaki} \quad x \in V.$$

Dokaz. Iz $A^*A = AA^*$ slijedi

$$||Ax||^2 = (Ax|Ax) = (A^*Ax|x) = (AA^*x|x) = (A^*x|A^*x) = ||A^*x||^2.$$

Obratno, iz $||Ax|| = ||A^*x||$ slijedi

$$||Ax||^2 - ||A^*x||^2 = (A^*Ax|x) - (AA^*x|x) = ((A^*A - AA^*)x|x) = 0.$$

Operator $H = A^*A - AA^*$ je hermitski i relacija $Hf = \lambda f$ za svojstveni vektor $f \neq 0$ daje

$$0 = ((A^*A - AA^*)f|f) = \lambda(f|f),$$

a to povlači $\lambda = 0$. Znači da su sve svojstvene vrijednosti od $A^*A - AA^*$ jednake nuli pa iz teorema o dijagonalizaciji hermitskog operatora slijedi

$$A^*A - AA^* = 0.$$

□

Gornja karakterizacija normalnog operatora povlači

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad A^*v = \overline{\lambda}v \tag{10.2}$$

jer je $||(A - \lambda I)v|| = 0$ ako i samo ako je $||(A - \lambda I)^*v|| = ||(A^* - \overline{\lambda}I)v|| = 0$.

Teorem 10.3. *Neka je $A \in L(V)$. Tada je*

$$V = \ker A \oplus im\, A^*.$$

Ako je A normalan operator, onda je $\ker A = \ker A^*$, $im\, A = im\, A^*$ *i*

$$V = \ker A \oplus im\, A.$$

Dokaz. Prvi dio teorema slijedi iz teorema 7.24 o projekciji i

$$x \in (\mathrm{im}\, A^*)^\perp \Leftrightarrow (x|A^*y) = 0\ \forall y \Leftrightarrow (Ax|y) = 0\ \forall y \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker A,$$

tj. $\ker A = (\mathrm{im}\, A^*)^\perp$. Za normalan operator A jednakost $\ker A = \ker A^*$ slijedi iz propozicije 10.1 jer je

$$x \in \ker A \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow ||Ax|| = 0 = ||A^*x|| \Leftrightarrow A^*x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker A^*.$$

To povlači $\mathrm{im}\, A^* = (\ker A)^\perp = (\ker A^*)^\perp = \mathrm{im}\, A^{**} = \mathrm{im}\, A$. □

Lema 10.4. *Neka je A normalan operator i W invarijantan potprostor za A i A^*. Označimo s $A|_W$ i $A^*|_W$ inducirane operatore. Tada je na unitarnom prostoru W*

$$(A|_W)^* = A^*|_W$$

i $A|_W$ je normalan operator na W.

Dokaz. Iz relacije $(Ax|y) = (x|A^*y)$ za sve vektore iz $x, y \in V$ slijedi relacija za sve vektore $x, y \in W$

$$((A|_W x)|y) = (x|(A^*|_W y)),$$

pa zbog jedinstvenosti adjungiranog operatora slijedi prva tvrdnja. Da je inducirani operator normalan slijedi iz

$$(A|_W)^* A|_W = A^*|_W A|_W = A^*A|_W = AA^*|_W = A|_W A^*|_W = A|_W (A|_W)^* .$$

□

Teorem 10.5. *Neka je A normalan operator na kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od A. Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $A(e)$ dijagonalna matrica.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora. Budući da je V kompleksan, postoji svojstvena vrijednost λ i pripadni svojstveni potprostor

$$\ker(A - \lambda I) \neq 0.$$

Prema teoremu 10.3 imamo rastav

$$V = \ker(A - \lambda I) \oplus \mathrm{im}\,(A - \lambda I)$$

na invarijantne potprostore od A na kojima je inducirani operator normalan. Ako nije $A = \lambda I$, odnosno $V = \ker(A - \lambda I)$, onda je $0 < \dim \mathrm{im}\,(A - \lambda I) < \dim V$ i tvrdnja slijedi zbog pretpostavke indukcije. □

