⑥ zad 2. zadaća

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad s(x) = \|Ax\|$, $\quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1+3x_2, 2x_1+x_2)$

Provjeravamo svojstva norme.

1. $s(x) = \|Ax\| = \|\underbrace{(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)}_{\in \mathbb{R}^2}\| \geq 0$ (jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$)

2. $s(x) = 0 \iff \|(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)\| = 0 \iff (x_1+3x_2, 2x_1+x_2) = (0,0)$

(jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$)

$$\iff x_1+3x_2 = 0 \;\&\; 2x_1+x_2 = 0$$

$$\iff x_1 = -3x_2 \;\&\; 2x_1+x_2 = 0$$

$$\iff x_1 = -3x_2 \;\&\; -6x_2+x_2 = 0$$

$$\iff x_1 = x_2 = 0 \iff (x,x) = (0,0)$$

3. $s(\lambda x) = \|(\lambda x_1+3\lambda x_2, 2\lambda x_1+\lambda x_2)\| =$

$= \|\lambda\cdot(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)\| = |\lambda|\cdot\|(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)\|$

jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}_2$

$= |\lambda|\cdot s(x)$

4. $s(x+y) = \|(x_1+y_1+3(x_2+y_2), 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2))\|$

$= \|(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)+(y_1+3y_2, 2y_1+y_2)\|$

$\leq \|(x_1+3x_2, 2x_1+x_2)\| + \|(y_1+3y_2, 2y_1+y_2)\|$

jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$

$= s(x)+s(y)$

$\Rightarrow s(x+y) \leq s(x)+s(y)$

Dakle, s je norma na $\mathbb{R}^2$.

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ $\quad s(x)=\|Ax\|=\|(x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)\|$

Provjeravamo svojstva norme.

1. $s(x)=\|\underbrace{(x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)}_{\in\mathbb{R}^2}\|\geq 0$ jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$.

2. $s(x)=\|(x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)\|=0 \overset{\text{jer je } \|\cdot\| \text{ norma na } \mathbb{R}^2}{\iff} (x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)=(0,0)$

$\iff x_1+2x_2=0$ & $2x_1+4x_2=0$

$\iff x_1+2x_2=0$

Dakle $s(x)=0 \iff x_1+2x_2=0 \iff x=(-2t,t)$.

Npr. $s((-2,1))=0$, a $(-2,1)\neq(0,0)$

Dakle, s nije norma na $\mathbb{R}^2$

c) Uočimo da je u primjeru a) $s(x)=\|Ax\|$ norma, dok u primjeru b) s nije norma. Razlika je u tome što homogeni sustav u a) dijelu zadatka $x_1+3x_2=0$, $2x_1+x_2=0$ ima samo trivijalno rješenje, dok u b) dijelu zadatka homogeni sustav $x_1+2x_2=0$, $2x_1+4x_2=0$ ima i netrivijalna rješenja.

Prisjetimo se LA1: Homogeni sustav $Ax=0$ ima jedinstveno (trivijalno) rješenje ako i samo ako je A regularna matrica.

Uočite da je matrica u a) dijelu zadatka regularna, a u b) dijelu zadatka je singularna.

- Dakle, ako je A singularna matrica, onda postoji vektor $x \neq (0,0)$ t.d. $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i onda je $s(x) = \|Ax\| = \|(0,0)\| = 0$, a $x \neq (0,0)$ pa $s(x) = \|Ax\|$ nije norma.

- Ako je A regularna matrica, onda je $s(x) = \|Ax\|$ norma na $\mathbb{R}^2$. Dokažimo to:

1. $s(x) = \|\underbrace{Ax}_{\in \mathbb{R}^2}\| \geq 0$ jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$.

2. $s(x) = 0 \iff \|Ax\| = 0 \iff Ax = 0 \iff x = (0,0)$

jer je A regularna

jer je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^2$

3. $s(\lambda x) = \|A(\lambda x)\| = \|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| = |\lambda| \cdot s(x)$

4. $s(x+y) = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = s(x) + s(y)$

jer je $\|\cdot\|$ norma

5. zad, 1. zadaća $\quad s((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1\overline{w_1} + \tau z_1 \overline{w_2} - i z_2 \overline{w_1} + 2 z_2 \overline{w_2}$

Da bi s bio skalarni produkt nužno je (ali ne i dovoljno)

$$s(z, w) = \overline{s(w, z)} \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^2 \qquad w = (w_1, w_2),\ z = (z_1, z_2)$$

$$s(z, w) = \overline{s(w, z)} \iff z_1\overline{w_1} + \tau z_1 \overline{w_2} - i z_2 \overline{w_1} + 2 z_2 \overline{w_2} =$$

$$= \overline{w_1 \overline{z_1} + \tau w_1 \overline{z_2} - i w_2 \overline{z_1} + 2 w_2 \overline{z_2}}$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{z_1\overline{w_1}} + \tau z_1\overline{w_2} - i z_2\overline{w_1} + \cancel{2 z_2\overline{w_2}} =$$

$$= \cancel{\overline{w_1} z_1} + \overline{\tau}\, \overline{w_1} z_2 + i\,\overline{w_2} z_1 + \cancel{2\overline{w_2} z_2}$$

$$\Longleftrightarrow (\tau - i) z_1\overline{w_2} = (\overline{\tau} + i) z_2\overline{w_1} \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}^2$$

Stavimo li npr. $z_1 = 0$, dobivamo da mora vrijediti

$(\overline{\tau} + i) z_2\overline{w_1} = 0 \quad \forall\, z_2, w_1 \in \mathbb{C}$, a to je zadovoljeno samo za $\overline{\tau} + i = 0$, odnosno $\boxed{\tau = i}$.