Ortogonalna dekompozicija jedinice i normalni operatori. Teorem o dijagonalizaciji normalnog operatora možemo izreći i u terminima ortogonalne dekompozicije jedinice: Za normalni operator A postoji ortogonalna dekompozicija jedinice

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \qquad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \dots, s\}$$

i kompleksni brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tako da je

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_s P_s.$$

Polarna forma normalnog operatora. Ako je A normalan operator, onda postoji ortonormirana baza u kojoj A ima dijagonalnu matricu s dijagonalnim elementima

$$\lambda_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \dots, \quad \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

pri čemu za kompleksni broj λ_k koristimo polarni (trigonometrijski) zapis $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $r_k = |\lambda_k| \geq 0$. Operator H koji u toj ortonormiranoj bazi ima dijagonalne elemente $r_1, \ldots, r_n$ je pozitivan, operator U koji u toj ortonormiranoj bazi ima dijagonalne elemente $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}$ je unitaran i vrijedi

$$A = UH = HU,$$

tj.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}.$$

Hermitski i antihermitski dio normalnog operatora. Već smo rekli da svaki linearni operator A možemo na jedinstveni način zapisati kao sumu hermitskog i antihermitskog operatora

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}.$$

Ako je A normalan operator, onda postoji ortonormirana baza u kojoj A ima dijagonalnu matricu s dijagonalnim elementima

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

pri čemu su α_k i β_k realan i imaginaran dio kompleksnog broja λ_k. U toj ortonormiranoj bazi imamo rastav matrice od A na hermitski i antihermitski dio

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

10.4. **Normalni operatori na realnim prostorima.** Stavimo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je $J^2 = -I$ i kompleksne brojeve možemo identificirati s realnim 2×2 matricama oblika

$$\alpha + i\beta \longleftrightarrow \alpha I + \beta J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da svojstveni polinom linearnog operatora na realnom vektorskom prostoru ima realne koeficijente. Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nultočka polinoma s realnim koeficijentima $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$,

$$\gamma_n \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0 = 0,$$

onda je i $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ nultočka tog polinoma

$$\gamma_n \overline{\lambda}^n + \gamma_{n-1} \overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + \gamma_1 \overline{\lambda} + \gamma_0 = 0.$$

Štoviše, nultočke λ i $\overline{\lambda}$ imaju iste kratnosti.

Teorem 10.6. *Neka je A normalan operator na realnom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza f takva da je matrica $A(f)$ operatora A blok dijagonalna matrica oblika*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_r & \beta_r \\ & & & & & & -\beta_r & \alpha_r \end{pmatrix}, \qquad s+2r=n,$$

pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sve realne svojstvene vrijednosti operatora A brojane s njihovim kratnostima u svojstvenom polinomu, a $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$ svi konjugirani parovi kompleksnih nultočaka svojstvenog polinoma s imaginarnim dijelom različitim od nule, brojane s njihovim kratnostima u svojstvenom polinomu.

Dokaz. Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza u V. Tada je koordinatizacija

$$V \to \mathbb{R}^n, \quad x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \mapsto x(e) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

izomorfizam unitarnih prostora jer je

$$(x|y)_V = (\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n | \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n)_V = \xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n = (x(e)|y(e))_{\mathbb{R}^n}.$$

Zato smijemo pretpostaviti da je $V = \mathbb{R}^n$ i da je preslikavanje $A \in L(V)$ zadano realnom matricom $A = A(e)$ koja je normalna, tj.

$$A^t A = A A^t.$$

Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora V. Ako je $v \neq 0$ svojstveni vektor za realnu svojstvenu vrijednost λ, onda zbog (10.2) imamo

$$Av = \lambda v \quad \text{i} \quad A^t v = \lambda v$$

i linearna ljuska $\langle v \rangle$ je invarijantna za A i A^t. No tada je $(n-1)$-dimenzionalni potprostor $W = \langle v \rangle^\perp$ invarijantan za[20] A^t i A i prema lemi 10.4 je inducirani operator $A|_W$ normalan, pa tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije. Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, kompleksna nultočka svojstvenog polinoma, onda u realnom prostoru nemamo svojstveni vektor i ideja dokaza je da "kompleksificiramo" prostor: Kao što je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, shvatimo

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$$

[20]Naime, ortogonalni komplement $W = U^\perp$ je invarijantan za B^* ako je potprostor U invarijantan za operator B jer za svaki $u \in U$ i $w \in W$ imamo $Bu \in U$ i $(B^*w|u) = (w|Bu) = 0$.

i (realnu) matricu A kao matricu linearnog operatora na kompleksnom prostoru

$$A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

Operator A je normalan operator na unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$. Ako je

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$$

kompleksna svojstvena vrijednost operatora A na kompleksnom prostoru $\mathbb{C}^n$, onda postoji svojstveni vektor $v \in \mathbb{C}^n$ za tu svojstvenu vrijednost. Zbog (10.2) imamo

$$Av = \lambda v \quad \text{i} \quad A^t v = \overline{\lambda} v. \tag{10.7}$$

Ako svaku kompleksnu koordinatu vektora v rastavimo na realni i kompleksni dio, dobivamo rastav

$$v = x + iy \in \mathbb{C}^n, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Stavimo $\overline{v} = x - iy$. Tada kompleksnim konjugiranjem iz relacije $Av = \lambda v$ dobivamo

$$A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Budući da je po pretpostavci $\overline{\lambda} \neq \lambda$, svojstveni vektori $\overline{v}$ i v pripadaju različitim svojstvenim potprostorima koji su za normalni operator ortogonalni. Znači da je $\overline{v} \perp v$, a to povlači

$$0 = (\overline{v}|v) = (x - iy|x + iy) = (x|x) - i(x|y) - i(y|x) - (y|y).$$

Budući da su vektori x, y realni, tj. $x, y \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, to je $(x|y) = (y|x)$ i (izjednačavanjem s nulom realnog i imaginarnog dijela)

$$||x||^2 - ||y||^2 = 0, \qquad (x|y) = 0.$$

Smijemo pretpostaviti da smo svojstveni vektor v izabrali tako da je $||x||^2 = ||y||^2 = 1$. Tada je (x, y) ortonormirana baza 2-dimenzionalnog potprostora

$$U = \langle x, y \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Budući da je A realna matrica, relacije (10.7) možemo rastaviti na realni i kompleksni dio

$$\begin{aligned} Ax + iAy &= A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x), \\ A^t x + iA^t y &= A^t(x + iy) = (\alpha - i\beta)(x + iy) = (\alpha x + \beta y) + i(\alpha y - \beta x). \end{aligned}$$

Znači da je 2-dimenzionalni potprostor U invarijantan za A i A^t i da inducirani operatori $A|_U$ i $A^t|_U$ u ortonormiranoj bazi (x, y) imaju matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

Sada opet zaključujemo da je $W = U^\perp$ invarijantan za A i A^t i da je inducirani operator $A|_U$ normalan, pa tvrdnja teorema slijedi iz (10.8) i pretpostavke indukcije. $\square$

Zadatak 10.9. *Napišite sve elemente grupa $O(2)$ i $SO(2)$.*

Zadatak 10.10. *Dokažite da je svaki element A grupe $SO(3)$ rotacija u $\mathbb{R}^3$, tj. da za dani A postoji $v \neq 0$ takav da je $Av = v$ i da je inducirani operator na ravnini $\langle v \rangle^\perp$ rotacija za neki kut φ.*

Pitanje: *Možemo li svaki ortogonalni operator U na realnom unitarnom prostoru V zapisati kao $U = e^K$ za neki antihermitski K ?* Uputa: razmislite
(1) o relaciji

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$$

(valjda je istinita?) i
(2) o postavljenom pitanju u slučaju ortogonalnih matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$