Iz ovoga možemo zaključiti da ako je $\tau \neq i$ da s sigurno nije skalarni produkt (jer nije zadovoljeno svojstvo hermitske simetričnosti). To ne znači da je za $\tau = i$ s sigurno skalarni produkt (jer nismo provjerili ostala svojstva skalarnog produkta). Idemo sada provjeriti ostala svojstva za $\tau = i$, tj. $s(z,w) = z_1\overline{w_1} + i z_1\overline{w_2} - i z_2\overline{w_1} + 2 z_2\overline{w_2}$

1. $s(z,z) = z_1\overline{z_1} + i z_1\overline{z_2} - i z_2\overline{z_1} + 2 z_2\overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 + i z_1\overline{z_2} + \overline{i z_1\overline{z_2}} + 2|z_2|^2 =$

$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(i z_1\overline{z_2}) + 2|z_2|^2$

Općenito, za $z = x + iy$ vrijedi $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ pa je

$|z| \geq |x| \Rightarrow |z| \geq -x \;/\cdot(-1) \Rightarrow -|z| \leq x$

$\Rightarrow -|z| \leq \mathrm{Re}\, z$

Dakle $R(i z_1\overline{z_2}) \geq -|i z_1\overline{z_2}| = -|z_1 z_2|$

$\Rightarrow s(z,z) \geq |z_1|^2 - 2|z_1 z_2| + 2|z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + |z_2|^2 \geq 0$

$s(z,z) = 0 \Longleftrightarrow (|z_1| - |z_2|)^2 + |z_2|^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow |z_1| - |z_2| = 0 \;\&\; |z_2| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 = 0$

Ostala svojstva su jednostavna za provjeriti pa to napravite za zadaću.

6. $s\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-1)(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2}) + \overline{\lambda}(c_1\overline{c_2}+d_1\overline{d_2})$

Da bi s bio skalarni produkt, nužno je, ali ne i dovoljno, da vrijedi $s(A_1, \ ) = \overline{s(\ , A_1)}$ $\forall A, B \in M_2(\mathbb{C})$

$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

$s(A_1, A_2) = \overline{s(A_2, A_1)} \iff$

$$(\lambda-1)(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2}) + \overline{\lambda}(c_1\overline{c_2}+d_1\overline{d_2}) = \overline{(\lambda-1)(a_2\overline{a_1}+b_2\overline{b_1})} + \overline{\overline{\lambda}(c_2\overline{c_1}+d_2\overline{d_1})}$$

$$\iff (\lambda-1)(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2}) + \overline{\lambda}(c_1\overline{c_2}+d_1\overline{d_2})$$

$$= \overline{(\lambda-1)}(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2}) + \lambda(c_1\overline{c_2}+d_1\overline{d_2})$$

$$\iff (\lambda-\overline{\lambda})(a_1\overline{a_2}+b_1\overline{b_2}) = (\lambda-\overline{\lambda})(c_1\overline{c_2}+d_1\overline{d_2}) \quad \forall a_1,a_2,b_1,b_2, c_1,c_2,d_1,d_2 \in \mathbb{C}$$

Stavimo li npr. $a_1=a_2=b_1=b_2=0$ i $c_1=c_2=d_1=d_2=1$, vidimo da to vrijedi samo za $\lambda=\overline{\lambda}$, odnosno $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Ovime smo dokazali da za $\lambda \notin \mathbb{R}$ s sigurno nije skalarni produkt jer ne vrijedi svojstvo hermitske simetričnosti.
- Za $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi svojstvo hermitske simetričnosti (jer je $\lambda-\overline{\lambda}=0$), ali moramo provjeriti i ostala svojstva.

Za $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$s(A_1, A_2) = (\lambda-1)(a_1\bar{a}_2 + b_1\bar{b}_2) + \lambda(c_1\bar{c}_2 + d_1\bar{d}_2)$$

(1.) $s(A_1, A_1) = (\lambda-1)(a_1\bar{a}_1 + b_1\bar{b}_1) + \lambda(c_1\bar{c}_1 + d_1\bar{d}_1)$

$$= (\lambda-1)(\underbrace{|a_1|^2+|b_1|^2}_{\geq 0}) + \lambda(\underbrace{|c_1|^2+|d_1|^2}_{\geq 0})$$

Da bi to bilo ≥ 0 za npr. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, nužno je

$\lambda - 1 \geq 0$, odnosno $\lambda \geq 1$

Za $\lambda \geq 1$ je $s(A_1, A_1) \geq 0$

Ako je $\lambda = 1$, onda je $s(A_1, A_1) = |c_1|^2 + |d_1|^2$, ali to je nuli i kad je $a_1 \neq 0$, a to ne želimo

Dakle $\lambda > 1$ (inače s nije skalarni produkt)

Za $\lambda > 1$ je $s(A_1, A_1) = \underbrace{(\lambda-1)}_{>0}(\underbrace{|a_1|^2+|b_1|^2}_{\geq 0}) + \lambda(\underbrace{|c_1|^2+|d_1|^2}_{\geq 0})$

pa je $s(A_1, A_1) = 0 \iff a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0 \iff A_1 = 0$

Ostala svojstva (za $\lambda > 1$) su jednostavna za provjeriti pa to ostavljamo za DZ.